



**HAL**  
open science

# Convection de Bénard-Marangoni induite par un flux pariétal non-uniforme en récipient cylindrique

Rachid Es Sakhi, Kamal El Omari, Serge Blancher, Yves Le Guer

## ► To cite this version:

Rachid Es Sakhi, Kamal El Omari, Serge Blancher, Yves Le Guer. Convection de Bénard-Marangoni induite par un flux pariétal non-uniforme en récipient cylindrique. CFM 2011 - 20ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2011, Besançon, France. <hal-03421141>

**HAL Id: hal-03421141**

**<https://hal.science/hal-03421141v1>**

Submitted on 9 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Convection de Bénard-Marangoni induite par un flux pariétal non-uniforme en récipient cylindrique

R. ES SAKHY<sup>1</sup>, K. EL OMARI<sup>1</sup>, S. BLANCHER<sup>1</sup>, Y. LE GUER<sup>1</sup>

1. *Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur Appliquées à la Mécanique et au génie Electrique (SIAME), EA 4581, Fédération IPRA CNRS-Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA), Bât. d'Alembert, rue Jules Ferry, 64075 Pau Cedex, France.*

## Résumé :

*Le travail numérique présenté concerne l'étude des écoulements convectifs de Bénard-Marangoni au sein d'un récipient cylindrique doté d'un fond en substrat solide. Les équations de Navier-Stokes et de l'énergie sont résolues en 3D par une méthode de volumes finis. On considère le transfert de chaleur conjugué solide-fluide. Des morphologies originales de cellules (type et nombre) sont observées, elles dépendent des conditions géométriques, des nombres adimensionnels de Prandtl, de Rayleigh et de Marangoni ainsi que du rapport des conductivités substrat solide et fluide.*

## Abstract :

*The numerical work presented concerns the study of Marangoni Bénard convective flow in a cylindrical container with a bottom in conductive substrat. The Navier-Stokes and energy equations are solved by a 3D finite volume method. We consider the conjugate heat transfer fluid-solid. Original morphologies of cells (type and number) are observed which depend on geometry, dimensionless numbers Prandtl, Rayleigh and Marangoni and the ratio of solid-fluid conductivities.*

**Mots clefs :** convection Bénard-Marangoni ; récipient cylindrique ; transfert conjugué

## Nomenclature

$Bi$	nombre de Biot, $Bi = \frac{he}{k_f}$	$p$	pression, Pa
$h$	coefficient d'échange thermique, $W m^{-2}K^{-1}$	$\Gamma$	rapport d'aspect
$k$	conductivité thermique, $Wm^{-1}K^{-1}$	$\gamma$	tension de surface, $N m^{-1}$
$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2s^{-1}$	$\mu$	viscosité dynamique, $kg m^{-1}s^{-1}$
$Ma$	nombre de Marangoni, $Ma = \frac{\epsilon\Delta T}{\mu\alpha} \frac{\partial\gamma}{\partial T}$	$\beta$	coefficient de dilatation thermique, $K^{-1}$
$Pr$	nombre de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$	$\nu$	viscosité cinématique, $m^2s^{-1}$
$Ra$	nombre de Rayleigh, $Ra = g\beta\Delta Te^3/\nu\alpha$	$\Delta T$	écart de température, K
$\theta$	température réduite, $\theta = (T - T_0)/\Delta T$	$T_0$	température ambiante, K

## 1 Introduction

Les écoulements convectifs dans une couche horizontale de fluide à surface supérieure libre, initialement au repos et soumise à un gradient de température peuvent être produits soit par les forces de flottabilité, soit par une variation de la tension superficielle en fonction de la température ou par ces deux effets conjugués. Dans la littérature ces phénomènes sont désignés comme instabilités de Rayleigh-Bénard-Marangoni. Des études expérimentales sur la convection de Bénard-Marangoni ont été entreprises pour comprendre les mécanismes responsables de ces phénomènes d'instabilité. Koshmeider et al. [1] ont par exemple mis en évidence l'influence de la géométrie du récipient ainsi que le rapport de forme du récipient sur le nombre des cellules convectives obtenues et leurs formes, Rahal et al. [2] ont eux étudié l'influence des nombres de Biot et de Prandtl sur la convection de Bénard-Marangoni dans des petits récipients cylindriques. D'autres travaux numériques ont été élaborés pour étudier ces phénomènes, on

citera à titre d'exemples les travaux de Médale et al. [3] et ceux de Kuhlmann et al. [4]. Pour toutes ces études, plusieurs facteurs tels que la géométrie des cavités et les propriétés physiques du fluide influent sur les motifs des écoulements convectifs et leur distribution.

L'objectif de ce travail est de simuler la convection de Bénard-Marangoni dans des récipients cylindriques chauffés par un flux non-uniforme pour différents nombres de Rayleigh et de Prandtl.

## 2 Modèle physique et formulation mathématique

On considère un fluide newtonien incompressible contenu dans un récipient cylindrique ouvert, de rapport de forme  $\Gamma = R/e$ . Les parois latérales sont isolées thermiquement, la surface supérieure est libre et un flux thermique uniforme, de densité  $\dot{q}$ , est imposé sur la partie centrale de la face inférieure comme le montre la figure 1. La conduction thermique dans le substrat solide crée un profil en cloche pour la température. Ce profil est représenté sur la figure 2 suivant un diamètre sur la surface inférieure du fluide. Les forces thermocapillaires donnent naissance à des cellules convectives. La forme de ces cellules dépend des conditions géométriques (rapport de forme) et thermiques ainsi que des nombres de Prandtl, Rayleigh, Biot et Marangoni.

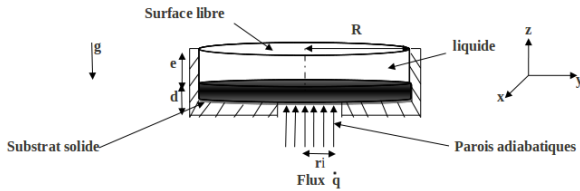


FIGURE 1 – Schéma du dispositif modélisé physiquement ( $e=0,2\text{m}$  et  $d=0,05\text{m}$ ).

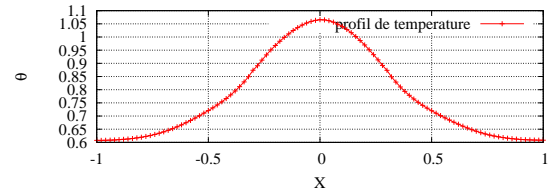


FIGURE 2 – Profil de la température suivant un diamètre pris sur l'interface solide/liquide.

Les équations régissant l'écoulement sont les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Ces équations sont résolues de la même façon dans les deux domaines fluide ou solide, pour la partie solide on a considéré une viscosité très grande pour avoir un champ de vitesse nul. Pour une formulation plus simple du problème, nous allons considérer quelques approximations. Nous supposons que la surface est maintenue plane et que l'épaisseur de la couche fluide reste constante. Il s'agira alors de déterminer la répartition des vitesses et de la température dans le fluide. L'écoulement de convection de Bénard-Marangoni est provoqué par les forces thermocapillaires. On suppose que les propriétés physiques du fluide sont constantes sauf pour la masse volumique dont la variation au sein du fluide est prise en compte via l'approximation de Boussinesq et pour la tension superficielle qui dépend de la température.

Les relations suivantes sont considérées :

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)] \quad (1)$$

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial T} T \quad (2)$$

avec  $\rho_0 = \rho(T_0)$  et  $\gamma_0 = \gamma(T_0)$ .

Les grandeurs caractéristiques utilisées pour adimensionnaliser le problème sont l'épaisseur du film  $e$ , la vitesse de diffusion thermique  $\alpha/e$ , le temps de diffusion  $e^2/\alpha$  et l'écart de température  $\Delta T = \frac{\dot{q}e}{k_f}$ .

Le modèle mathématique s'écrit après adimensionnalisation comme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{V}) = -\vec{\nabla} p + RaPr\theta\vec{j} + Pr\Delta\vec{V} \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V}\theta) = \Delta\theta \quad (5)$$

Le fluide est initialement au repos à la température ambiante  $T_0$ . Les vitesses sont nulles le long des parois solides latérales et aux fond du liquide (parois non glissantes). Les conditions aux limites obtenues à l'interface solide/liquide sont :

$$\frac{k_s}{k_f} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0^-} = \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0^+} \quad (6)$$

$$V_x = V_y = V_z = 0 \quad (7)$$

L'origine du repère est prise au niveau de l'interface solide/liquide, la condition cinématique à la surface libre doit satisfaire l'équilibre mécanique et en tenant compte de l'imperméabilité de la surface libre on obtient :

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} + Ma \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial z} + Ma \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

$$V_z = 0 \quad (10)$$

La condition thermique sur la partie centrale de la paroi du fond soumise à un flux  $\dot{q}$ , s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$\frac{k_s}{k_f} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 1 \text{ pour } x^2 + y^2 \leq \left(\frac{r_i}{R}\right)^2 = (0.3)^2 \text{ (} r_i = 0.3R \text{)}. \quad (11)$$

La condition thermique sur la surface libre s'écrit sous forme dimensionnelle :

$$-k_f \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) = h(T(x, y, e, t) - T_0) \quad (12)$$

où  $h(T(x, y, e, t) - T_0)$  désigne l'échange convectif entre la surface libre et le milieu ambiant. Cette condition aux limites s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} + Bi\theta = 0 \quad (13)$$

L'énergie cinétique et le nombre de Nusselt moyen sont calculés de la façon suivante :

$$E_C = \frac{1}{2v} \iiint_v V^2 dv \quad (14)$$

$$Nu_{moy} = \frac{1}{s} \iint_s \theta_s ds \quad (15)$$

Avec  $v$  est le volume du domaine fluide,  $s$  est la surface inférieure de la couche fluide et  $\theta_s$  est la température de cette surface.

### 3 Modélisation Numérique

Pour modéliser la convection de Bénard-Marangoni nous avons implémenté les différentes conditions aux limites dans le code Tamaris développé au laboratoire SIAME [5, 6]. La discrétisation numérique utilise la méthode des volumes finis tridimensionnels (3D) à maillage hybride. Le même code peut traiter des cas 2D en considérant une seule couche prismatique de cellules de calcul. Les valeurs de toutes les variables (vitesses, pression et température) sont prises au centre des cellules. Les schémas de discrétisation spatiale sont du second ordre de précision. Pour les flux diffusifs un schéma centré est utilisé avec une correction de la non orthogonalité du maillage. Les flux convectifs sont traités par le schéma non linéaire haute résolution CUBISTA [7]. Ce schéma issu d'une approche NVD (Normalised

Variable Diagram) introduit une quantité minimale de diffusion numérique tout en étant strictement borné. Le couplage vitesse-pression est assuré par l'algorithme SIMPLE [8] et le calcul est avancé dans le temps par le schéma implicite de Gear à trois pas de temps et du second ordre de précision. Les systèmes linéaires obtenus sont résolus par l'algorithme GMRES préconditionné par une décomposition ILU. Plusieurs études de validation du code dans différentes situations ont été menées [6, 9], une validation supplémentaire pour le cas de la convection de Marangoni en cavité 2D étudié par Kuhlmann et al. [10] a été réalisée avec succès.

## 4 Résultats

Dans le cas de la convection de Bénard-Marangoni plusieurs paramètres peuvent gouverner l'écoulement convectif au sein de la cavité. Nous nous limitons dans le cadre de cette étude aux effets des nombres de Rayleigh  $Ra$  et de Prandtl  $Pr$ , ainsi durant toutes les simulations faites, le nombre de Biot, le nombre de Marangoni et le rapport de forme sont maintenus constants aux valeurs suivantes :  $Bi = 100$ ,  $Ma = 2000$  et  $\Gamma = 5$ .

L'application d'un flux sur une partie central du substrat solide permet de chauffer la paroi inférieure du récipient qui contient le fluide d'une façon non uniforme en fonction de la propagation de la chaleur par conduction dans le solide. Dans notre cas, nous avons choisi une conductivité du solide cent fois plus grande que celle du fluide.

Le maillage utilisé pour toutes les simulations est d'une taille de 380000 cellules.

### 4.1 Influence du nombre de Rayleigh

Dans cette section, nous allons examiner l'effet du nombre de Rayleigh sur la structure de l'écoulement et la distribution de la température. Pour des nombres de  $Ma = 2000$ ,  $Bi = 100$  et  $Pr = 100$  nous avons évalué l'influence de la variation du nombre de Rayleigh sur les formes des cellules convectives ainsi que sur leur nombre. La figures 3 montre que pour de faibles nombres de Rayleigh (entre 10 et 1000) (cf. figures 3 (a), (b) et (c)) les cellules convectives gardent la même répartition sur le domaine fluide et les mêmes valeurs maximales de la vitesse au niveau de la surface supérieure. Au contraire pour des nombres de Rayleigh élevés le nombre de cellules augmente. (cf. figure 3 (d)). Pour  $Ra = 3000$ , on remarque une deuxième série de cellules qui apparaît, celles-ci sont réparties sur la circonférence au voisinage des parois latérales du récipient. Cela est dû à l'augmentation des forces de flottabilité dans le fluide.

D'après les figures 4 et 5 on constate que les cellules convectives obtenues sont dues aux forces thermocapillaires.

L'analyse quantitative de l'effet du  $Ra$  sur le nombre de Nusselt moyen, l'énergie cinétique et l'énergie thermique est illustrée sur la figure 6. On remarque une augmentation très significative des deux grandeurs  $Nu_{moy}$  et  $E_C$  lorsque le  $Ra$  dépasse la valeur  $10^3$ , cette évolution est liée à l'augmentation sensible des niveaux de vitesse dans le fluide et à l'apparition de cellules convectives supplémentaires, comme on remarque aussi que ces grandeurs ne sont pas influencées par le nombre de Prandtl pour  $10^2 \leq Pr \leq 10^4$ .

### 4.2 Influence du nombre de Prandtl

Pour un nombre de Rayleigh fixé à 100, nous avons évalué l'influence de la variation du nombre de Prandtl (il représente le rapport entre la diffusivité de quantité de mouvement et la diffusivité thermique) sur les formes des cellules convectives ainsi que sur leur nombre. La figures 7 montre que pour de faibles nombres de Prandtl la température de la surface supérieure ainsi que le module de la vitesse sont moins importants que dans le cas de calculs faits pour un nombre de Prandtl plus élevé. Les résultats sont néanmoins superposés pour  $10^2 \leq Pr \leq 10^4$ . Aussi, le nombre de cellules convectives et leurs positions sont insensibles au nombre de Prandtl.

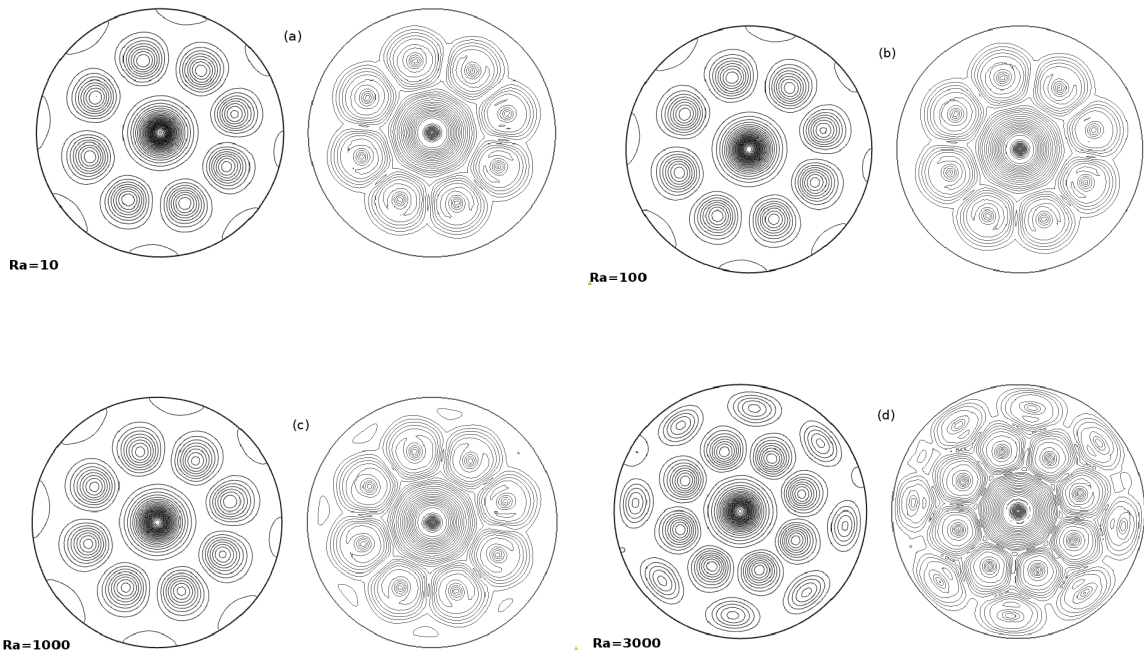


FIGURE 3 – Isothermes (gauche) et isovitesses (droite) pour différents nombres de Rayleigh, (a)  $Ra = 10$ , (b)  $Ra = 100$ , (c)  $Ra = 1000$  et (d)  $Ra = 3000$  pour  $Ma = 2000$ .

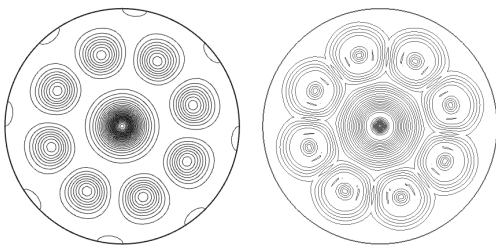


FIGURE 4 – Isothermes (gauche) et isovitesses (droite) pour  $Ma = 2000$  et  $Ra = 0$ .

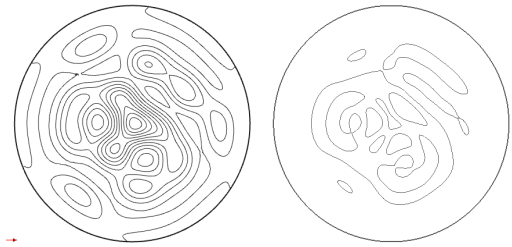


FIGURE 5 – Isothermes (gauche) et isovitesses (droite) pour  $Ra = 2000$  et  $Ma = 0$ .

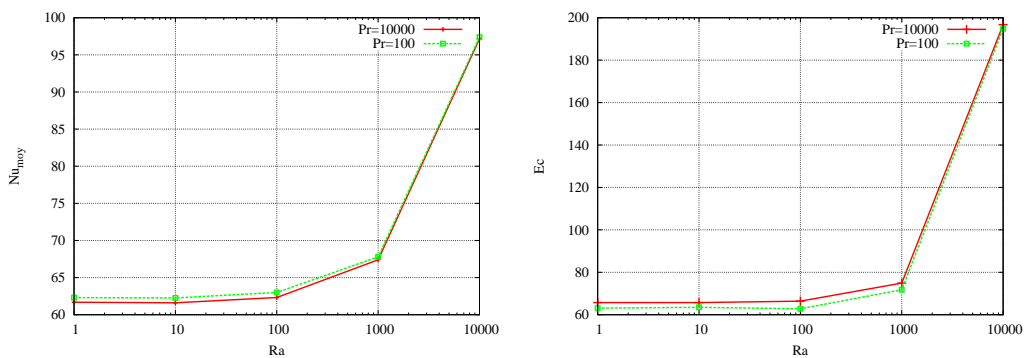


FIGURE 6 – Nusselt moyen (gauche), Energie cinétique (droite) pour différents nombres de Rayleigh et de Prandtl.

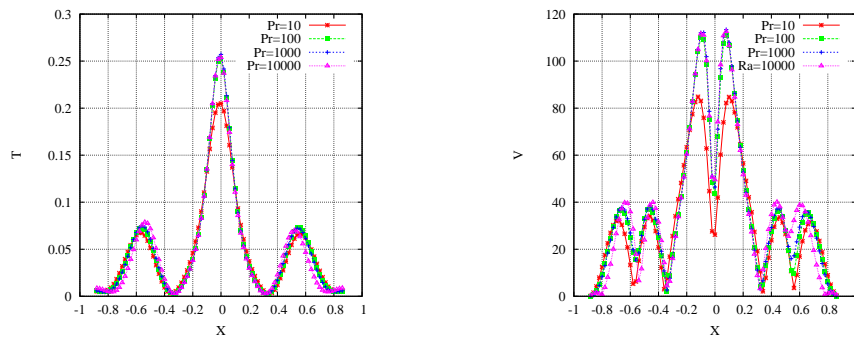


FIGURE 7 – Température (gauche) et module de vitesse (droite) à la surface supérieure pour différents nombres de Prandtl (de 10 à 10000), tracés suivant l’axe  $\bar{x}$  à la surface libre.

## 5 Conclusion

A l’aide de la simulation numérique des écoulements dans un récipient ouvert, chauffé par le bas par un flux de chaleur non uniforme, nous avons montré que les effets liés à l’augmentation du  $Ra$  ne se font ressentir qu’au delà d’un  $Ra = 10^3$ . Dans la gamme de  $Ra$  et  $Ma$  étudiés, les effets thermocapillaires sont prépondérants et responsables de la distribution des cellules convectives observées. Nous avons remarqué aussi que la nature du fluide dans la gamme de Prandtl étudiée  $10^2 \leq Pr \leq 10^4$  n’a que très peu d’influence sur l’écoulement. D’autres effets font l’objet d’études complémentaires, notamment les effets de  $Ma$ ,  $Bi$  et  $\Gamma$  ainsi que le rapport des conductivités thermiques  $\frac{k_f}{k_s}$ .

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé avec le soutien du programme PHC Volubilis de coopération Maroc-France (Action Intégrée N : MA/09/214 -Maroc, MA/09/213-France).

## Références

- [1] E . L. Koshmeider and S. A. Prahl 1990 Surface-tension-driven Bénard convection in small containers. *Journal of Fluid Mechanics* **215** 571-583
- [2] Rahal, S. and Cerisier, P. and Azuma, H. 2007 Bénard-Marangoni convection in a small circular container : influence of the Biot and Prandtl numbers on pattern dynamics and free surface deformation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **43** 547-554
- [3] Médale, M. and Cerisier, P. 2002 Numerical simulation of Bénard-Marangoni convection in small aspect ratio containers. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications* **42** 55-72
- [4] H.C. Kuhlmann, and U. Schoisswohl. 2010 Flow instabilities in thermocapillary-buoyant liquid pools. *Journal of Fluid Mechanics* **644** 509-535
- [5] El Omari, K. and Le Guer, Y. 2009 A numerical study of thermal chaotic mixing in a two rod rotating mixer. *Computational Thermal Science* **1** 55-73
- [6] El Omari, K. and Le Guer, Y. 2010 Alternate rotating walls for thermal chaotic mixing. *Int. J. of Heat and Mass Transfer* **53** 123-134
- [7] Alves, M.A. and Oliveira, P.J. and Pinho, F.T. 2003 A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* **41** 47-75
- [8] Patankar, S.V. 1980 Numerical heat transfer and fluid flow. *Taylor and Francis* 1980
- [9] El Omari, K. and Le Guer, Y. 2010 Thermal chaotic mixing of power-law fluids in a mixer with alternately rotating walls. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **165** 641-651
- [10] H.C.Kuhlmann, and S. Albensoeder 2008 Three-dimensional flow instabilities in a thermocapillary-driven cavity. *Physical Review E* **77** 36303