



HAL
open science

Un algorithme semi-implicite de correction de pression pour la simulation acoustique à bas nombre de Mach

Yann Moguen, Tarik Kousksou, Pascal Bruel, J. Vierendeels, Erik Dick

► To cite this version:

Yann Moguen, Tarik Kousksou, Pascal Bruel, J. Vierendeels, Erik Dick. Un algorithme semi-implicite de correction de pression pour la simulation acoustique à bas nombre de Mach. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03421294

HAL Id: hal-03421294

<https://hal.science/hal-03421294>

Submitted on 9 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un algorithme semi-implicite de correction de pression pour la simulation acoustique à bas nombre de Mach

Y. MOGUEN^a, T. KOUSKSOU^b, P. BRUEL^c, J. VIERENDEELS^a ET E. DICK^a

a. Ghent University – Department of Flow, Heat and Combustion Mechanics
Sint-Pietersnieuwstraat, 9000 Gent (Belgique)

b. Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur Appliquées à la Mécanique et au Génie Electrique (SIAME)
Fédération IPRA – Université de Pau et des Pays de l'Adour
Bât. d'Alembert, rue Jules Ferry, BP. 7511, 64 075 Pau (France)

c. CNRS et Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications – Université de Pau et des Pays de l'Adour
Avenue de l'Université, 64 013 Pau (France)

Résumé :

Une méthode numérique semi-implicite de correction de pression, permettant la simulation de la propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement à bas nombre de Mach, est proposée. La stabilisation du phénomène de découplage en damier pouvant apparaître à bas nombre de Mach est réalisée à l'aide d'une interpolation de type Rhie-Chow. Une manière originale d'appliquer à l'algorithme de correction de pression des conditions aux limites non réfléchissantes basées sur les équations caractéristiques est présentée.

Abstract :

A semi-implicit pressure correction method allowing the simulation of acoustic wave propagation in low Mach number flow is proposed. The checkerboard decoupling than can arise in the low Mach number regime is stabilised by a Rhie-Chow interpolation approach. An original manner to apply characteristic based non-reflecting boundary conditions in the pressure correction algorithm is described.

Mots clefs : conditions aux limites ; équations caractéristiques ; correction de pression ; bas nombre de Mach

1 Introduction

L'adoption d'un modèle compressible de préférence à un modèle incompressible, ou encore dilatable, lorsque le nombre de Mach est petit devant l'unité, se justifie essentiellement par la possibilité de simuler numériquement la propagation d'ondes acoustiques. La dissipation numérique peut alors être un obstacle rédhibitoire pour cela. Associée au couplage pression-vitesse, elle est cependant indispensable pour le calcul d'écoulements à bas nombre de Mach si une discrétisation spatiale en co-localisation est adoptée, sous peine de voir apparaître le phénomène de découplage en damier.

Une méthode numérique semi-implicite de correction de pression permettant la simulation de la propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement à bas nombre de Mach est présentée. Deux points-clefs sont plus particulièrement traités : (1) la construction d'une vitesse transportante utilisée dans les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, avec pour objectif d'éviter le phénomène de découplage en damier mentionné plus haut ; (2) l'obtention de conditions aux limites non réfléchissantes, souhaitables en particulier dans le cas des calculs instationnaires (cf. [8, 4, 6, 9]). Dans la présente contribution, ces deux points-clefs sont traités de manière originale. D'une part, la construction de la vitesse transportante est réalisée par une combinaison des méthodes d'interpolation AUSM⁺ [2] et de Rhie-Chow [5]. D'autre part, les conditions aux limites sont obtenues par une méthode originale de résolution des équations d'évolution des variables primitives, écrites sous la forme LODI (pour Laminar One-Dimensional Inviscid) [8, 4, 6, 9]. La

méthode proposée permet d'éviter la restriction de la condition CFL acoustique, comme le permet l'algorithme semi-implicite utilisé à l'intérieur du domaine de calcul. Signalons que ce dernier point a déjà été considéré dans la Réf. [9], mais pour un algorithme de correction de pression d'une forme différente de celui que nous allons proposer ici.

Pour simplifier la présentation, un écoulement unidimensionnel de gaz parfait idéal dans une tuyère de section droite S est considéré. Le modèle d'écoulement est donné par les équations d'Euler :

$$\partial_t(\rho S) + \partial_x(\rho v S) = 0 \quad (1a)$$

$$\partial_t(\rho v S) + \partial_x((\rho v^2 + p)S) = p \partial_x S \quad (1b)$$

$$\partial_t(\rho E S) + \partial_x(\rho v H S) = 0 \quad (1c)$$

$$E = e + \frac{1}{2}v^2 \quad (1d)$$

$$\rho H = \rho E + p \quad (1e)$$

$$\rho e = \frac{p}{\gamma - 1} \quad (1f)$$

où t , ρ , p , v , e , E et H sont, respectivement, les variables de temps, masse volumique, pression, vitesse, énergie interne, énergie totale et enthalpie totale par unité de masse ; x est la coordonnée d'espace dans la direction de l'écoulement ; γ est le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volumes constants. L'axe de la tuyère est divisé en N cellules de longueur Δx . Une discrétisation spatiale en volumes finis avec un arrangement en co-location est adoptée.

2 Algorithme de correction de pression

Après une description de la forme générale de l'algorithme utilisé, la construction d'une vitesse transportante est présentée.

2.1 Cycle de prédiction-correction

Le système (1) est résolu par un algorithme de correction de pression dont chaque pas de temps est décomposé en itérations comprenant chacune une étape de prédiction et une étape de correction. Les indices \star et $'$ dénotent les quantités estimées et les corrections. La première itération correspond à $k = n$ où n désigne le dernier pas de temps connu.

1. Etape préliminaire : génération d'une vitesse transportante v^T aux faces des cellules. Cette vitesse transportante est utilisée dans les deux étapes suivantes.
2. Etape de prédiction : avec $p_i^\star = p_i^k$, calcul de ρ_i^\star et $(\rho v)_i^\star$ en utilisant les équations de continuité et de la quantité de mouvement. Par exemple, la masse volumique estimée est obtenue en résolvant :

$$\frac{1}{2}(3\rho_i^\star - 4\rho_i^n + \rho_i^{n-1}) + \frac{\tau}{S_i} \left\{ [\rho_i^\star + \frac{1}{2}\psi_i^k(\rho)(\rho_i^k - \rho_{i-1}^k)]v_{i+1/2}^T S_{i+1/2} - [\rho_{i-1}^\star + \frac{1}{2}\psi_{i-1}^k(\rho)(\rho_{i-1}^k - \rho_{i-2}^k)]v_{i-1/2}^T S_{i-1/2} \right\} = 0 \quad (2)$$

où τ est le pas de discrétisation $\Delta t / \Delta x$. Notons que v^T est ici positive. Un limiteur de pente ψ est utilisé pour atteindre une précision d'ordre deux en espace. Des valeurs estimées de la masse volumique et de la quantité de mouvement, on déduit l'énergie totale et l'enthalpie totale estimées.

3. Etape de correction : calcul de la correction de pression p' en résolvant l'équation de l'énergie dans laquelle les flux sont écrits :

$$(\rho v H)_{i+1/2}^{k+1} = (\rho H)_{i+1/2}^\star v_{i+1/2}^\star + H_{i+1/2}^\star (\rho v)'_{i+1/2} + (\rho H)'_{i+1/2} v_{i+1/2}^\star$$

En négligeant la contribution de l'énergie cinétique, $(\rho H)'_{i+1/2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} p'_{i+1/2}$. L'expression de $(\rho v)'_{i+1/2}$ – ainsi que celle de $(\rho v)_i'$ – est obtenue de l'équation de la quantité de mouvement en se conformant à l'approximation classique de la méthode SIMPLE.

4. Mises à jour : $p_i^{k+1} = p_i^\star + p'_i$, $\rho_i^{k+1} = \rho_i^\star + (\partial_p \rho)_i^\star p'_i$, $(\rho v)_i^{k+1} = (\rho v)_i^\star + (\rho v)_i'$. L'énergie totale ainsi que les valeurs aux faces de la pression et de la vitesse sont également mises à jour.

2.2 Vitesse transportante

Donnons à présent quelques précisions sur la manière dont la vitesse transportante mentionnée au paragraphe précédent est construite à l'aide d'une combinaison des méthodes d'interpolation AUSM⁺ et de Rhie-Chow. Tout d'abord, une masse volumique ϱ_i^{**} , qui peut être considérée comme "pré-estimée", est définie en résolvant l'équation de continuité. Dans cette équation, les vitesses aux interfaces sont construites au moyen de l'interpolation AUSM⁺. Ensuite, de la même manière, une vitesse auxiliaire v^{**} est obtenue de l'équation de la quantité de mouvement dans laquelle l'influence du gradient de pression a été supprimée :

$$a_i \varrho_i^{**} v_i^{**} = -\frac{\tau}{S_i} \left[\frac{1}{2} \psi_i^k(\varrho v) [(\varrho v)_i^k - (\varrho v)_{i-1}^k] v_{i+1/2}^k S_{i+1/2} \right. \\ \left. - \{(\varrho v)_{i-1}^k + \frac{1}{2} \psi_{i-1}^k(\varrho v) [(\varrho v)_{i-1}^k - (\varrho v)_{i-2}^k]\} v_{i-1/2}^k S_{i-1/2} \right] \\ + (1 - \epsilon) \left[2(\varrho v)_i^n - \frac{1}{2}(\varrho v)_i^{n-1} \right] \quad (3)$$

où $0 \leq \epsilon \leq 1$ et $a_i = \frac{3}{2} + \frac{\tau}{S_i} v_{i+1/2}^k S_{i+1/2}$. Notons que les vitesses $v_{i\pm 1/2}^k$ sont supposées positives. A l'aide d'une équation analogue pour v_{i+1}^{**} , une vitesse transportante est alors définie par :

$$v_{i+1/2}^T = \frac{1}{2}(v_i^{**} + v_{i+1}^{**}) - \frac{\tau}{2} \left(\frac{1}{a_i \varrho_i^{**}} + \frac{1}{a_{i+1} \varrho_{i+1}^{**}} \right) (p_{i+1}^k - p_i^k) \\ + \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}} \right) \left[2(v_{i+1/2}^T)^n - \frac{1}{2}(v_{i+1/2}^T)^{n-1} \right] \quad (4)$$

L'introduction *différée* des termes inertiels dans la construction de la vitesse transportante – correspondant à $\epsilon > 0$ dans les équations (3) et (4) – permet de réduire les oscillations non physiques pouvant apparaître dans le champ de pression lorsqu'une interpolation de Rhie-Chow est utilisée avec des "petits" pas de temps (*cf.* Réf. [7]). Par ailleurs, la présence du pas de temps dans le terme de couplage pression-vitesse est souhaitable pour les calculs instationnaires à bas nombre de Mach [3].

La combinaison des méthodes d'interpolation AUSM⁺ et de Rhie-Chow permet de définir la vitesse transportante à un niveau préliminaire à l'étape de prédiction. Ainsi, une expression unique de la vitesse transportante peut être utilisée dans les trois équations de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie), avec la prise en compte des conditions aux limites du pas de temps courant.

3 Conditions aux limites basées sur les équations caractéristiques

L'obtention de conditions aux limites non réfléchissantes basées sur les équations caractéristiques (*cf. e.g.* Réfs. [8, 4]) implique la résolution des équations LODI, qui sont une écriture des équations d'évolution des variables primitives ϱ , v et p faisant apparaître les amplitudes d'ondes convectives et acoustiques. Nous présentons quelques résultats d'analyse asymptotique qui montrent que cette approche reste justifiée dans le cas où le nombre de Mach est "petit" devant l'unité. Les principes d'une résolution semi-implicite des équations LODI sont ensuite abordés.

3.1 Propagation des ondes dans un écoulement à bas nombre de Mach

Les équations d'évolution des variables primitives peuvent s'écrire :

$$\partial_t \varrho + \frac{\varrho}{2c} (\mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1) + \mathcal{L}_2 = -\varrho v \frac{d_x S}{S} \quad (5a)$$

$$\partial_t v + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_3) = 0 \quad (5b)$$

$$\partial_t p + \frac{\varrho c}{2} (\mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_1) = -\varrho v c^2 \frac{d_x S}{S} \quad (5c)$$

où l'on fait apparaître les amplitudes d'ondes :

$$\mathcal{L}_1 = (v - c)(\partial_x v - \frac{1}{\rho c} \partial_x p)$$

$$\mathcal{L}_2 = v(\partial_x \varrho - \frac{1}{c^2} \partial_x p)$$

$$\mathcal{L}_3 = (v + c)(\partial_x v + \frac{1}{\rho c} \partial_x p)$$

Pour illustrer leur utilisation pour définir des conditions aux limites non réfléchissantes, nous allons considérer la sortie $x = L$ de la tuyère et supposer que la section droite y est constante, de sorte que $d_x S = 0$. Si aucune onde acoustique n'est introduite de l'extérieur, la condition de non réflexion des ondes acoustiques sortantes s'écrit alors : $\mathcal{L}_1|_{x=L} = 0$. Pour filtrer les fréquences acoustiques uniquement et assurer la stabilité du calcul, cette condition est "relaxée" sous la forme : $\mathcal{L}_1 = K_p(p_\infty - p)$ où $K_p = \pi(1 - M_{\max}^2)/(\rho L)$, M_{\max} désignant le maximum du nombre de Mach dans la tuyère. Les conditions de sortie agissent alors comme un filtre passe-haut dont la fréquence de coupure est proportionnelle au coefficient de relaxation K_p [6].

Il est légitime de se demander si cette approche reste justifiée pour un écoulement à bas nombre de Mach. En effet, supposons données les quantités de référence suivantes : une pression p_r , une masse volumique ρ_r , ainsi qu'une longueur l_r et une vitesse v_r considérée comme relative à l'échelle inertielle. Un nombre de Mach de référence est alors donné par $M = v_r/\sqrt{p_r/\rho_r}$. Les équations (5) s'écrivent alors sous forme adimensionnelle :

$$\partial_t \varrho + M \frac{\rho}{2c} (\mathcal{L}_3^M - \mathcal{L}_1^M) + \mathcal{L}_2 = 0$$

$$\partial_t v + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_1^M + \mathcal{L}_3^M) = 0$$

$$\partial_t p + M \frac{\rho c}{2} (\mathcal{L}_3^M - \mathcal{L}_1^M) = 0$$

où

$$\mathcal{L}_1^M = (v - \frac{c}{M})(\partial_x v - \frac{1}{M} \frac{1}{\rho c} \partial_x p)$$

$$\mathcal{L}_2 = v(\partial_x \varrho - \frac{1}{c^2} \partial_x p)$$

$$\mathcal{L}_3^M = (v + \frac{c}{M})(\partial_x v + \frac{1}{M} \frac{1}{\rho c} \partial_x p)$$

Par ailleurs, la condition de relaxation s'écrit :

$$\mathcal{L}_1^M = \frac{\pi(1 - M_{\max}^2)}{M^2 \rho L} (p_\infty - p)$$

Introduisons alors une variable d'espace à l'échelle acoustique, $\xi = Mx$, et supposons que la variable de pression s'écrive :

$$p(x, t, M) = \sum_{n=0}^N M^n p^{(n)}(x, \xi, t) + o(M^N), \quad N = 0, 1, 2$$

avec des développements similaires pour la masse volumique ϱ et la vitesse v (cf. Réf. [1]). En substituant ces développements dans les expressions adimensionnelles obtenues ci-dessus et en identifiant les coefficients des termes de même puissance, on obtient en $x = L$:

$$\partial_x \varrho^{(0)} = 0, \quad \partial_x v^{(0)} = 0, \quad p^{(0)} = p_\infty, \quad p^{(1)} = 0$$

Ainsi, la condition de sortie non réfléchissante redonne à l'ordre zéro les conditions classiques d'imposition de la pression et d'extrapolation de la vitesse et de la masse volumique. L'annulation de $p^{(1)}$, interprétée classiquement comme la pression acoustique [1], signifie que le filtrage des ondes acoustiques à la sortie de la tuyère est vérifié à la limite asymptotique. La résolution des équations LODI pour obtenir une sortie non réfléchissante reste donc justifiée lorsque le nombre de Mach est petit devant l'unité.

3.2 Résolution semi-implicite des équations LODI

Le principe fondamental de la méthode proposée ici pour la résolution des équations LODI dans l'algorithme de correction de pression présenté Sec. 2.1, est de faire correspondre les équations LODI et les équations de conservation de la manière suivante : équation de continuité (1a) \leftrightarrow Eq. LODI (5a) ; équation de la quantité de mouvement (1b) \leftrightarrow Eq. LODI (5b) ; équation de l'énergie (1c) \leftrightarrow Eq. LODI (5c). Reprenons les étapes de l'algorithme présenté Sec. 2.1 :

1. Etape préliminaire : résolution de l'Eq. (5a) pour l'obtention de ϱ_i^{**} , (cf. Eq. (3)). Notons que les vitesses aux faces sont alors celles obtenues par interpolation AUSM à l'itération courante k .
2. Etape de prédiction : pour l'obtention de ϱ_i^* et $(\varrho v)_i^*$, résolution des Eqs. (5a) – où, cette fois, la vitesse aux faces est v^T définie en (4) – et (5b).
3. Etape de correction : résolution de l'Eq. (5c) où la pression et la vitesse intervenant dans le gradient sont calculées de manière implicite.

Notons que du fait que la méthode numérique est d'ordre deux en espace, les deux premières et les deux dernières cellules du maillage sont considérées comme extérieures à la tuyère. Sous peine d'apparition d'oscillations non physiques dans le champ de pression, la vitesse transportante v^T est calculée y compris aux faces constituant le bord de la tuyère. Par ailleurs, la préservation de la positivité du système linéaire à résoudre dans l'étape de correction nécessite la dégradation à l'ordre un des discrétisations des gradients de corrections, qu'il s'agisse de la vitesse ou de la pression.

4 Expérimentation numérique

Nous supposons que la section S de la tuyère est constante. Une onde acoustique se propageant vers sa sortie (côté droit sur les figures 1 (a) et 1 (b)) est générée par une perturbation gaussienne de la pression, de la vitesse et de la masse volumique. Cette onde est superposée à un écoulement moyen constant allant de gauche à droite sur les figures présentées. Pour cet écoulement, la pression est égale à 101 300 Pa, la masse volumique à 1,2046 kg/m³ et la vitesse à 0,30886 m/s. Le nombre de Mach est de l'ordre de $9 \cdot 10^{-4}$. La relaxation de la condition de non réflexion en sortie a été écrite sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_1 = \alpha_p K_p (p_\infty - p) \quad (6)$$

Signalons en effet que $\alpha_p = 1$ conduit à une sortie partiellement réfléchissante (résultats non présentés), ce qui n'était pas l'objectif recherché. Pour $\alpha_p = 10^3$, la réflexion est totale (Fig. 1 a), ce qui est conforme à la théorie puisque le coefficient $\alpha_p K_p$ est proportionnel à la fréquence de coupure. Lorsque $\alpha_p = 10^{-3}$, on obtient le résultat escompté, présentant une réflexion acoustique très faible (Fig. 1 b).

5 Conclusion

La méthode numérique présentée est une méthode semi-implicite de correction de pression qui permet la simulation de la propagation d'ondes acoustiques dans un écoulement à bas nombre de Mach. Le couplage pression-vitesse qu'elle introduit permet d'éviter le problème de découplage en damier à l'intérieur du domaine de calcul. L'obtention de conditions aux limites non réfléchissantes basées sur les caractéristiques est obtenue par une résolution semi-implicite des équations LODI. La possibilité de s'affranchir de la limite imposée par la condition CFL acoustique est ainsi garantie. Cela provient du fait que la vitesse et la pression sont calculées de façon implicite dans les cellules du bord du domaine de calcul. La manière la plus appropriée de construire la vitesse transportante pour obtenir des simulations acoustiques de qualité sera l'objet du prochain travail.

Références

- [1] Klein R. : Semi-Implicit Extension of a Godunov-Type Scheme Based on Low Mach Number Asymptotics I : One-Dimensional Flow. *J. Comp. Phys.*, **121**, 213–237 (1995)
- [2] Liou M.-S. : A Sequel to AUSM : AUSM⁺. *J. Comp. Phys.* **129**, 364–382 (1996)

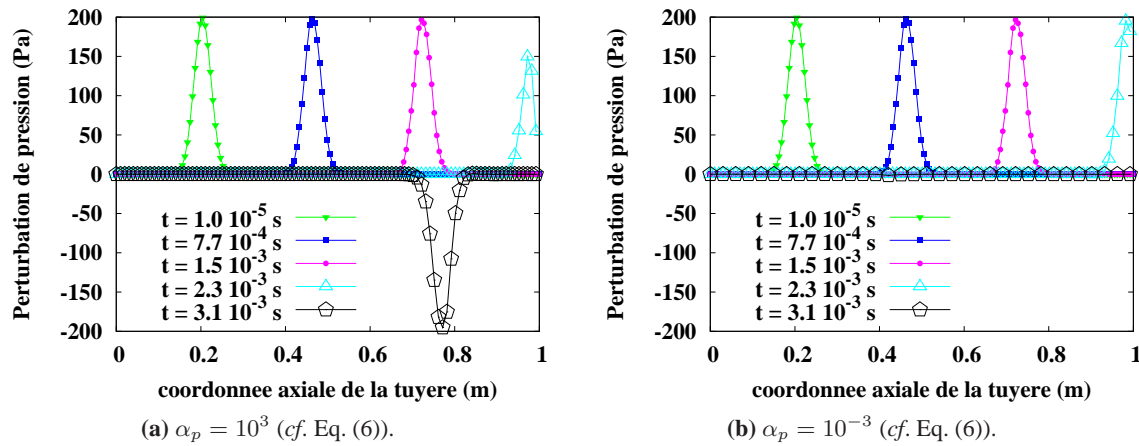


FIGURE 1 – Distribution de pression (Pa) le long de la tuyère au cours du temps. $\epsilon = 0, 1$ (cf. Eqs. (3)-(4)); nombre de cellules : 500 ; $CFL_v = \tau v = 5 \cdot 10^{-4}$.

- [3] Moguen Y., Kousksou T., Dick E. et Bruel P. : On the Role of Numerical Dissipation in Unsteady Low Mach Number Flow Computations. *Proceedings of the Sixth International Conference on Computational Fluid Dynamics*. Springer (2011). A paraître.
- [4] Poinsot T.J. et Lele S.K. : Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flow. *J. Comp. Phys.* **101**, 104–129 (1992)
- [5] Rhie C.M. et Chow W.L. : Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation. *AIAA J.* **21**(11), 1525–1532 (1983)
- [6] Selle L., Nicoud F. et Poinsot T. : Actual Impedance of Nonreflecting Boundary Conditions : Implications for Computation of Resonators. *AIAA J.* **42**(5), 958–964 (2004)
- [7] Shen W.Z., Michelsen J.A. et Sørensen J.N. : Improved Rhie-Chow Interpolation for Unsteady Flow Computations. *AIAA J.* **39**(12), 2406–2409 (2001)
- [8] Thompson K.W. : Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems. *J. Comp. Phys.* **68**, 1–24 (1987)
- [9] Wall C., Pierce C.D. et Moin P. : A Semi-implicit Method for Resolution of Acoustic Waves. *J. Comp. Phys.* **181**, 545–563 (2002)