



**HAL**  
open science

# Méthode de collocation Chebyshev pour le couplage entre la convection naturelle en cavité remplie d'air et le rayonnement pariétal

Shihe Xin

► **To cite this version:**

Shihe Xin. Méthode de collocation Chebyshev pour le couplage entre la convection naturelle en cavité remplie d'air et le rayonnement pariétal. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03421396

**HAL Id: hal-03421396**

**<https://hal.science/hal-03421396>**

Submitted on 9 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthode de collocation Chebyshev pour le couplage entre la convection naturelle en cavité remplie d'air et le rayonnement pariétal

Shihe Xin<sup>a</sup>

a. INSA-Lyon, Cethil UMR5008, 20 av. Albert Einstein, 69621 VILLEURBANNE

## Résumé :

*La méthode de collocation Chebyshev est étendue au couplage convection naturelle-rayonnement pariétal via les matrices de passage entre les distributions collocative et constante par morceaux et validée. L'étude a montré qu'une résolution spatiale plus grossière en rayonnement est possible et ne détériore pas la précision des résultats.*

## Abstract :

*Chebyshev collocation method is applied to the coupling of natural convection with surface radiation and validated. New transformation matrices between point-wise and step-wise distributions were developed for this purpose. It is shown that a coarser grid can be used for surface radiation and does not decrease accuracy of numerical results.*

**Mots clefs :** Chebyshev collocation ; convection naturelle ; rayonnement pariétal

## 1 Introduction

La convection naturelle en cavité remplie d'air est devenue depuis longtemps un problème classique en mécanique des fluides numérique. Elle a fait l'objet de deux problèmes de benchmark [8, 7], auxquels les solutions de référence ont été fournies, elle est souvent utilisée pour tester et valider des codes numériques. Sa popularité renforcée par les problèmes de benchmark lui a conféré un statut de problème type, beaucoup d'études ont été réalisées sur l'apparition des écoulements instationnaires, la transition vers la turbulence, etc.

Malgré de nombreux travaux sur la convection naturelle en cavité remplie d'air et le fait que les milieux d'air en question sont souvent transparents, le rayonnement pariétal est la plupart du temps négligé et son couplage avec la convection naturelle a été jusqu'à présent peu étudié. Il s'ensuit qu'il n'existe pas encore de problème de benchmark dans le cadre du couplage entre la convection naturelle en cavité remplie d'air et le rayonnement pariétal. Notre première motivation est de proposer un problème de benchmark afin de tester et valider des codes numériques.

Parmi les études numériques réalisées sur le couplage, aucune n'a été réalisée, à notre connaissance, avec les méthodes spectrales. Ceci pouvait être dû au fait que les effets du rayonnement pariétal et du rayonnement de manière générale ont été sous-estimés en convection naturelle bien que quelques travaux des années 90 [4, 2, 3, 1] soulignent l'importance des effets radiatifs sur l'écoulement stationnaire en convection naturelle. Mais une autre raison indéniable est qu'il existe une incompatibilité intrinsèque entre les approximations polynomiales spectrales et le rayonnement pariétal. En effet, les méthodes spectrales sont basées sur les familles de polynômes orthogonaux d'une part et d'autre part le rayonnement pariétal repose sur des représentations (approximations) constantes par morceaux. L'application des méthodes spectrales au couplage entre la convection naturelle en cavité remplie d'air et le rayonnement pariétal est alors conditionnée par la compatibilité entre les distributions polynomiale et constante par morceaux, à savoir, l'établissement d'une relation de passage entre les deux

types de distributions. Notre seconde motivation est d'étudier la faisabilité des méthodes spectrales en couplage entre la convection naturelle et le rayonnement pariétal. Les méthodes spectrales ont été connues pour leur capacité de fournir des solutions numériques de référence aux problèmes de benchmark. Notre troisième motivation est naturellement de proposer des solutions numériques de référence en couplage convection naturelle-rayonnement pariétal dans une cavité remplie d'air.

Les motivations ci-dessus sont confortées par des études récentes. Wang *et al* [10] ont montré que le rayonnement pariétal influence de manière significative l'apparition de l'instationnarité : il diminue le nombre de Rayleigh critique et rend donc l'apparition des écoulements instationnaires précoce. En régime chaotique, il est responsable du désaccord observé depuis longtemps entre les expériences et les simulations numériques sur la stratification thermique au centre de la cavité [11]. Il est donc important de pouvoir disposer d'une méthode précise et fiable, telle que les méthodes spectrales, pour étudier le couplage entre la convection naturelle en cavité remplie d'air et le rayonnement pariétal et comprendre les phénomènes couplés.

L'article est organisé comme suit : le problème physique et les équations mathématiques seront suivis des méthodes numériques, des résultats numériques et des conclusions.

## 2 Problème physique et équations mathématiques

Faute de problème de benchmark reconnu, nous choisissons la configuration simple étudiée par Akiyama et Chong [1] : il s'agit d'une cavité carrée ( $L = H$ ), différentiellement chauffée, dont les quatre parois grises, diffuses et opaques ont la même émissivité,  $\varepsilon$ . Une écart constant de température,  $\Delta T$ , est imposé entre les deux parois verticales isothermes et une condition adiabatique est spécifiée sur les parois horizontales. En absence du rayonnement pariétal, le gradient vertical de la température est nul sur les parois horizontales. En présence du rayonnement, la convection équilibre l'échange net radiatif et le couplage convection naturelle-rayonnement a lieu uniquement à travers les parois horizontales. Figure 1 présente la configuration étudiée :  $L = H$ ,  $\Delta T = T_h - T_c$  et  $T_0 = (T_h + T_c)/2$ .

L'air contenu dans la cavité est supposé transparent pour le rayonnement et newtonien (masse volumique  $\rho$ , viscosité cinématique  $\nu$ , conductivité thermique  $\lambda$ , diffusivité thermique  $\alpha$  et coefficient de dilatation thermique  $\beta$ ). Ses mouvements sont gouvernés par les équations de Navier-Stokes sous les hypothèses de Boussinesq. Avec les quantités de référence classiques en convection naturelle pure, à savoir,  $H$  pour la longueur et  $\alpha Ra^{1/2}/H$  pour la vitesse ( $Ra = g\beta\Delta TH^3/(\nu\alpha)$  nombre de Rayleigh), et la température réduite  $\Theta = (T - T_0)/\Delta T$ , nous obtenons les équations sans dimension suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Pr}{Ra^{1/2}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{Pr}{Ra^{1/2}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + Pr\Theta \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + w \frac{\partial \Theta}{\partial z} &= \frac{1}{Ra^{1/2}} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

avec  $Pr = \nu/\alpha$  le nombre de Prandtl et  $(x, z) \in [0, 1] \times [0, 1]$ .

Les équations (1) sont munies des conditions aux limites suivantes : la condition d'adhérence est appliquée sur les parois ;  $\Theta = 0.5$  en  $x = 0$ ,  $\Theta = -0.5$  en  $x = 1$ ,  $-\frac{\partial \Theta}{\partial z} + q_r = 0$  en  $z = 0$  et  $\frac{\partial \Theta}{\partial z} + q_r = 0$  en  $z = 1$  avec  $q_r = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \left( \frac{\sigma H}{\lambda \Delta T} (\Delta T \times \Theta + T_0)^4 - J \right)$  la densité de flux net radiatif sans dimension où  $\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann et  $J$  est la radiosité sans dimension. Comme en convection naturelle pure on a l'habitude d'utiliser  $-\lambda\Delta T/H$  pour rendre sans dimension la densité de flux, nous continuons à l'utiliser en couplage convection naturelle-rayonnement pariétal.

Afin de caractériser les transferts thermiques, nous utilisons les nombres de Nusselt suivants :  $\overline{Nu}_c = -\int_0^1 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \Big|_{x=0,1} dz$  en  $x = 0$  et  $1$  ;  $\overline{Nu}_r = \int_0^1 q_r dz$  en  $x = 0$  et  $\overline{Nu}_r = -\int_0^1 q_r dz$  en  $x = 1$  ;  $\overline{Nu}_r = \int_0^1 q_r dx$

en  $z = 0$  et  $\overline{Nu}_r = - \int_0^1 q_r dx$  en  $z = 1$ . Les indices  $c$  et  $r$  désignent convectif et radiatif.

### 3 Méthodes numériques

#### 3.1 Discrétisation temporelle

Les équations (1) sont discrétisées par le schéma d'Euler retardé semi-implicite d'ordre 2 en temps. Etant donné que le couplage convection-rayonnement intervient seulement sur les conditions aux limites thermiques des parois horizontales, nous choisissons un traitement explicite pour le rayonnement pariétal. Donc au pas de temps  $n + 1$ , nous avons  $\Theta^{n+1} = 0.5$  en  $x = 0$ ,  $\Theta^{n+1} = -0.5$  en  $x = 1$ ,  $-\frac{\partial \Theta^{n+1}}{\partial z} + 2q_r^n - q_r^{n-1} = 0$  en  $z = 0$  et  $\frac{\partial \Theta^{n+1}}{\partial z} + 2q_r^n - q_r^{n-1} = 0$  en  $z = 1$ . Ceci nous permet d'extrapoler  $q_r$  et résoudre les équations de Navier-Stokes au pas de temps  $n + 1$ .

#### 3.2 Méthode de collocation Chebyshev

La méthode de collocation Chebyshev est utilisée pour discrétiser spatialement les équations de Navier-Stokes et les solutions sont cherchées sur les points de collocation Gauss-Lobatto,  $x_i = z_i = [1 - \cos(i\pi/N)]/2$  avec  $i = 0, 1, \dots, N$  (les mêmes pour  $x$  et  $z$  pour la simplicité). Les équations de Navier-Stokes discrètes sont résolues par la diagonalisation totale [9] et le couplage vitesse-pression est traité par la méthode d'Uzawa [6, 5].

Comme ni la température ni l'éclairement n'est uniforme sur les parois, il convient de discrétiser le problème radiatif et les parois sont divisées en petits éléments de surface. Egalement pour la simplicité, nous utilisons sur chaque paroi  $N_r$  éléments de surface, délimités par  $N_r + 1$  points de Gauss-Lobatto. Comme indique la Figure 1, le  $j$ ème élément sur une paroi verticale est défini par  $z_{j-1}^r$  et  $z_j^r$  et l' $i$ ème élément sur une paroi horizontale par  $x_{i-1}^r$  et  $x_i^r$ . Le problème discret radiatif ainsi défini est de dimension  $4N_r$ . Avec  $\overline{f}_l$  représentant la moyenne de  $f$  sur le  $l$ ème élément ( $l = 1, 2, \dots, 4N_r$ ), il s'écrit comme  $\overline{J}_l^n = \overline{E}_l^n + (1 - \varepsilon)\overline{I}_l^n$  où  $\overline{J}_l^n$ ,  $\overline{E}_l^n$  et  $\overline{I}_l^n$  sont respectivement la radiosité, l'émission propre et l'éclairement de l'élément au pas de temps  $n$ . Les manipulations conduisent à la forme finale suivante :

$$\overline{J}_l^n - (1 - \varepsilon) \sum_{k=1}^{4N_r} F_{lk} \overline{J}_k^n = \overline{E}_l^n$$
 où  $F_{lk}$  sont les facteurs de forme. La connaissance des  $\overline{J}_l^n$  permet de

calculer  $\overline{(q_r)_l^n}$  soit par  $\overline{(q_r)_l^n} = \frac{1}{1 - \varepsilon} (\overline{E}_l^n - \varepsilon \overline{J}_l^n)$  soit par  $\overline{(q_r)_l^n} = \overline{J}_l^n - \sum_{k=1}^{4N_r} F_{lk} \overline{J}_k^n$ . La deuxième façon a

l'avantage d'être valable pour  $\varepsilon = 1$  et l'inconvénient d'utiliser un produit matrice-vecteur.

Il est clair que  $\overline{(q_r)_l^n}$  ainsi obtenue est constante sur le  $l$ ème élément et que nous avons besoin de transformer les valeurs constantes par morceaux  $\overline{(q_r)_l^n}$  en valeurs collocatives  $(q_r)_l^n$  d'autant plus que  $N_r$  peut être différent de  $N$ . Nous avons également besoin de calculer  $\overline{E}_l^n$  à partir des valeurs collocatives de  $\Theta^n$  sur les parois.

##### 3.2.1 Matrice de passage d'une distribution collocative à celle constante par morceaux

Soient  $f_j$  connus aux points  $y_i = \cos(j\pi/M)$ , avec  $y_j \in [-1, 1]$  et  $j = 0, 1, \dots, M$ , et  $M_r$  éléments de surface définis par  $y_k^r = \cos(k\pi/M_r)$  et  $y_{k-1}^r$  avec  $k = 1, 2, \dots, M_r$ , l'objectif est de trouver  $\overline{f}_k$ , la moyenne de  $f$  sur l'élément  $k$ . Ceci peut être réalisé en deux étapes : dans la première étape nous transformons les  $M + 1$  valeurs  $f_j$  en  $M + 1$  coefficients spectraux Chebyshev ; dans la deuxième les polynômes Chebyshev sont intégrés et moyennés de manière analytique sur l'élément  $k$ .

En effet, les matrices de passage entre  $f_j$  et les coefficients spectraux,  $SPPH$  et  $PHSP$ , sont bien connues :  $PHSP_{ij} = 2T_i(y_j)/(\overline{c}_j \overline{c}_i M)$  et  $SPPH_{ji} = T_i(y_j)$  où  $T_i(y) = \cos[i \arccos(y)]$  sont les polynômes de Chebyshev,  $\overline{c}_0 = \overline{c}_M = 2$  et  $\overline{c}_i = \overline{c}_j = 1$  pour  $i, j = 1, 2, \dots, M - 1$ . Les coefficients

spectraux,  $\hat{a}_i$ , sont calculés par un produit matrice-vecteur :  $\hat{a}_i = \sum_{j=0}^M PHSP_{ij} f_j$ . Dans la deuxième

étape, les  $T_i(y)$  sont moyennés sur  $[y_k^r, y_{k-1}^r]$ , à savoir, nous évaluons  $\frac{1}{y_{k-1}^r - y_k^r} \int_{y_k^r}^{y_{k-1}^r} T_i(y) dy$ . Ceci transforme  $M + 1$  coefficients spectraux en  $M_r$  valeurs moyennées et donne lieu à une matrice rectangulaire,  $SPAV$  :

$$SPAV_{k0} = 1, \quad SPAV_{k1} = (y_{k-1}^r + y_k^r)/2$$

$$SPAV_{ki} = \frac{\{yT_i(y) + i \sin[i \arccos(y)] \sin[\arccos(y)]\} \Big|_{y=y_k^r}^{y=y_{k-1}^r}}{(1 - i^2)(y_{k-1}^r - y_k^r)} \text{ pour } i = 2, 3, \dots, M$$

Dans la pratique, les deux étapes sont combinées en une seule matrice de passage,  $PHAV$ , transformant la distribution collocative,  $f_j$ , en une distribution constante par morceaux,  $\bar{f}_k$  :  $PHAV = SPAV \times PHSP$ . Nous faisons donc le produit matrice-vecteur  $\bar{f}_k = \sum_{j=0}^M PHAV_{kj} f_j$  qui est uniquement utilisée pour calculer  $\bar{E}_l^n$ , le second membre du problème discret radiatif.

### 3.2.2 Matrice de passage d'une distribution constante par morceaux à celle collocative

La résolution du problème discret radiatif permet d'obtenir  $\overline{(q_r)_k^n}$  et la conversion en une distribution collocative,  $(q_r)_j^n$ , est nécessaire pour résoudre les équations de Navier-Stokes.

De la définition de  $SPAV$  ci-dessus, il est possible de construire une matrice carrée de dimension  $M_r \times M_r$ ,  $\overline{SPAV}$  qui moyenne les polynômes de Chebyshev de degré inférieur à  $M_r$  sur les  $M_r$  éléments de surface. Il est donc faisable de déterminer les  $M_r$  coefficients spectraux Chebyshev qui donneront la distribution constante par morceaux,  $\overline{(q_r)_k^n}$ . En désignant  $\hat{a}^n$  le vecteur des  $M_r$  coefficients spectraux et  $\overline{q_r^n}$  le vecteur des  $M_r$  valeurs de la densité de flux, nous avons le système linéaire suivant :  $\overline{SPAV} \hat{a}^n = \overline{q_r^n}$ .  $\overline{SPAV}$  est régulier et  $\overline{SPAV}^{-1}$  existe, nous avons alors  $\hat{a}^n = \overline{SPAV}^{-1} \overline{q_r^n}$ . A partir des  $M_r$  coefficients spectraux  $\hat{a}^n$ , il est facile d'évaluer ce polynôme sur des points de collocation Gauss-Lobatto à l'aide d'une matrice rectangulaire  $\overline{SPPH}$  de dimension  $(M + 1) \times M_r$ , à savoir,  $(q_r)_j^n = \sum_{k=0}^{M_r-1} \overline{SPPH}_{jk} \hat{a}_k^n$  pour  $j = 0, 1, \dots, M$ . Il est évident que  $\overline{SPPH}$  et  $\overline{SPAV}^{-1}$  peuvent être condensées

en une seule matrice rectangulaire  $\overline{AVPH} = \overline{SPPH} \times \overline{SPAV}^{-1}$  qui transforme la distribution constante par morceaux  $\overline{(q_r)_k^n}$  en celle collocative  $(q_r)_j^n$ .  $(q_r)_j^n$  aux points  $y_j$  sont donc employées pour résoudre l'équation de l'énergie discrète. On note que  $\overline{AVPH}$  conserve l'intégrale de  $\overline{(q_r)_k^n}$  et il s'agit également d'une interpolation sous la contrainte de conservation.

En résumé,  $PHAV$ ,  $\Theta^n$  et  $\Theta^{n-1}$  sont employés pour calculer  $\bar{E}^n$  et  $\bar{E}^{n-1}$ . La résolution du problème discret radiatif nous donne  $\overline{q_r^n}$  et  $\overline{q_r^{n-1}}$  et  $\overline{AVPH}$  permet de disposer de  $(q_r)_j^n$  et  $(q_r)_j^{n-1}$  qui fournissent les conditions aux limites thermiques au pas de temps  $n + 1$ . L'équation de l'énergie est résolue avant les équations de la quantité de mouvement et le couplage vitesse-pression. On note qu'un changement de variable suffit pour travailler dans le domaine  $[0, 1]$ .

## 4 Résultats numériques

Nous nous intéressons à une cavité carrée remplie d'air ( $A = H/L = 1$  et  $Pr = 0.71$ ). En convection pure, le problème ne dépend plus que du nombre de Rayleigh. Mais en couplage convection-rayonnement, d'autres paramètres comme  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $T_0$ ,  $H$  et  $\Delta T$  doivent être précisés. Nous fixons  $\varepsilon = 0.8$ ,  $\lambda = 0.025$  W/(m K),  $T_0 = 293.5$  K et  $Ra = 10^4$ .  $Ra = 10^4$  est choisi uniquement pour montrer la faisabilité des méthodes spectrales en couplage convection naturelle-rayonnement pariétal. Comme  $H$ ,  $\Delta T$  et  $Ra$  sont dépendants, nous devons préciser  $H$  et  $\Delta T$  pour  $Ra = 10^4$  :  $H = 0.021$  m et  $\Delta T = 9.998120$  K, ce qui veut dire  $Ra/(\Delta TH^3) = (g\beta)/(\nu\alpha) = 1.08 \times 10^8$ .

Avec des distributions analytiques, des tests ont été réalisés sur  $PHAV$  et  $\overline{AVPH}$  et ils ont montré que  $PHAV$  et  $\overline{AVPH}$  permettent de retrouver au niveau zéro machine les résultats analytiques. La figure 2 montre à titre d'exemple les distributions constantes par morceaux de départ et celles collocatives obtenues par  $\overline{AVPH}$ .

Entre les deux façons de calculer  $\overline{E}_l^n$  ( $\overline{E}_l^n = \varepsilon \frac{\sigma H}{\lambda \Delta T} (\Delta T \times \overline{\Theta}_l^n + T_0)^4$  et  $\overline{E}_l^n = \frac{\varepsilon}{x_i^r - x_{i-1}^r} \frac{\sigma H}{\lambda \Delta T} \int_{x_{i-1}^r}^{x_i^r} (\Delta T \times \Theta^n + T_0)^4 dx$ ), les tests réalisés ont montré que la deuxième est appropriée.

Les méthodes proposées ont été d'abord validées avec des résultats antérieurs [10] (voir le tableau 1). Après la validation, le choix de  $N_r$  vis-à-vis de  $N$  a été étudié :  $N_r$  prend  $N/2$ ,  $N$ ,  $3N/2$  et  $2N$ . En effet, en 2D  $N_r$  peut varier sans contraintes, mais en 3D  $N_r$  ne pourra jamais dépasser  $N$  comme a été montré dans [11]. Le tableau 2 résume les résultats obtenus et montre que les chiffres significatifs sont encore équilibrés avec  $N_r = N/2$  et qu'il est faisable de prendre  $N_r < N$  sans détériorer la précision des résultats. Cette conclusion, aussi valable pour  $Ra = 10^5$  et  $10^6$  dont les résultats ont été omis pour le manque d'espace, présente un grand intérêt pratique pour des configurations tri-dimensionnelles. Il est toutefois noté que le tableau 2 bien qu'il montre la convergence des résultats numériques, ne présente pas la convergence spectrale attendue. Des travaux d'élucidation sont en cours.

## 5 Conclusions

La méthode de collocation Chebyshev a été étendue au couplage convection naturelle-rayonnement pariétal grâce aux matrices de passage entre les distributions collocative et constante par morceaux. Elle a été décrite et validée sur une cavité carrée avec les parois grises, diffuses et opaques. Comme elle offre la possibilité d'avoir une résolution spatiale différente pour le rayonnement, la relation entre les deux résolutions a été étudiée. Il est possible d'utiliser une résolution plus faible sans détériorer la précision des résultats, ce qui présente un intérêt certain en configuration 3D.

**Remerciements** : ce travail a bénéficié du soutien des projets PIE Cocoracopha et CNRS-NSFC et est réalisé à l'IDRIS sous les projets 100326 and 101474.

## Références

- [1] M. Akiyama and Q.P. Chong. Numerical analysis of natural convection with surface radiation in a square enclosure. *Num. Heat Trans. A*, 31 :419–433, 1997.
- [2] C. Balaji and S.P. Venkateshan. Interaction of surface radiation with free convection in a square cavity. *Int. J. Heat & Fluid Flow*, 14 :260–267, 1993.
- [3] C. Balaji and S.P. Venkateshan. Correlations for free convection and surface radiation in a square cavity. *Int. J. Heat & Fluid Flow*, 15 :249–251, 1994.
- [4] M. Behnia, J.A. Reizes, and G. de Vahl Davis. Combined radiation and natural convection in a rectangular cavity with a transparent wall and containing a non-participating fluid. *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 10 :305–325, 1990.
- [5] C. Bernardi and Y. Maday. Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques. In *Collection Mathématiques & Applications*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [6] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer Verlag, New York, 1988.
- [7] M.A. Christon, P.M. Gresho, and S.B. Sutton. Computational predictability of time-dependent natural convection flows in enclosures (including a benchmark solution). *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 40(8) :953–980, 2002.
- [8] G. de Vahl Davis and I.P. Jones. Natural convection in a square cavity : a comparison exercise. *Int. J. Num. Methods in fluids*, 3 :227–248, 1983.
- [9] D. Haidvogel and T. Zang. The accurate solution of Poisson's equations by expansion in Chebyshev polynomials. *J. Comp. Phys.*, 30 :167–180, 1979.
- [10] H. Wang, S. Xin, and P. Le Quéré. Etude numérique du couplage de la convection naturelle avec le rayonnement de surfaces en cavité carrée remplie d'air. *C. R. Mécanique*, 334 :48–57, 2006.
- [11] S. Xin, J. Salat, P. Joubert, A. Sergent, F. Penot, and P. Le Quéré. Resolving the stratification discrepancy of turbulent natural convection in differentially heated air-filled cavities. Part III : a full convection-conduction-surface radiation coupling. *submitted to IJHFF*, 2011.

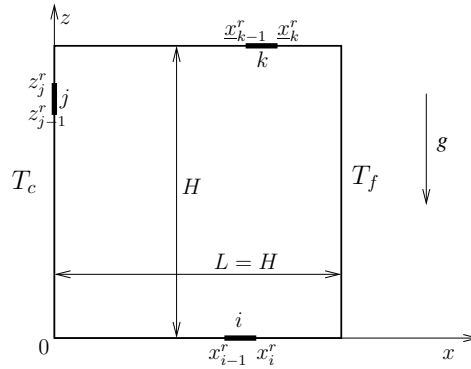


FIGURE 1 – Cavité carrée ( $L = H$ ) différentiellement chauffée remplie d’air avec  $\Delta T = T_h - T_c = 9.998120$  K et  $T_0 = (T_h + T_c)/2 = 293.5$  K. Toutes les parois ont la même emissivité,  $\varepsilon = 0.8$ , le nombre de Rayleigh étudié est de  $10^4$  ( $H = 0.021$  m) et les éléments de surface du problème discret radiatif sont illustrés.

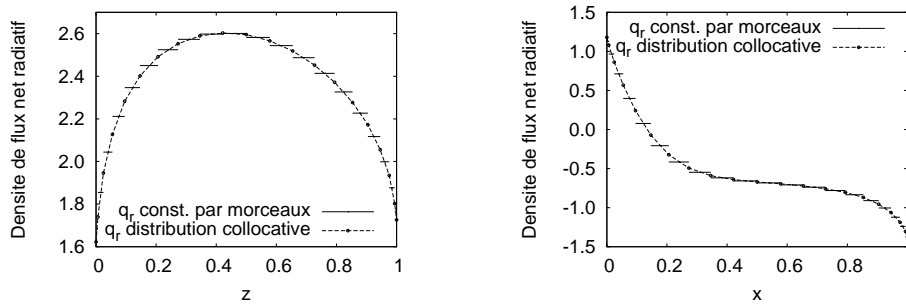


FIGURE 2 – Distributions de  $\overline{(q_r)}$  et  $(q_r)$ , sur la paroi chaude (gauche) et la paroi basse (droite), obtenues avec  $\overline{AVPH}$  et  $N_r = N = 20$  à  $Ra = 10^4$ .

	Référence [10]				Présent travail			
	Paroi chaude		Paroi froide		Paroi chaude		Paroi froide	
$Ra$	$Nu_c$	$Nu_r$	$Nu_c$	$Nu_r$	$Nu_c$	$Nu_r$	$Nu_c$	$Nu_r$
$10^4$	2.2492	2.4010	2.2781	2.3720	2.2489	2.4008	2.2778	2.3719
$10^5$	4.1889	5.1958	4.2465	5.1372	4.1831	5.1955	4.2424	5.1362
$10^6$	7.8153	11.2648	7.9298	11.1500	7.8063	11.2647	7.9225	11.1484

TABLE 1 – Comparaison des nombres de Nusselt sur les parois actives entre le présent travail et l’étude [10] à  $Ra = 10^4, 10^5$  et  $10^6$  avec  $\varepsilon = 0.8$ ,  $\lambda = 0.025$  W/(m K) et  $T_0 = 293.5$  K. Les résultats du présent travail ont été obtenus avec  $N = N_r = 60$ .

Paroi chaude		Paroi froide		Paroi chaude		Paroi froide	
$N$	$Nu_c$	$Nu_r$	$Nu_c$	$Nu_r$	$N$	$Nu_c$	$Nu_r$
$N_r = 2N$				$N_r = 3N/2$			
20	2.250	2.4009	2.279	2.3720	20	2.250	2.4010
30	2.2494	2.40081	2.2783	2.37191	30	2.2494	2.40086
40	2.2491	2.40079	2.2780	2.371885	40	2.2491	2.40081
50	2.24899	2.40077	2.27789	2.371871	50	2.24900	2.40079
60	2.24892	2.40076	2.27782	2.371864	60	2.24893	2.40078
$N_r = N$				$N_r = N/2$			
20	2.250	2.4013	2.279	2.3724	20	2.251	2.403
hline 30	2.2495	2.4010	2.2784	2.3721	30	2.2497	2.4018
40	2.2492	2.4009	2.2781	2.3720	40	2.2493	2.4013
50	2.24901	2.40084	2.27791	2.37194	50	2.24909	2.4011
60	2.24893	2.40081	2.27783	2.37191	60	2.24899	2.4010

TABLE 2 – Nombres de Nusselt en fonction de la résolution spatiale à  $Ra = 10^4$ .  $N_r$  autres que  $N$  sont testés et les résultats sont présentés par rapport à ceux donnés par  $N_r = 2N = 120$ .