HAL open science

Modèle d'ordre réduit obtenus par projection optimale et POD pour des écoulements anisothermes

Alexandra Tallet, Cyrille Allery, Cédric Leblond, Francis Allard

To cite this version:

Alexandra Tallet, Cyrille Allery, Cédric Leblond, Francis Allard. Modèle d'ordre réduit obtenus par projection optimale et POD pour des écoulements anisothermes. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03421369

HAL Id: hal-03421369

https://hal.science/hal-03421369v1

Submitted on 9 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modèles d'ordre réduit obtenus par projection optimale et POD pour des écoulements anisothermes

A. Tallet [a], C. Allery [a], C. Leblond [a], F. Allard[a]

a. *Laboratoire d'Étude des Phénomènes de Transfert et de l'Instantanéité : Agro-industrie et Bâtiment (LEPTIAB), Avenue Michel Crépeau, 17042 LA ROCHELLE*

Résumé :

Dans cette communication, une nouvelle méthode de construction de modèles d'ordre réduit, obtenus à partir de bases POD, est exposée pour des fluides incompressibles en anisotherme. Cette méthode, appelée projection optimale permet d'avoir l'évolution temporelle à la fois du champ de vitesse, de la température et de la pression. Elle est fondée sur la minimisation des résidus des équations associées. Cette projection est confrontée à la projection de Galerkin, classiquement employée en réduction de modèles, sur le cas d'une cavité entrainée bidimensionnelle anisotherme.

Abstract :

In this article, a new method to build POD-based reduced-order model is exposed for incompressible and anisotherm flows. This method, named optimal projection enable to obtain the velocity, temperature and pressure. It is based on the minimization of the equations residuals. This projection is compared to the Galerkin projection, commonly used to build reduced order models, on the case of lid-driven anisotherm cavity.

Mots clefs : Réduction de modèles par POD ; Convection mixte ; Projection optimale

1 Introduction

Les méthodes classiques de simulation numérique des écoulements (DNS, LES), étant coûteuses en temps de calcul et nécessitant d'importantes ressources numériques, ne peuvent pas être utilisées pour faire du contrôle en temps réel. Il est donc nécessaire d'avoir recours à des modèles d'ordre réduit. La réduction de modèle consiste à approximer un champ $\mathbf{h}(\mathbf{x},t)$ [1] sous la forme : $\mathbf{h}(\mathbf{x},t) \approx \sum_{i=1}^{N} \chi_i(t)\,\varphi_i(\mathbf{x})$ où $\varphi_i(\mathbf{x})$ sont les fonctions de la base spatiale, $\chi_i(t)$ les coefficients temporels à déterminer et N la dimension de la base [2]. Une fois la base spatiale $\varphi_i(\mathbf{x})$ connue, les coefficients temporels $\chi_i(t)$ sont alors calculés à l'aide d'une projection des équations décrivant les phénomènes physiques sur chaque mode $\varphi_i(\mathbf{x})$. On est donc amené à résoudre un système de taille réduite, ce qui est très rapide. La POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) est la technique de construction de base la plus utilisée dans le cas d'écoulements incompressibles, en raison de son optimalité au sens énergétique. Elle est donc naturellement employée ici.

Classiquement, le modèle réduit est obtenu en utilisant la projection de Galerkin sur la base POD. Toutefois, cette méthode de projection ne permet pas, d'une part d'obtenir la pression et d'autre part, nécessite généralement des méthodes de stabilisation à posteriori. Dans cette communication, la méthode par projection optimale dans [1] est appliquée au cas anisotherme. Cette nouvelle technique de projection est basée sur la minimisation du résidu des équations dans lesquelles les champs de

1. Le champ scalaire ou vectoriel $\mathbf{h}(\mathbf{x},t)$ correspond aux champs de vitesse, à la température ou à la pression.
2. Généralement, N est très petit par rapport au nombre de degrés de liberté du problème complet.

vitesse, la température et la pression sont couplés. Le champ de pression est alors résolu par réduction de modèles, ce qui n'est habituellement pas le cas lorqu'on utilise une projection de Galerkin.
Les deux méthodes de projection sont ici comparées sur le cas d'une cavité entrainée bidimensionnelle anisotherme. Dans une première partie, la réduction de modèles par POD/projection optimale est décrite, puis appliquée au cas de la cavité entrainée. Cette seconde partie présentera la comparaison des résultats obtenus avec les deux méthodes.

2 Réduction de modèles POD/Projection optimale

2.1 POD

Le fluide est considéré newtonien et incompressible, dans un volume Ω de frontière Γ, pour $t \in [0, T]$. Les propriétés du fluide sont supposées constantes, exceptées pour le terme de poussée qui intervient dans les équations de quantité de mouvement (approximation de Boussinesq). La dynamique du fluide est régie par les équations de Navier-Stokes et la température par une équation de convection-diffusion qui s'écrivent sous forme adimensionnelle :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla \cdot \mathbf{u} & = & 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla]\, \mathbf{u} & = & -\nabla p + \dfrac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + Ri\, \theta\, \mathbf{e_y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + [\mathbf{u} \cdot \nabla]\, \theta & = & \dfrac{1}{Re\, Pr} \Delta \theta \end{array} \right. \tag{1}$$

avec les conditions initiales suivantes sur le champ de vitesse $\mathbf{u}$ et la température θ :

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \theta(0, \mathbf{x}) = \theta_0(\mathbf{x})$$

p représente le champ de pression, $Re = \mathcal{UL}/\nu$ le nombre de Reynolds, $Pr = \nu/\gamma$ le nombre de Prandlt, $Ri = Gr/Re^2$ le nombre de Richardson et $Gr = g\beta\mathcal{H}^3\Delta\theta/\nu^2$ le nombre de Grashof [3].

Comme mentionné précédemment, la base nécessaire à la réduction de modèles est obtenue par POD/Snapshots [2]. La POD consiste à déterminer une base de modes propres orthogonaux (vecteurs propres) représentatifs des réalisations les plus probables. Ces modes propres sont obtenus en résolvant une équation de Fredholm construite à partir de N^{snap} snapshots issus de simulations numériques. Les champs de vitesse, de température et de pression se décomposent alors respectivement par POD comme suit [4] :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N^{\mathbf{u}}} a_i(t)\ \Phi_i^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}),\ \theta(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N^{\theta}} b_i(t)\ \Phi_i^{\theta}(\mathbf{x})\ \text{ et }\ p(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N^{p}} c_i(t)\ \Phi_i^{p}(\mathbf{x}) \tag{2}$$

$\mathbf{a}^n$, $\mathbf{b}^n$ et $\mathbf{c}^n$ sont les coefficients temporels associés à la vitesse, la température et la pression, $\mathbf{\Phi}^u$, $\mathbf{\Phi}^\theta$ et $\mathbf{\Phi}^p$, les modes POD de vitesse, température et pression. Par construction, les modes POD sont orthogonaux, nuls aux frontières et à divergence nulle. N^u, N^θ et N^p représentent les modes POD les plus énergétiques de vitesse, température et pression (N^u, N^θ, $N^p < N^{snap}$).

Pour obtenir le système dynamique réduit usuel, la projection de Galerkin est utilisée à cette étape sur les équations de quantité de mouvement et de convection-diffusion, et ne sera pas développée ici. On s'interesse plutôt à la projection optimale qui est explicitée dans la section suivante.

3. avec $\mathcal{H}$ la hauteur caractéristique, $\mathcal{L}$ la largeur caractéristique, $\mathcal{U}$ la vitesse caractéristique, ν la viscosité cinématique, g la gravitation universelle, γ la diffusivité thermique

4. **Il est à noter que nous utilisons en pratique des systèmes dynamiques basés sur le champ fluctuant. Ainsi, le champ total se décompose en un champ moyen et un champ fluctuant sur lequel est effectué la POD.**

2.2 Description de la méthode de projection optimale

La première étape de cette méthode consiste à discrétiser temporellement les équations de quantité de mouvement et de convection-diffusion (Eqs. 1) par un schéma d'Euler [5] :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} + [\mathbf{u}^n \cdot \nabla]\,\mathbf{u}^n + \nabla p^{n+1} - \dfrac{1}{Re}\Delta\mathbf{u}^{n+1} - Ri\,\theta^n\,\mathbf{e_y} & = & 0 \\ \dfrac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\delta t} + [\mathbf{u}^n \cdot \nabla]\,\theta^n - \dfrac{1}{Re\,Pr}\Delta\theta^{n+1} & = & 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

où le terme δt représente le pas de temps et l'indice n le n-ième temps. Puisque la vitesse est par la suite une combinaison linéaire des modes POD de vitesse, la contrainte d'incompressibilité est automatiquement satisfaite.

La seconde étape consiste à remplacer dans les équations (Eqs. 3), le champ de vitesse, la température et la pression par leur décomposition POD (Eqs. 2). Or comme les décompositions POD données par ces équations sont des approximations du champ total et que les modes POD ont été tronqués, un résidu apparaît alors dans chacune des équations (Eqs. 4) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{N_u} a_i^{n+1}\left[I - \frac{\delta t}{Re}\Delta\right]\Phi_i^u + \delta t\sum_{j=1}^{N_u}\sum_{k=1}^{N_u} a_j^n\,a_k^n\,[\Phi_j^u\cdot\nabla]\Phi_k^u + \delta t\sum_{i=1}^{N_p} c_i^{n+1}\nabla\Phi_i^p & & \\ \displaystyle - \sum_{j=1}^{N_u} a_j^n\,\Phi_j^u - \delta t\,Ri\sum_{j=1}^{N_\theta} b_j^n\,\Phi_j^\theta\mathbf{e}_y & = & \mathbf{Res^u_{n+1}} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N_\theta} b_i^{n+1}\left[I - \frac{\delta t}{Re\,Pr}\,\Delta\right]\Phi_i^\theta + \delta t\sum_{j=1}^{N_u}\sum_{k=1}^{N_\theta} a_j^n\,b_k^n\,[\Phi_j^u\cdot\nabla]\Phi_k^\theta - \sum_{j=1}^{N_\theta} b_j^n\,\Phi_j^\theta & = & \mathbf{Res^\theta_{n+1}} \end{array}\right. \tag{4}$$

où a_i^{n+1} correspond à $a_i(t_n+\delta t)$, b_i^{n+1} à $b_i(t_n+\delta t)$ et c_i^{n+1} à $c_i(t_n+\delta t)$.

Une équation de fermeture sur la pression est ensuite introduite en prenant la divergence des équations de Navier-Stokes discrétisées réduites :

$$\sum_{i=1}^{N_p} c_i^{n+1}\Delta\Phi_i^p + \sum_{j=1}^{N_u}\sum_{k=1}^{N_u} a_j^n\,a_k^n\,\nabla\cdot\left\{[\Phi_j^u\cdot\nabla]\Phi_k^u\right\} - Ri\sum_{j=1}^{N_\theta} b_j^n\,\frac{\partial\Phi_j^\theta}{\partial y} = \mathbf{Res^p_{n+1}} \tag{5}$$

Un résidu global $\mathbf{Res_{n+1}}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{n+1}})$ est alors défini :

$$\mathbf{Res_{n+1}}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{n+1}}) = \left(\mathbf{Res^u_{n+1}}, \mathbf{Res^\theta_{n+1}}, \mathbf{Res^p_{n+1}}\right)^{\mathbf{T}}, \qquad \text{où} \quad \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{n+1}} = \left(\mathbf{a^{n+1}}, \mathbf{b^{n+1}}, \mathbf{c^{n+1}}\right)^{\mathbf{T}}$$

La méthode par projection optimale consiste à minimiser ce résidu. Pour cela, on introduit la fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}^{n+1})$ définie par :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}^{n+1}) = \|\mathbf{Res_{n+1}}(\boldsymbol{\alpha}^{n+1})\|^2_{\mathcal{L}_2}$$

Ainsi, les coefficients temporels $\boldsymbol{\alpha}^{n+1}$ sont cherchés tels que la fonctionnelle $\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}^{n+1})$ soit minimale. Ils doivent alors satisfaire la condition d'optimalité suivante :

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}^{n+1})}{\partial\boldsymbol{\alpha}^{n+1}}\cdot\delta\boldsymbol{\alpha}^{n+1} = \mathbf{0}$$

5. La méthode peut être également appliquée avec un autre schéma de discrétisation temporelle.

En appliquant cette méthode aux équations (Eqs. 4 et 5), on obtient le système d'ordre réduit suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \left(\left[I-\dfrac{\delta t}{Re}\Delta\right]\Phi_i^u, \mathbf{Res^u_{n+1}}\right) & = & \mathbf{0} & i=1,\cdots,N^u \\ \left(\left[I-\dfrac{\delta t}{Re\,Pr}\Delta\right]\Phi_i^\theta, \mathbf{Res^\theta_{n+1}}\right) & = & \mathbf{0} & i=1,\cdots,N^\theta \\ \delta t\left(\nabla\Phi_i^p, \mathbf{Res^u_{n+1}}\right)+\left(\Delta\Phi_i^p, \mathbf{Res^p_{n+1}}\right) & = & \mathbf{0} & i=1,\cdots,N^p \end{array}\right.$$

où $(\cdot\,,\cdot)$ est le produit scalaire dans la norme $\mathcal{L}_2$.

En injectant les définitions des résidus (Eqs. 4 et 5), le modèle d'ordre réduit à résoudre s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M^{uu}} & \mathbf{0} & \mathbf{M^{up}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M^\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M^{pu}} & \mathbf{0} & \mathbf{M^{pp}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a^{n+1}} \\ \mathbf{b^{n+1}} \\ \mathbf{c^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G(a^n,b^n)} \\ \mathbf{L(a^n,b^n)} \\ \mathbf{H(a^n,b^n)} \end{pmatrix}$$

où les différents coefficients matriciels sont définis dans [1].

Dans le cas de la projection de Galerkin [6] , les termes relatifs à l'équation de Poisson ne sont pas présents et les modèles réduits sont obtenus en imposant au résidu $\mathbf{Res^u_{n+1}}$ (resp. $\mathbf{Res^\theta_{n+1}}$) d'être orthogonal à chacun des modes $\mathbf{\Phi}^u$ (resp. $\mathbf{\Phi}^\theta$) soit :

$$\left(\Phi_i^u, \mathbf{Res^u_{n+1}}\right)=\mathbf{0} \;\text{ pour }\; \mathbf{i=1,\cdots,N^u} \quad \text{et} \quad \left(\mathbf{\Phi^\theta_i}, \mathbf{Res^\theta_{n+1}}\right)=\mathbf{0} \;\text{ pour }\; \mathbf{i=1,\cdots,N^\theta}$$

3 Application au cas de la cavité entrainée

3.1 Description du cas

On s'intéresse à l'écoulement dans une cavité carrée entrainée par le haut, où le fluide considéré est l'air ($Pr = 0,71$). Les conditions aux limites sont données sur la Figure 1 : les parois verticales sont prises adiabatiques et on impose sur les parois haute et basse respectivement, des températures froide et chaude. Le nombre de Grashof est fixé à 10^6 et le nombre de Reynolds à 316. Le nombre de Richardson, qui représente une mesure de l'importance de la convection naturelle par rapport à la convection forcée, vaut $Ri = 10$.

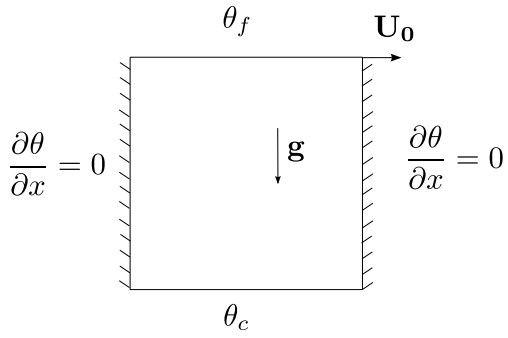


FIGURE 1 – Cavité etudiée

Les Snapshots nécessaires à la construction de la base POD ont été obtenus à l'aide du code CFD développé par EDF, *Code_Saturne* en utilisant un maillage de 100×100. On observe, conformément aux résultats de la littérature [3], la formation de deux tourbillons principaux due à l'interaction entre les forces de flottabilité et les forces de cisaillement. Celui du dessus est formé par l'entrainement de la cavité et celui du dessous par convection naturelle.

6. Classiquement, en mécanique des fluides le système réduit est obtenu par projection de l'équation de conservation de quantité de mouvement sous forme continue en temps, sur les modes POD, ce qui aboutit à un système d'EDOs. Ici le modèle réduit dit de Galerkin s'obtient par projection des équations déjà discrétisées.

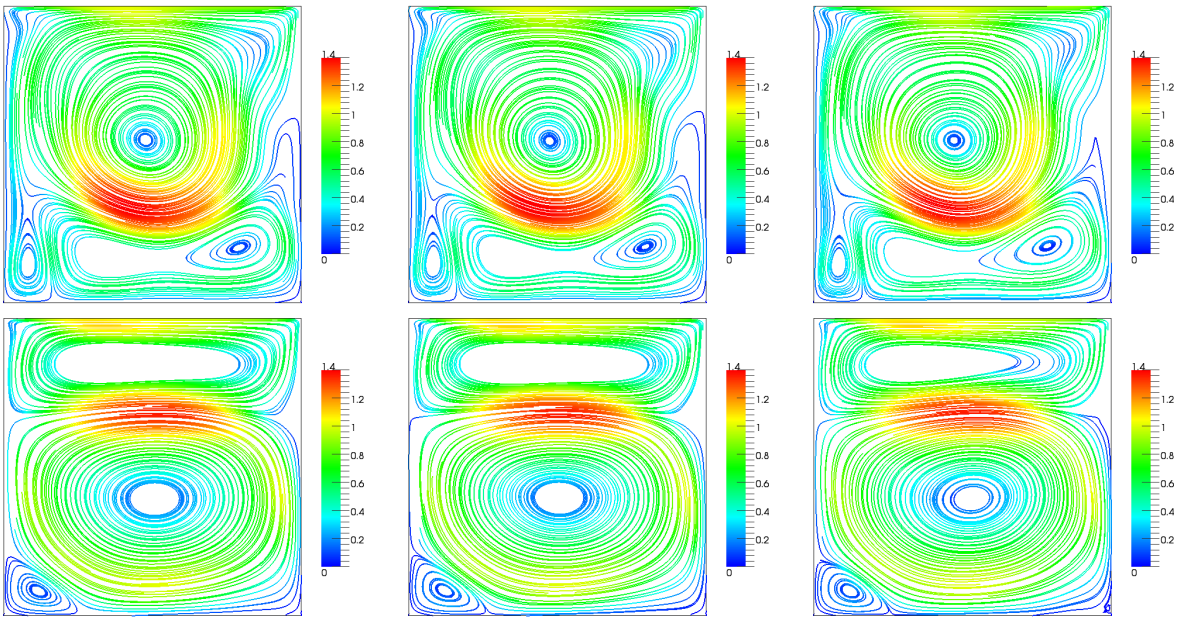
3.2 Résultats

300 Snapshots ont été pris pour construire les bases POD du champ de vitesse, de la température et de la pression. Très peu de modes suffisent pour représenter plus de 99% de l'énergie, dans ce cas. En l'occurrence, 24 modes de vitesse, 26 modes de température et 20 modes de pression sont ici gardés pour effectuer la projection de Galerkin et la projection optimale. Ces deux méthodes de projection sont alors implémentées dans *Code_Saturne* afin d'utiliser les outils qui existent déjà dans ce code.

Les Figures 2 et 3 montrent le champ de vitesse et la température issus du modèle complet de *Code_Saturne* et ceux issus de la résolution des modèles réduits obtenus par projection de Galerkin et par projection optimale, pour deux instants donnés. Globalement, les modèles réduits reproduisent bien la dynamique du fluide et le transport de chaleur.

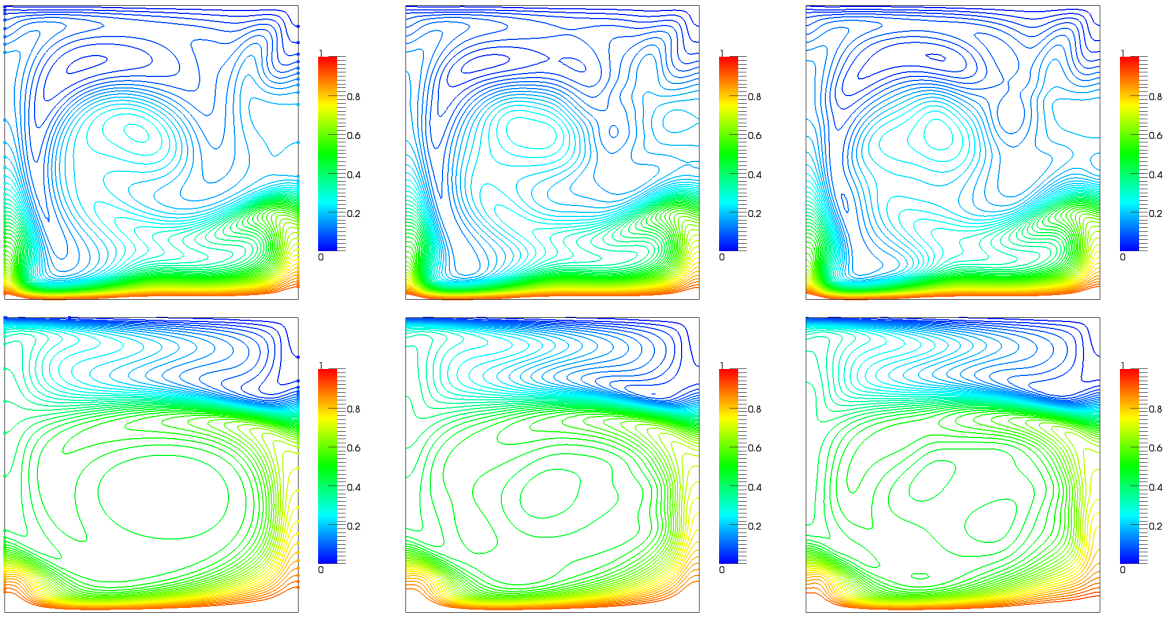
Peu de différences sont observées entre le modèle complet et le modèle réduit par projection optimale. En revanche, le modèle par projection de Galerkin présente des différences avec le modèle complet. Sur le premier cliché de vitesse, la zone de recirculation inférieure gauche est moins prononcée que dans le modèle complet. De plus, au deuxième instant la zone de recirculation centrale est plus arrondie et la zone de recirculation supérieure plus étendue. Concernant les isocontours de température, des différences sont significatives surtout au deuxième instant, au coeur de la cavité.

L'erreur relative, à chaque pas de temps, entre le champ issu du modèle complet et le champ issu des modèles réduits tracée sur la Figure 4, confirme nos premières observations. Cette erreur est définie par $\mathrm{Err}(h) = \frac{|\mathbf{h_{complet}} - \mathbf{h_{ROM}}|_{\mathcal{L}_2}}{|\mathbf{h_{complet}}|_{\mathcal{L}_2}} \times 100$ pour le champ de vitesse, la température et la pression. Les erreurs relatives sont faibles, de l'ordre du %, voire même pour la vitesse, inférieures à 1%. Il est à noter également que l'erreur relative sur la vitesse et sur la température en utilisant la projection optimale est globalement inférieure à celle utilisant la projection de Galerkin.



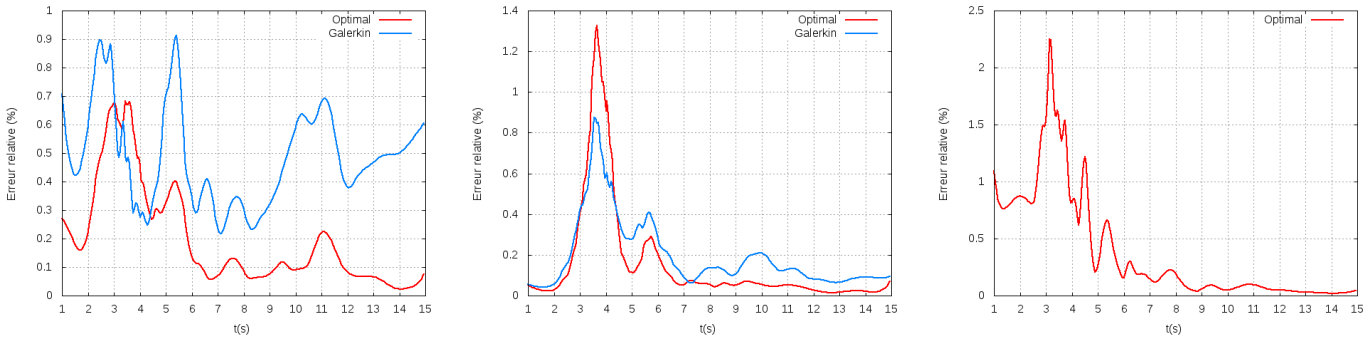
a. Modèle complet b. Projection optimale c. Projection de Galerkin

FIGURE 2 – Comparaison des lignes de courant obtenues par le modèle complet et les deux méthodes de réduction de modèles pour deux instants.



a. Modèle complet b. Projection optimale c. Projection de Galerkin

FIGURE 3 – Comparaison des isocontours de température obtenus par le modèle complet et les deux méthodes de réduction de modèles pour deux instants.



a. Vitesse b. Température c. Pression

FIGURE 4 – Erreur relative sur la vitesse, la température et la pression en fonction du temps.

4 Conclusions

Globalement, les résultats obtenus par modèles réduits coincïdent bien avec ceux obtenus par le modèle complet de *Code_Saturne*. La méthode de projection optimale permet d'une part, d'obtenir un gain en précision sur le champ de vitesse et d'autre part, d'avoir accès à la pression, ce qui peut être indispensable dans certains problèmes de mécanique des fluides notamment en interaction fluide-structure. A court terme, la méthode de projection optimale sera incorporée dans un algorithme de contrôle, afin de traiter des problèmes de contrôle actif des écoulements en temps quasi-réel.

Références

[1] Leblond C., Allery C., Inard C. 2011 An optimal projection method for the reduced-order modeling of incompressible flows *à paraître dans Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* doi : 10.1016/j.cma.2011.04.020

[2] Sirovich L. 1987 Turbulence and the dynamics of coherent structure *Quartely of Applied Mathematics* **XLV 3** 561-590

[3] Cheng T.S., Liu W.-H 2010 Effect of temperature gradient orientation on the characteristics of mixed convection flow in a lid-driven square cavity *Computers and Fluids* **39** 965-978