



**HAL**  
open science

# Réponse dynamique non-linéaire sous excitations multi-fréquentielles en présence d'incertitudes-Application à un rotor excité par son support

Jérôme Didier, Jean-Jacques Sinou, Béatrice Faverjon

► **To cite this version:**

Jérôme Didier, Jean-Jacques Sinou, Béatrice Faverjon. Réponse dynamique non-linéaire sous excitations multi-fréquentielles en présence d'incertitudes-Application à un rotor excité par son support. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. hal-03421173

**HAL Id: hal-03421173**

**<https://hal.science/hal-03421173>**

Submitted on 9 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Réponse dynamique non-linéaire sous excitations multi-fréquentielles en présence d'incertitudes – Application à un rotor excité par son support

J. Didier<sup>a</sup>, J-J. Sinou<sup>a</sup>, B. Faverjon<sup>b</sup>

a. LTDS, UMR-CNRS 5513, Ecole Centrale de Lyon, France,  
{jerome.didier,jean-jacques.sinou}@ec-lyon.fr

b. LaMCoS, UMR-CNRS 5259, INSA Lyon, France, beatrice.faverjon@insa-lyon.fr

## Résumé :

*Dans cette étude, on s'intéresse à la réponse dynamique non-linéaire quasi-périodique de systèmes tournants soumis à des excitations multi-fréquentielles avec prise en compte des incertitudes. Afin de résoudre le problème ainsi posé, nous proposons de coupler une technique de Balance Harmonique Multi-fréquentielles (MHBM) avec une méthode de Chaos Polynomial (PCE).*

## Abstract :

*In this paper, the non linear quasi-periodic response of rotating machines with uncertainties is investigated for multiple excitation frequencies. To solve this non linear dynamics problem, it is proposed to use a Multi-Harmonic Balance Method (MHBM) with a Polynomial Chaos Expansion (PCE).*

**Mots clefs :** Rotor, Chaos Polynomial, Balance Harmonique

## 1 Introduction

Dans cette étude, on s'intéresse à la réponse dynamique non-linéaire quasi-périodique de systèmes tournants qui peuvent être soumis à différentes sources d'excitation telles que le balourd d'un disque, la vibration du support du système ou la présence de défauts. De plus l'identification des différents paramètres de ces sources d'excitation peut s'avérer relativement difficile à effectuer de façon précise, par conséquent ces paramètres peuvent être considérés comme étant aléatoires. Afin de résoudre ce problème de dynamique non-linéaire avec incertitudes et soumis à des excitations multi-fréquentielles, nous proposons de coupler une technique de Balance Harmonique Multi-fréquentielles (MHBM) avec une méthode de Chaos Polynomial (PCE).

La méthode MHBM consiste à exprimer la réponse non-linéaire quasi-périodique en séries de Fourier multiples [1] associées à un domaine temporel bidimensionnel. Dans le cadre de l'étude, elle permet la prise en compte à la fois des excitations harmoniques multiples non commensurables entre elles, super-harmoniques et des non-linéarités introduites par les différents défauts.

Pour modéliser le problème dans le domaine stochastique on utilise la méthode du Chaos Polynomial [3]. Cette dernière consiste à exprimer la réponse dynamique sur une base de polynômes d'Hermite. Dans cette étude les incertitudes portent tout aussi bien sur les termes de raideur, d'amortissement, gyroscopique et de masse que sur les termes non-linéaires.

Afin d'illustrer l'efficacité de la méthodologie mise en place, les résultats sont comparés à ceux obtenus par des simulations de Monte Carlo (MCS), réalisés pour un système rotor soumis à des excitations multiples présentant plusieurs types d'incertitudes. La présence d'incertitudes sur les efforts d'excitation ainsi que sur les caractéristiques matériaux et géométriques du système est examinée. Tout d'abord on considère une incertitude sur l'amplitude de l'effort généré par un défaut de type balourd

sur un disque, cet effort étant modélisé par une force tournante agissant à la vitesse de rotation du rotor. On considère ensuite une assymétrie provenant de la géométrie de l'arbre (dissymétrie de la section de l'arbre) engendrant une non-linéarité de type raideur paramétrique [4]. Dans ce cas la profondeur de la dissymétrie est considérée aléatoire. Le module d'Young de l'arbre du rotor sera aussi traité comme une variable aléatoire. La dernière source d'incertitude étudiée provient de l'excitation par la base du système [2] pour laquelle on suppose que son amplitude est aléatoire.

Les résultats obtenus permettent de tracer l'évolution des réponses FRFs en fonction des deux fréquences d'excitation. On remarque alors que les modes directs et rétrogrades peuvent être excités, et que l'apparition de certains modes est directement liée à la présence de la dissymétrie [6]. En choisissant de s'intéresser à la réponse dynamique non-linéaire du rotor pour une fréquence fixée, il est alors possible de tracer les réponses FRFs aléatoires des différents ordres ainsi que les orbites aléatoires pour différentes fréquences de rotation.

## 2 Modèle du rotor

### 2.1 Mise en équation

Le modèle étudié est un système rotor constitué d'un arbre et de deux disques. L'arbre est discrétisé en 10 éléments finis poutre de type Euler avec 4 degrés de liberté à chaque noeud, avec une section asymétrique sur les éléments 3, 4 et 5 et une section circulaire sur les autres éléments. Le système ainsi constitué est supporté à ses extrémités par deux roulements.

Après assemblage des éléments de l'arbre, des disques et des paliers, l'équation de mouvement du système est donnée par

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{C} + \omega_r \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_b)\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (1)$$

avec  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{G}$  les matrices de masse et gyroscopique,  $\mathbf{K}_s$  et  $\mathbf{K}_b$  respectivement les matrices de raideur de l'arbre et des paliers.  $\mathbf{C}$  est la matrice d'amortissement de l'arbre.  $\mathbf{f}$  correspond aux efforts appliqués sur le système incluant les effets de la gravité, le balourd et les efforts générés par les défauts.  $\ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  et  $\mathbf{x}$  sont l'accélération, la vitesse et le déplacement des degrés de liberté du rotor.  $\omega_r$  la vitesse de rotation de l'arbre.

### 2.2 Modélisation des défauts

#### 2.2.1 Balourd

Le balourd provient d'un défaut d'équilibrage sur les disques. Ce dernier peut alors se modéliser comme l'ajout sur le disque d'une masse  $m_e$  excentrée d'une distance  $d_e$  par rapport à l'axe de rotation. Par conséquent cette masse génère un effort tournant défini, pour les degrés de liberté du disque  $[v \ w \ \theta \ \psi]^T$  par  $\mathbf{f}^d = [m_e d_e \omega_r^2 \cos(\omega_r t) \ m_e d_e \omega_r^2 \sin(\omega_r t) \ 0 \ 0]^T$ .

#### 2.2.2 Dissymétrie

Une dissymétrie de section au niveau d'un élément de l'arbre est prise en compte. La géométrie retenue est une géométrie circulaire pour laquelle on ajoute deux méplats de part et d'autre de l'axe de l'arbre. La profondeur de chaque méplat étant noté  $h$ . Par conséquent cette section possède des moments d'inertie principaux différents dans le repère tournant que l'on notera  $I_X$  et  $I_X$ . En utilisant les développements proposés par Oncescu dans [5], on montre que pour un élément dissymétrique les matrices élémentaires de masse, de raideur et gyroscopique peuvent s'exprimer dans le repère fixe sous la forme

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{M}\mathbf{t}_0^e + \mathbf{M}\mathbf{r}_0^e + \mathbf{M}_c^e \cos(2\omega_r t) + \mathbf{M}_s^e \sin(2\omega_r t) \quad (2)$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_0^e + \mathbf{K}_c^e \cos(2\omega_r t) + \mathbf{K}_s^e \sin(2\omega_r t) \quad (3)$$

$$\mathbf{G}^e = \mathbf{G}_0^e \quad (4)$$

Les expressions de  $\mathbf{M}\mathbf{t}_0^e$ ,  $\mathbf{M}\mathbf{r}_0^e$ ,  $\mathbf{M}_c^e$ ,  $\mathbf{M}_s^e$ ,  $\mathbf{K}_0^e$ ,  $\mathbf{K}_c^e$ ,  $\mathbf{K}_s^e$  et  $\mathbf{G}_0^e$  peuvent être aisément calculées à partir des expressions données dans [5].

### 2.2.3 Excitation par le support

On suppose ici que le support du système vibre suivant la direction  $y$  à une pulsation  $\omega_b$  au niveau d'un des deux roulements. Par conséquent ce défaut peut se modéliser comme un effort agissant au niveau de l'extrémité de l'arbre et définit par la relation suivante  $\mathbf{f}^b = [0 \quad k_{yy}U_0 \cos(\omega_b t) \quad 0 \quad 0]^T$  avec  $k_{yy}$  la raideur du palier suivant la direction  $y$  et  $U_0$  l'amplitude de la vibration du support.

## 3 Balance Harmonique multi-fréquentielles et Chaos Polynomial

### 3.1 Déterministe

Du fait de la présence de défauts et d'une excitation par le support, le système rotor est soumis à des excitations périodiques. Par conséquent la réponse dynamique non-linéaire ainsi que l'excitation peuvent être exprimées à l'aide de séries de Fourier multiples [1].

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} (\mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} t) + \mathbf{B}_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} t)), \quad \mathbf{f}(t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^p} (\mathbf{S}_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} t) + \mathbf{T}_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} t)) \quad (5)$$

avec  $p$  le nombre de fréquences incommensurables considérées,  $\boldsymbol{\omega}$  le vecteur des fréquences définit par  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p]$  et  $\mathbf{k}$  le vecteur contenant les numéros des harmoniques définit par  $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_p]$  avec  $k_i = -N_h, -N_h + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N_h - 1, N_h$  pour  $i = 1, \dots, p$  et  $\sum_{i=1}^p |k_i| \leq N_h$  où  $N_h$  est l'ordre de la série de Fourier. Dans ce papier l'excitation considérée possède deux fréquences incommensurables  $\omega_r$  et  $\omega_b$ , par conséquent  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_r, \omega_b]$  et  $\mathbf{k} = [k_1, k_2]$ . On notera  $m$  la dimension de la base bidimensionnelle ainsi formée.

En substituant les expressions (5) dans l'équation de mouvement du système complet (1), l'expression ainsi obtenue peut être mise sous la forme d'un système linéaire de dimension  $(2m + 1)n_{ddl}$  avec  $n_{ddl}$  le nombre de degrés de liberté :  $\mathbf{L}\mathbf{X} = \mathbf{f}$  avec  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{f}$  définis par

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 \quad (6)$$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{A}_{00} \quad \mathbf{A}_{01} \quad \mathbf{B}_{01} \quad \dots \quad \mathbf{A}_{N_h 0} \quad \mathbf{B}_{N_h 0}]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{f} = [\mathbf{S}_{00} \quad \mathbf{S}_{01} \quad \mathbf{T}_{01} \quad \dots \quad \mathbf{S}_{N_h 0} \quad \mathbf{T}_{N_h 0}]^T \quad (8)$$

où  $\mathbf{I}_1$  correspond à la réécriture des termes constants sous forme d'un système linéaire,  $\mathbf{I}_2$  correspond aux termes paramétriques en raideur et  $\mathbf{I}_3$  correspond aux termes paramétriques en masse.

### 3.2 Incertitudes

Pour chaque paramètre aléatoire considéré, un développement de Karhunen-Loeve [3] a été effectué, conduisant ainsi à une modélisation à l'aide de variables aléatoires gaussiennes. Pour la masse du balourd on a alors la relation  $\tilde{m}_e(\tau) = \bar{m}_e(1 + \delta_m \xi_1)$ , pour le module d'Young la relation  $\tilde{E}(\tau) = \bar{E}(1 + \delta_E \xi_2)$ , pour la profondeur de la dissymétrie  $\tilde{h}(\tau) = \bar{h}(1 + \delta_h \xi_3)$  et enfin pour l'amplitude de la vibration du support on a  $\tilde{U}_0(\tau) = \bar{U}_0(1 + \delta_{U_0} \xi_4)$ . Dans toutes ces expressions la notation  $\bar{a}$  désigne la moyenne de la quantité  $a$ ,  $\delta_a$  son coefficient de variation.

Les modélisations ainsi obtenues sont injectées dans les expressions des matrices de raideur, de masse et d'amortissement ainsi que dans les expressions des efforts. Après développement de ces matrices et de ces efforts, ces derniers peuvent être exprimés sur une base du chaos. Par conséquent les quantités  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{f}$  sont aussi des quantités aléatoires et peuvent être réécrites sur la base du chaos sous la forme  $\tilde{\mathbf{L}}(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{L}_i \Psi_i(\underline{\xi}(\tau))$  et  $\tilde{\mathbf{f}}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{f}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau))$ . Ainsi la réponse non-linéaire  $\tilde{\mathbf{X}}(\tau)$  est aussi aléatoire et peut être exprimée sur la base du chaos. Ce qui conduit alors à résoudre le système suivant

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{L}_i \Psi_i(\underline{\xi}(\tau)) \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{X}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)) \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{f}_j \Psi_j(\underline{\xi}(\tau)) \quad (9)$$

qui après projection sur le sous-espace  $\{\Psi_k\}_{k=0}^{\infty}$  et troncature à l'ordre  $P$  ( $P$  le nombre de polynômes d'Hermite) peut être mis sous la forme d'un système linéaire  $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{f}}$  ayant pour composantes

$$\hat{\mathbf{L}}_{jk} = \sum_{i=0}^P E\{\Psi_i\Psi_j\Psi_k\}\mathbf{L}_i \quad j, k = 0, \dots, P \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{X}} = [\mathbf{X}_0 \quad \dots \quad \mathbf{X}_P]^T, \quad \hat{\mathbf{f}} = [\mathbf{f}_0 E\{\Psi_0^2\} \quad \dots \quad \mathbf{f}_P E\{\Psi_P^2\}]^T \quad (11)$$

## 4 Résultats

La réponse dynamique obtenue par le Chaos Polynomial étant exprimée sur une base de polynômes d'Hermite, on propose d'effectuer des tirages sur ces polynômes en utilisant une méthode de Monte Carlo. Ces résultats sont comparés à une méthode de Monte Carlo classique, il est à noter que pour les deux méthodes on utilise les mêmes tirages. Il a été choisi de présenter deux cas, tout d'abord le Cas n°1 avec  $\delta_E = 5\%$  et  $\delta_{U_0} = 5\%$  ensuite le Cas n°2 avec  $\delta_E = 5\%$ ,  $\delta_{U_0} = 5\%$ ,  $\delta_m = 5\%$  et  $\delta_h = 5\%$ . Pour ces deux cas, l'ordre du chaos est égal à 2.

### 4.1 Fonctions de Réponse en Fréquence

Les résultats présentés dans la Figure 1 montrent l'évolution de la moyenne et du coefficient de variation de l'amplitude obtenue au niveau du noeud 6 dans la direction x par la méthode du chaos polynomial. On remarque une forte dispersion au niveau des modes directs et rétrogrades ainsi qu'au niveau des modes générés par la présence de la dissymétrie.

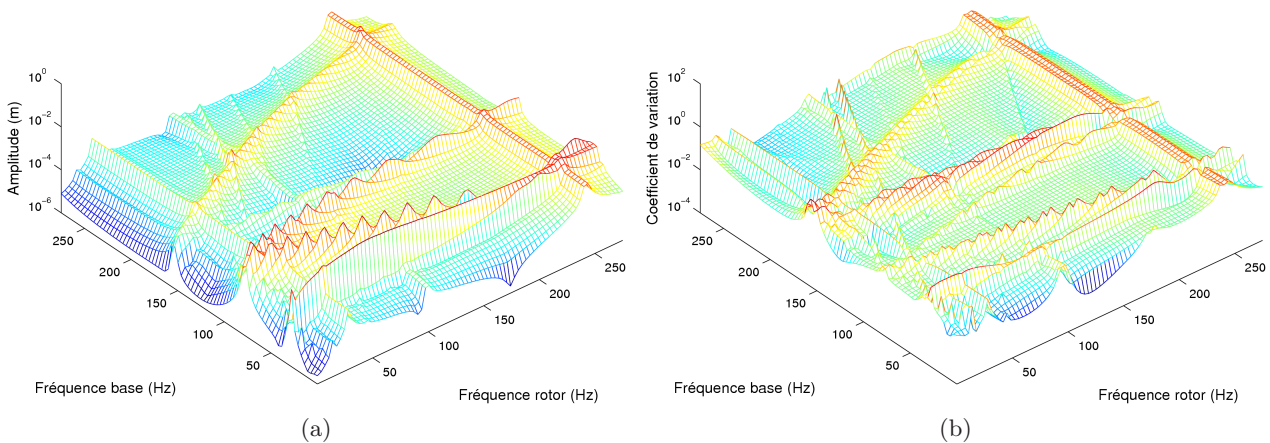


FIG. 1: Fonctions de Réponse en Fréquence (Cas 1) : (a) Moyenne PCE; (b) Coefficient de variation PCE.

Afin de mieux visualiser les résultats, on propose de s'intéresser à la réponse du système pour une fréquence d'excitation fixe. Il est à noter que seuls les harmoniques non nuls sont présentés dans la Figure 2. On remarque que l'enveloppe construite par l'approche PCE encadre la plupart des résultats issus des tirages de Monte-Carlo, validant ainsi la méthode PCE. Du fait de la présence d'une incertitude sur le module d'Young, on note une dispersion des résultats pour tous les ordres avec toutefois une dispersion légèrement plus importante sur les ordres  $[0 \ 1]$ ,  $[2 \ 1]$  et  $[2 \ -1]$  s'expliquant par l'incertitude sur l'amplitude d'excitation de la base.

### 4.2 Orbites

Les deux fréquences de la réponse étant incommensurables entre elles, le tracé des orbites ne peut être complet et sera donc effectué sur une plage temporelle choisie. La Figure 3 présente les orbites

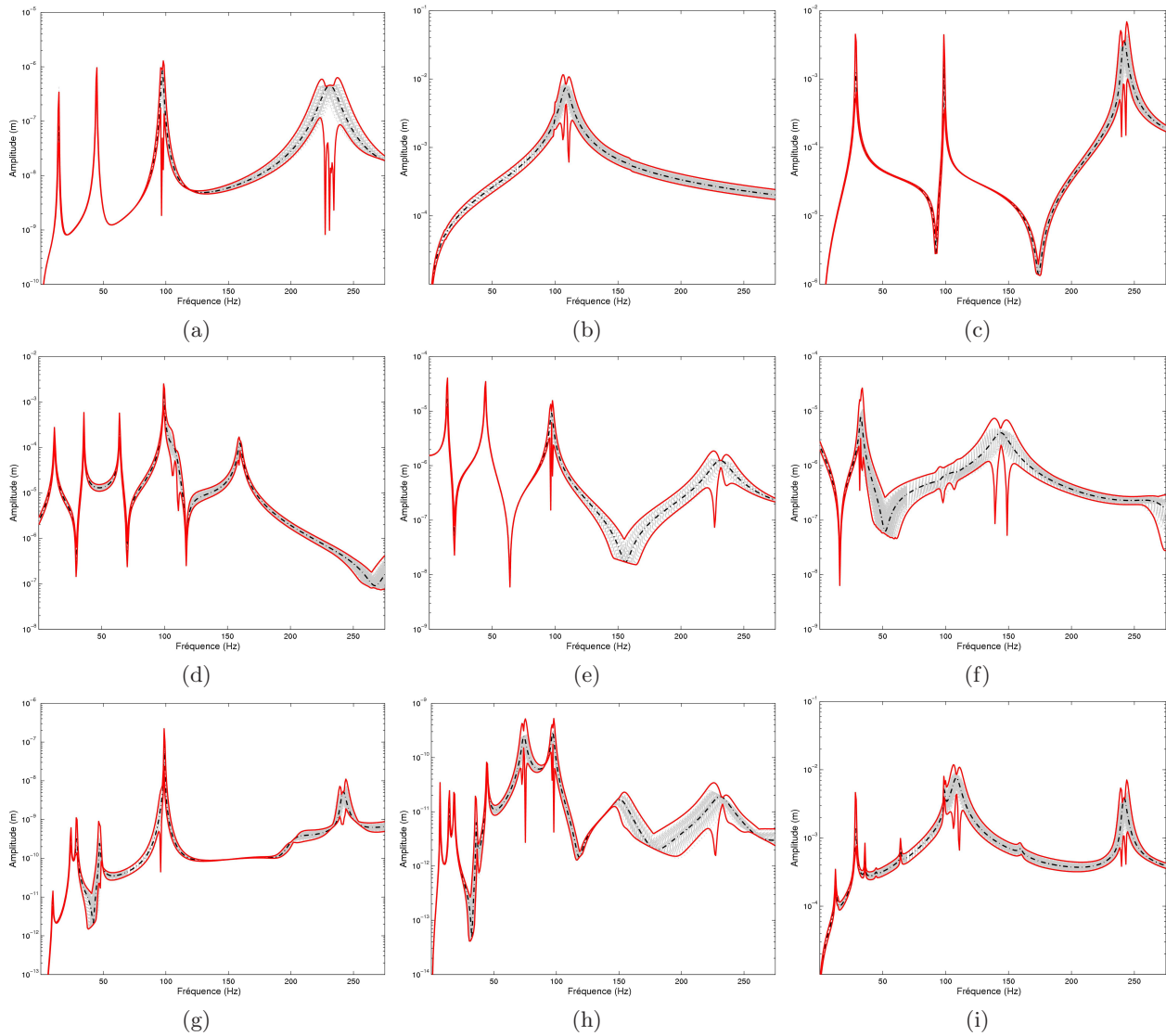


FIG. 2: Fonctions de Réponse en Fréquences (Cas 1); Enveloppe PCE (trait continu rouge); MCS (trait pointillé gris); Déterministe (trait mixte noir); Réponses par ordre  $[k_1, k_2]$  (a)  $[0,0]$ ; (b)  $[0,1]$ ; (c)  $[1,0]$ ; (d)  $[2,-1]$ ; (e)  $[2,0]$ ; (f)  $[2,1]$ ; (g)  $[3,0]$ ; (h)  $[4,0]$ ; (i) réponse non-linéaire globale.

obtenues pour le cas 2 à une fréquence d'excitation de la base de 100Hz et une fréquence de rotation du rotor de 12.5Hz. On observe que l'enveloppe issue du chaos et les tirages de Monte-Carlo sont relativement similaires.

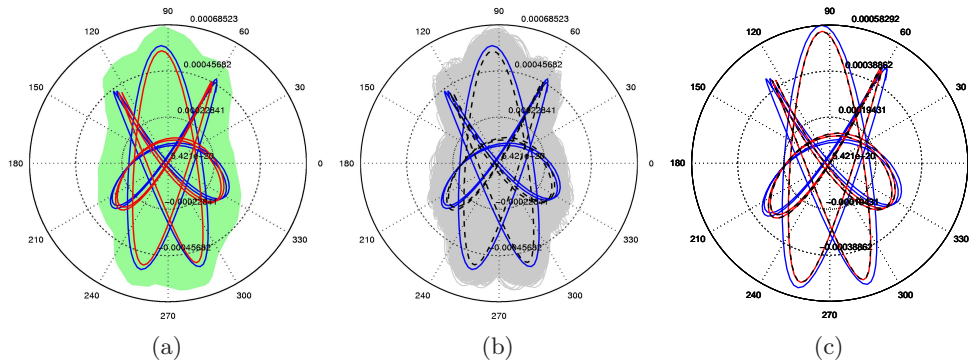


FIG. 3: Cas 2; (a,b,c) Orbites à  $f_r = 12.5\text{Hz}$  et  $f_b = 100\text{Hz}$ ; enveloppe PCE (vert); MCS (gris); Déterministe (trait bleu), Moyenne PCE (trait rouge), Moyenne MCS (trait pointillé noir)

## 5 Conclusion

Cette étude décrit le couplage d'une technique de Balance Harmonique Multi-fréquentielles (MHBM) avec une méthode de Chaos Polynomial (PCE). Cette méthode a été testée sur un exemple numérique de système tournant excité à sa base et possédant plusieurs paramètres aléatoires. Les résultats obtenus ont été comparés aux résultats estimés par une méthode de Monte-Carlo classique. Cette comparaison a ainsi permis de vérifier la validité de la méthode.

Ces résultats montrent que la présence d'incertitudes influe très nettement sur la réponse dynamique non-linéaire quasi-périodique, confirmant ainsi la nécessité de prendre en compte ces phénomènes aléatoires lors d'une phase de dimensionnement.

## 6 Remerciements

Le premier auteur remercie le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche pour le soutien de cette recherche. Les auteurs remercient également l'Agence Nationale de la Recherche pour son soutien financier au travers du programme Jeune Chercheur ANR-07-JCJC-0059-01-CSD2.

## Références

- [1] Coudeyras N., Nacivet S., and Sinou J.-J. Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal. *Journal of Sound and Vibration*, 328(4-5) :520–540, December 2009.
- [2] Duchemin M., Berlioz A., and Ferraris G. Dynamic behavior and stability of a rotor under base excitation. *Journal of Vibration and Acoustics*, 128(5) :576, 2006.
- [3] Ghanem R. and Spanos P. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991.
- [4] Lalanne M. and Ferraris G. *Rotordynamics-Prediction in Engineering*. John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [5] Onescu F., Lakis A.A., and Ostiguy G. Investigation of the stability and steady state response of asymmetric rotors, using finite element formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 245(2) :303–328, August 2001.
- [6] Yamamoto T. and Ishida Y. *Linear and nonlinear rotordynamics. A modern treatment with applications*. John Wiley & Sons, 2001.