



HAL
open science

Le dilemme de Benacerraf

Andrea Sereni, Fabrice Pataut

► **To cite this version:**

Andrea Sereni, Fabrice Pataut. Le dilemme de Benacerraf. Précis de philosophie de la logique et des mathématiques, 2, Editions de la Sorbonne, pp.292-332, 2021, Philosophie des mathématiques. hal-03420431

HAL Id: hal-03420431

<https://hal.science/hal-03420431>

Submitted on 9 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

[*Précis de philosophie de la logique et des mathématiques*. Vol. 2 :
Philosophie des mathématiques, sous la direction de Andrew Arana et Marco
Panza. Éditions de la Sorbonne, Paris, 2021, pp. 292-332]

Résumé

Dans le chapitre 7, Andrea Sereni et Fabrice Pataut exposent le dilemme de Benacerraf, opposant tout compte rendu possible de la connaissance mathématique à la disponibilité d'une théorie de la vérité fondée sur une ontologie abstraite des objets mathématiques. Ils donnent un aperçu du dilemme originel et de sa reformulation par Hartry Field, et reconstruisent le débat auquel ce dilemme a donné lieu, en rencontrant ainsi la plupart des positions s'opposant aujourd'hui au sein de la mouvance analytique en philosophie des mathématiques, tant sur le versant du platonisme que sur celui du nominalisme.

Andrew Arana et Marco Panza [Résumés, p. vi]

Note

Les références aux chapitres données dans les notes de bas de page renvoient aux chapitres du Vol. 2 du *Précis de philosophie de la logique et des mathématiques*.

Chapitre 7

Le dilemme de Benacerraf

Andrea Sereni et Fabrice Pataut

1. Le dilemme originel

Dans un article crucial pour la philosophie des mathématiques contemporaine intitulé « La vérité mathématique », Paul Benacerraf a défendu l'idée que les philosophes font face à un dilemme : soit ils rendent compte de la connaissance mathématique, soit ils rendent compte de la vérité mathématique, mais il est jusqu'à preuve du contraire très improbable qu'ils parviennent un jour à faire les deux (Benacerraf [1973], Benacerraf [2016]). Pourquoi l'épistémologie et la sémantique sont-elles à ce point incompatibles, ou tout au moins en conflit ouvert, dans ce cas particulier ?

Parce que « [une] analyse 'standard' typique décrira les conditions de vérité en termes de conditions sur des objets dont la nature, telle qu'on la conçoit d'ordinaire, les place hors d'atteinte des capacités cognitives humaines que nous comprenons le mieux (par exemple la perception et d'autres capacités similaires). Par ailleurs, les analyses 'combinatoires' sont en règle générale motivées précisément par une sensibilité à ce fait [...]. Leur vertu tient au fait qu'elles rendent compte des propositions mathématiques en se fondant sur les procédures que nous mettons en œuvre pour justifier ce que nous pouvons considérer comme vrai dans le domaine mathématique, à savoir les preuves [...]. Il semble néanmoins qu'en comprimant le ballon à cet endroit précis, nous le fassions gonfler du côté de la vérité : plus nous ficelons minutieusement le concept de preuve, plus nous

lions notre définition de la preuve à des caractéristiques combinatoires (plutôt que sémantiques), et plus il devient difficile de la mettre en rapport avec la vérité ce qui est par là-même ‘prouvé’ — c’est du moins ce qu’il semble (Benacerraf [1973], pp. 667-668; Benacerraf [2016], p. 2 ; traduction française : F. Pataut).

Nombreux sont ceux qui s’accordent à penser qu’une connexion doit être établie entre les conditions de vérité des propositions mathématiques et quiconque possède une connaissance mathématique. Le recours à la perception, et à vrai dire à une quelconque information disponible aux connaisseurs potentiels par l’intermédiaire des sens — la vue, par exemple — s’avère particulièrement peu appropriée en ce qui concerne la possibilité de relier les objets mathématiques à la cognition humaine. L’analyse « standard » ou vérificationnelle est l’analyse platoniste selon laquelle les mathématiques s’occupent d’objets abstraits¹. Cette analyse semble à vrai dire *exclure* la possibilité même d’une connaissance mathématique dans la mesure où n’avons aucune relation causale, perceptuelle ou sensorielle, directe ou indirecte, à ce qui fait à première vue l’objet d’étude des mathématiques, par exemple les nombres, les fonctions, ou les ensembles.

Nous pourrions avoir le sentiment que, comme le fait valoir Øystein Linnebo, « les mathématiques doivent faire l’objet d’un traitement différent » (Linnebo [2006], p. 546). Celui-ci peut-être envisagé de plusieurs manières. Une possibilité est de commencer par prendre en compte la composante métaphysique du dilemme et d’argumenter qu’il n’y a pas d’objets mathématiques, abstraits ou non, de manière que la connaissance mathématique est en tout point différente des autres. Une autre est de

¹ Voir la note 4 pour une première définition d’usage. Un exposé critique détaillé est offert dans la section 5.

commencer par sa composante épistémologique et d'argumenter, soit que les propositions mathématiques ne sont pas vraies, ni *simpliciter* ni autrement, soit qu'une notion de vérité en bonne et due forme doit être contrainte par «les procédures que nous mettons en œuvre pour justifier ce que nous pouvons considérer comme vrai dans le domaine mathématique», autrement dit la notion de preuve. En ce qui concerne cette deuxième possibilité, Benacerraf fait valoir que l'analyse dite « combinatoire », qui désigne la notion de preuve comme la notion clé (une notion à la fois fidèle à la pratique mathématicienne et pertinente pour une explication de la connaissance mathématique) se prive de la relation recherchée précisément parce que les caractéristiques syntaxiques qu'elle implique séparent la preuve, ainsi conçue, de la vérité de ce qui est prouvé. Il est bien entendu essentiel au dilemme que les mathématiques ne soient *pas* traitées différemment. Dans l'hypothèse où la compatibilité recherchée est, du côté sémantique, fonction d'une parité ou d'une uniformité, le défi minimal est que la satisfaction de deux desiderata, l'un épistémologique, l'autre sémantique, n'engendre aucun conflit. Pour Benacerraf, la vérité est ni plus ni moins la vérité tarskienne, indépendante des particularités des domaines de discours. C'est dans cette mesure que « le concept de vérité mathématique doit s'intégrer dans un compte rendu général de la connaissance qui rende intelligible le fait que nous possédons réellement la connaissance mathématique que nous avons acquise » (Benacerraf, *loc. cit.*). Benacerraf reconnaît par ailleurs volontiers qu'il se permet ici de faire *comme si* nous disposions effectivement d'une sémantique « pour le reste du langage » (Benacerraf [1973], p. 667; Benacerraf [2016], p. 269).

La compatibilité de la sémantique vériconditionnelle et de l'épistémologie causale, ou l'intégration de la première dans la seconde, doit-elle revêtir une

telle importance ? Après tout, il y a dilemme que nous travaillions ou non dans l'hypothèse où nous disposons effectivement d'une sémantique tarskienne, ou d'une sémantique vériconditionnelle uniforme, pour le langage mathématique *et* le langage non mathématique. Quoiqu'il en soit de ce cas de figure particulier, et bien qu'il soit essentiel au dilemme dans sa formulation d'origine, l'épistémologie, la sémantique et l'ontologie doivent s'harmoniser au moins au sens minimal où nous devons pouvoir rendre compte de n'importe quelle vérité, mathématique ou autre, dont nous pourrions prendre connaissance, de manière qu'une explication de notre manière de l'acquérir et qu'une analyse de ce qui fait l'objet même des propositions vraies et de leurs modes de justification particuliers soient possibles. Nos revendications de connaissance, qu'elles relèvent du domaine de la physique, de l'éthique ou de la théologie, qu'elles soient en dernière analyse justifiées ou simplement supposées, sont de ce point de vue sur un pied d'égalité. Cette équivalence ou parité est légitime, que l'épistémologie repose sur des explications causales et que la sémantique s'avère uniformément vériconditionnelle ou non. De ce point de vue, on ne saurait sous-estimer ni l'importance ni la généralité du dilemme de Benacerraf dans les débats épistémologiques contemporains.²

2. La reformulation de Field

La théorie de la connaissance dite « causale » selon laquelle nous savons que p seulement au cas où il existe une relation causale appropriée entre p et les sujets connaissant, c'est-à-dire entre nous et le fait que p , défendue par

² Voir par exemple Clarke-Doane [2020].

Alvin Goldman (Goldman [1967]) et approuvée sans condition par Benacerraf (Benacerraf [1973], pp. 671-673, Benacerraf [2016], pp. 271-272), a perdu sa popularité. Hartry Field a proposé une lecture différente du dilemme en termes de croyance et de fiabilité. C'est cette lecture qui est aujourd'hui le point de départ des discussions du défi posé par Benacerraf aux platonistes et aux partisans de l'approche combinatoire (pour des vues d'ensemble et des discussions, voir Linnebo [2006], Liggins [2010], Sereni [2016]). Field le présente de la manière suivante :

« Nous commençons par supposer qu'il existe des entités mathématiques conformes à ce qu'en disent les théories mathématiques. Nous concédons également qu'il puisse y avoir des raisons positives de croire à ces entités. Ces raisons positives peuvent impliquer [...] une plausibilité initiale [...] [ou encore] l'indispensabilité de leur postulation. [...] Mais le défi de Benacerraf [...] est [...] d'expliquer comment nos croyances à ces lointaines entités peu aussi bien refléter les faits qui les concernent. [...] *[S]'il s'avère impossible d'expliquer cela*, alors cela tend à *compromettre* notre croyance aux entités mathématiques, *quelles que soient par ailleurs* les raisons que nous pourrions avoir en faveur d'une telle croyance » (Field [1989], p. 26).

On remarquera à quel point cette formulation est à première vue éloignée des préoccupations originelles de Benacerraf. Le défi, au départ, ne concerne pas la possibilité d'expliquer comment nos *croyances* mathématiques pourraient si bien refléter de quelconques *faits*. Un autre élément tout aussi frappant de la nouvelle formulation est la *force* du défi fieldien. Admettons que le défi concerne effectivement la croyance plutôt que la connaissance. Pourquoi, par exemple, notre croyance aux nombres, ou à leur existence, abstraction faite des raisons que nous pourrions tirer de la théorie des nombres et du succès de ses applications pour la justifier, soit compromise,

ou même simplement affaiblie, par le fait que nous ne pouvons produire un argument nous permettant de conclure que ces croyances reflètent des faits dont la nature est entièrement déterminée par ce que dit au pied de la lettre la théorie des nombres? La clause restrictive imposée par la lecture de Field — « *quelles que soient par ailleurs les raisons* » — est d’une force peu commune. Bien qu’elle n’impose pas à première vue des conditions nécessaires et suffisantes plus strictes que celles qui sont déjà retenues pour la connaissance mathématique, et pas plus des conditions différentes, elle requiert explicitement qu’une justification soit produite en faveur de sa fiabilité pour la raison que « nous devrions considérer avec suspicion toute revendication de connaissance à propos des faits d’un certain domaine si nous pensons qu’il est en principe impossible d’expliquer la fiabilité des croyances prenant ce domaine pour objet » (Field, *op. cit.*, p. 230)³.

La justification appropriée aux vérités mathématiques étant les preuves, et cette justification étant distincte de celle à présent requise pour la fiabilité de notre croyance aux preuves elles-mêmes, il semble que le prix de la reconstruction fieldienne du dilemme soit particulièrement élevé. La fiabilité doit bien entendue être analysée ici de manière *non* causale, en termes des mécanismes cognitifs qui produiraient des croyances vraies dans des situations contrefactuelles. Cependant, comme le fait remarquer Field, « [l]e problème de Benacerraf [...] semble [maintenant] provenir du fait que nous

³ Notons que la littérature récente sur les arguments dits de discrédit [*debunking arguments*], prennent directement leur origine dans les préoccupations épistémologiques du dilemme reformulé par Field. Ces arguments font valoir que notre connaissance du fait que la vérité de nos croyances relatives à un domaine donné est purement fortuite devrait les discréditer. Si nous apprenions que nos croyances mathématiques auraient pu être radicalement différentes de ce qu’elles sont, la confiance que nous leur accordons devrait être affaiblie, au point que, passé un certain seuil, nous pourrions vouloir les abandonner (voir Clarke-Doane [2016] pour une excellente discussion). Cette préoccupation vient directement de la reformulation fieldienne, qui considère la possibilité inverse.

aurions exactement les mêmes croyances [...] mathématiques si les vérités [...] mathématiques étaient différentes [...] et cela compromet ces croyances » (Field [2005], p. 81). Autrement dit, le recours aux preuves, en tant que justifications appropriées à la connaissance mathématique — le même recours exactement qui motive l'analyse combinatoire ou syntaxique dans la formulation originelle du dilemme — doit à son tour être expliquée en termes de fiabilité, la fiabilité servant de critère pour juger de la légitimité de nos croyances mathématiques aux preuves (et à vrai dire à toute croyance mathématique). À moins qu'une telle explication puisse être donnée, nos croyances mathématiques fondées sur elles pourraient après tout être compromises.

3. Réponses conservatives et non conservatives

Le dilemme, dans chacune de ses deux formulations, a suscité un grand nombre de réponses, pas seulement du côté des platonistes⁴. Nous pouvons faire remarquer sans exagération qu'il saisit et codifie un défi essentiel à toutes les philosophies des mathématiques dans la mesure où elles doivent envisager conjointement les questions sémantiques, épistémologiques et ontologiques. Il sera pour cette raison utile de mettre à jour les distinctions qui permettent de classer les différentes réponses disponibles dans la littérature récente.

⁴ En quelques mots, le platoniste est celui pour qui les entités mathématiques qui font l'objet des énoncés mathématiques vrais sont abstraits. Ladite abstraction est en général définie de manière négative comme une caractéristique ou une propriété non causale, non temporelle et non spatiale garantissant que l'existence desdits objets (nombres, fonctions, etc.) est indépendante des esprits, des langages et des pratiques. Une discussion plus avancée de la doctrine est proposée dans la section 5.

Bob Hale et Crispin Wright ont proposé une taxinomie utile en les distinguant selon qu'elles sont conservatives ou non. Les réponses conservatives « affrontent le dilemme de front, affirmant sans plus de façons que les mathématiques pures sont correctement analysées lorsqu'elles le sont syntaxiquement au pied de la lettre, et que, analysées de cette manière, elles représentent, tout au moins en grande partie, un corpus de connaissances a priori » (Hale et Wright [2002], p. 103).

Une réponse au dilemme est donc conservative seulement au cas où elle défend conjointement les trois thèses suivantes :

- i. Le discours mathématique doit être analysé au pied de la lettre.
- ii. Analysé au pied de la lettre, les énoncés de ce discours ont un véritable contenu de connaissance.
- iii. Notre connaissance de ce contenu est *a priori*.

Il faut et il suffit, pour qu'une réponse soit non conservative, qu'elle rejette au moins l'une de ces thèses.

Si nous supposons que l'interprétation littérale et syntaxique des énoncés mathématiques identifie les expressions mathématiques qui y figurent comme des termes singuliers dont les référents sont des objets auxquels nous attribuons propriétés et relations, alors les réponses conservatives seront de nature platoniste. De plus, ces réponses insisteront plus particulièrement sur (iii) : non seulement la connaissance mathématique est obtenue et justifiée *a priori*, indépendamment de l'expérience réelle ou possible, mais elle *doit* l'être. Selon Hale et Wright, il ne reste du coup que deux réponses non conservatives possibles : la réponse par l'intuition et la réponse par

l'intellect.

Pour les réponses du premier genre, que nous baptiserons « intuitionnelles » en suivant la terminologie de Hale et Wright, « l'épistémologie des mathématiques doit tenir compte d'une faculté spéciale — traditionnellement appelée 'intuition' — qui nous permet de prendre connaissance d'un système d'objets abstraits, en particulier les objets mathématiques, et de leurs propriétés caractéristiques, à peu près comme la perception ordinaire nous permet de prendre connaissance des objets concrets ordinaires et de leur propriétés » (Hale et Wright [2002], *loc. cit.*). Pour celles du deuxième genre, que nous baptiserons avec eux « intellectualistes », « l'accès aux objets des mathématiques pures est assuré par l'exercice général de la raison et l'entendement » (Hale et Wright [2002], *loc. cit.*).

4. Une cartographie du débat

Nous pouvons à présent classer les réponses au dilemme en faisant ressortir un certain nombre de difficultés de contenu et de terminologie.

Le platonisme de Gödel (Gödel [1947], Gödel [1964]) et la conception de Charles Parsons, qui en est l'héritière (Parsons [1979], Parsons [1995]), relèvent du genre intuitionnel. Il sera à ce propos indispensable de rappeler l'arrière plan fourni par la philosophie des mathématiques de Kant et par les grandes lignes de la théorie kantienne de la connaissance (Kant [1781], Kant [1787]; Kant [1783], ch. 2). Parmi les conceptions intellectualistes, nous devons bien sûr inclure le logicisme de Frege (Frege [1884], Frege [1893-1903]) et le néo-logicisme défendu par Hale et Wright (Hale et Wright [2001]). Notons que lorsque certaines restrictions sont imposées quant à ce

qui doit compter comme une analyse syntaxique et littérale, l'idée que les mathématiques étudient des structures plutôt que des entités identifiées comme les référents de termes singuliers, constantes incluses, doit être caractérisée comme intellectualiste bien qu'elle soit conservatrice au sens retenu. C'est le cas du structuralisme *ante rem* défendu par Stewart Shapiro (Shapiro [1997]). D'autres formes de structuralisme, notamment celles défendues par Michael Resnik (Resnik [1997]) et Geoffrey Hellman (Hellman [1989]), s'avèrent au contraire nettement non conservatrices.

Notons ici que certaines approches réfractaires à la taxinomie en vigueur offrent néanmoins une réponse au dilemme de Benacerraf. Ce sera le cas du proto-structuralisme de Richard Dedekind (Dedekind [1888]), de la théorie des objets abstraits d'Edward Zalta (Zalta [1999]) et du trivialisme défendu par Augustin Rayo (Rayo [2013]), que, faute de place, nous ne pouvons prendre en compte dans cette présentation.

Le caractère non conservatif des réponses dépend bien sûr de la thèse à rejeter : toutes les réponses conservatrices ne sont pas *de facto* non-platonistes ou nominalistes. Le nominalisme défendu par Field accepte (i), mais rejette (ii) et (iii). La même remarque s'applique à diverses formes de fictionalisme, non seulement celle défendue par Field pour les mathématiques pures, mais également celles discutées ou défendues par Mark Balaguer (Balaguer [1996]), Mary Leng (Leng [2010]) et Stephen Yablo (Yablo [2002]).

Curieusement, certaines formes de platonisme s'avèreront conservatrices dans la mesure où elles rejettent (iii) tout en défendant (i) et (ii). C'est le cas du platonisme physicaliste défendu par Penelope Maddy pour certains ensembles, mais également celui du platonisme défendu sur la base d'un argument d'indispensabilité. Dans ce deuxième cas, la justification

appropriée à la vérité des énoncés mathématiques est obtenue *a posteriori* sur la base de considérations ayant trait à la formulation, à la confirmation et à la sélection des théories scientifiques (voir Alan Baker (Baker [2005] , Baker [2009]) et Mark Colyvan (Colyvan [2010])). L'arrière-plan philosophique de cette approche est largement naturaliste, l'idée directrice étant que la solution au dilemme doit être de nature empirique et pragmatique, entièrement circonscrite par des données fournies par les sciences de la nature ou, au minimum, compatibles avec leurs résultats.

Reste, enfin, la question du réalisme, souvent confondue dans son ensemble avec celle du platonisme directement visé par le dilemme. Si l'on tient à ce terme pour des raisons d'usage et d'exposition, il sera plus approprié de parler ici, de manière plus restrictive, de réalisme ontologique. Pour des besoins de clarté et de concision, nous distinguerons cette position de nature métaphysique de deux autres. D'une part du « réalisme sémantique », selon lequel certains énoncés mathématiques sont vrais (une thèse directement impliquée par (ii)), et d'autre part du « réalisme de la valeur de vérité » selon lequel ce qui rend les énoncés mathématiques vrais ou faux de manière déterminée est indépendant de l'activité mathématicienne, des esprits engagés dans cette activité et des langages des différentes théories mathématiques. C'est cette troisième position que Michael Dummett a le plus directement rejetée, donnant par la même naissance à une forme d'antiréalisme lié d'une part à la conception wittgensteinienne de la signification comme usage (Wittgenstein [1953]) et à l'intuitionisme de Luitzen J. Brouwer (Brouwer [1913], Brouwer [1949]). Nous discuterons enfin le finitisme strict qui en est issu et en constitue une extension et une modification importantes (voir Wright [1982]).

5. Répondre au défi

Rétrospectivement, les grandes écoles de la fin du XIX^{ème} siècle et du début du XX^{ème} prenant parti sur la question du fondement des mathématiques, à savoir le logicisme, le formalisme et l'intuitionnisme, peuvent être conçues comme proposant une réponse au dilemme de Benacerraf. Dans cette section, nous revenons sur ceux de leurs aspects fondamentaux qui jouent un rôle essentiel dans les théories récentes affrontant le dilemme directement.

5.1 Le néo-logicisme

Arrière-plan historique : le logicisme de Frege

Dans ses *Fondements de l'arithmétique*, Frege pose la question « Comment les nombres nous sont-ils donnés si nous ne pouvons en avoir ni une idée, ni une intuition? » (Frege [1884], § 62). La réponse proposée repose en partie sur l'adoption du principe du contexte selon lequel nous devons chercher le sens d'une expression non pas isolément mais dans le contexte d'un énoncé : pour déterminer le sens d'une expression numérique, nous devons d'abord déterminer le sens des énoncés numériques dans lesquels elle figure. Au § 46, Frege suggère que les énoncés tels que « Le carrosse du roi est tiré par quatre chevaux » doivent être analysés comme des assertions portant sur des concepts. Dans l'exemple en cause, l'énoncé doit être analysé comme l'assertion qu'un certain nombre (le nombre quatre) est le nombre qui appartient à un certain concept (le concept de cheval tirant le carrosse du roi). Les énoncés numériques ne peuvent porter que sur des concepts dits

«sortaux» avec d'authentiques critères d'identité et d'authentiques conditions d'application. Autrement dit, nous devons d'une part être capables de déterminer si deux termes renvoient au même objet tombant sous un concept, et d'autre part si un objet tombe ou non sous un concept. Les énoncés pertinents sont ici les énoncés d'identité dans lesquels une occurrence de terme numérique singulier apparaît de chaque côté du signe d'identité, autrement dit les énoncés de la forme « Le nombre de F = Le nombre de G » (symboliquement : $\#F = \#G$). C'est en donnant leurs conditions de vérité que nous fournirons une définition implicite du concept de nombre cardinal, car nous donnerons alors les conditions d'identité des objets tombant sous le concept.

Frege prend d'abord en compte ce que nous appelons aujourd'hui le principe de Hume, un principe qui joue un rôle déterminant dans la réponse néo-logiciste au dilemme de Benacerraf (voir la section suivante). L'idée est que le sens des énoncés d'identité numérique est, par stipulation, équivalent au sens des énoncés exprimant l'équinumericité des concepts F et G , autrement dit exprimant le fait que $\#F = \#G$. Frege rejette l'idée que le principe puisse jouer un rôle définitionnel et se décide finalement en faveur d'une définition explicite : « $\#F$ » est défini comme « l'extension du concept 'être équinumérique' au concept F ». Nous pouvons comprendre, bien que de manière approximative, l'extension d'un concept comme l'ensemble des éléments qui tombent sous le concept. Ce qui importe pour nous ici est que, dans les *Fondements*, Frege donne un aperçu de la manière dont cette définition du nombre cardinal permet la dérivation d'importants théorèmes d'arithmétique, et que les énoncés vrais de l'arithmétique sont alors des variantes notationnelles d'énoncés purement logiques de manière que, contrairement aux apparences, l'arithmétique n'est *pas* une science qui

étudie des objets particuliers (les nombres), mais une science qui étudie une sous-classe particulière d'objets logiques (les extensions de concepts).

Par ailleurs, Frege propose dans les *Fondements* qu'un énoncé soit jugé analytique exactement au cas où sa justification fait uniquement appel à des vérités logiques et à des définitions, et *a priori* exactement au cas où cette justification se fonde exclusivement sur des lois générales (Frege, *op. cit.*, § 3). En analysant la connaissance arithmétique comme une connaissance *a priori* d'énoncés analytiques, Frege propose une réponse clairement conservatrice et intellectualiste au dilemme. Notons que ces énoncés analytiques ne sont pas simplement explicatifs au sens où ils ne font pas qu'expliquer ce qui est implicitement contenu dans les axiomes, à la manière dont, chez Kant, les jugements analytiques sont des jugements pour lesquels le concept du prédicat est implicitement inclus dans le concept du sujet. Pour Frege, les énoncés analytiques nous permettent au contraire d'étendre notre connaissance mathématique en dévoilant les conséquences de ce qui est implicitement contenu dans les axiomes à partir desquels ils sont dérivés.

Le néo-logicisme de Hale et Wright

Les néo-logicistes défendent l'idée qu'une bonne compréhension du principe de Hume, conjointement avec ce que nous appelons aujourd'hui l'arithmétique de Frege (un système de logique imprédictive du second ordre avec le principe de Hume comme seul axiome non logique), peut ressusciter le projet logiciste frégeen (voir Wright [1983], et Hale et Wright [2001]⁵).

⁵ Sur les raisons de l'échec du projet logiciste, on consultera le chapitre 2 de ce volume.

L'idée est que le principe de Hume donne une définition implicite du nombre cardinal, et que les définitions implicites peuvent faire l'objet d'une connaissance *a priori* parce qu'elles sont des vérités conceptuelles saisissables sans travail épistémique autre que celui nécessaire à leur compréhension. Il s'ensuit qu'il est possible de montrer que les axiomes de Peano sont analytiques au sens de Frege. Par ailleurs, dans la mesure où l'existence des cardinaux est une conséquence de l'arithmétique de Frege, une forme de platonisme logiciste est ainsi défendue, qui évite la contradiction fatale au projet originel de Frege.

Si nous présentons l'argument avec un minimum de détails techniques, nous pouvons dire que les néo-logicistes défendent l'approche suivante⁶. Le principe de Hume, formulé comme suit (avec \approx comme symbole pour la relation d'équinuméricité) :

$$\forall F \forall G (\#F = \#G \leftrightarrow F \approx G) \quad (\text{HP})$$

établit des relations d'équinuméricité entre concepts qui nous autorisent à introduire des considérations sur les entiers naturels. Du côté droit du biconditionnel, nous avons une référence à des concepts et à une relation entre concepts ; du côté gauche, nous avons une référence à des objets spécifiques, à savoir aux nombres (de F et de G). Une première difficulté tient au fait que nous identifions des expressions (“ $\#F$ ”, “ $\#G$ ”) comme des termes singuliers

⁶ Edward Zalta donne un résumé de la preuve que l'arithmétique de Frege est consistante et prouve les axiomes de Peano du second ordre in Zalta [1999]. Outre les ouvrages déjà mentionnés, on consultera les publications suivantes pour une discussion plus avancée des questions centrales du néo-logicisme : George Boolos sur les conséquences existentielles supposées des énoncés analytiques (Boolos [1997]) ; Øystein Linnebo sur le choix d'un principe d'abstraction (Linnebo [2009]) ; et Paolo Mancosu sur le rôle des principes d'abstraction dans l'histoire des mathématiques (Mancosu [2016]).

référentiels selon des critères purement syntaxiques, notamment par le simple fait qu'elles figurent dans des énoncés d'identité vrais. L'idée que nous pouvons légitimement procéder de cette manière est connu comme thèse de « priorité syntaxique ». Deuxièmement, le néo-logiciste doit montrer que le principe de Hume, qui donne les conditions de vérité du côté gauche du biconditionnel, n'a pas *per se* de conséquence existentielle quant à l'existence des nombres.

Voyons donc comment, lorsque le principe de Hume est ajouté a un système de logique de deuxième ordre (entièrement imprédicatif), il est possible de dériver l'existence des cardinaux. Prenons l'exemple de 0. L'existence de 0 est dérivée à l'aide du principe de Hume une fois que le côté droit du biconditionnel est instancié par le concept purement logique de non identité à soi-même (noté « $[x : x \neq x]$ »), un concept sous lequel aucun objet ne peut tomber. Nous avons donc :

$$(\#[x : x \neq x] = \#[x : x \neq x]) \leftrightarrow ([x : x \neq x] \approx [x : x \neq x]). \quad (\text{HP0})$$

Étant donné la réflexivité de la relation d'équinuméricité, le côté gauche du bi- conditionnel est également vrai. Par généralisation existentielle, nous dérivons l'existence d'un objet particulier :

$$\exists x(x = \#[x : x \neq x])$$

que nous définissons explicitement comme étant 0 (nous supposons ici que la logique sous-jacente est une logique libre sans la négation) :

$$0 =_{df} \#[x : x \neq x].$$

Nous pouvons maintenant former un nouveau concept, $x = 0$, sous lequel tombe un seul objet, à savoir 0, de manière à obtenir une nouvelle instance du principe de Hume :

$$(\#[x : x = 0] = \#[x : x = 0]) \leftrightarrow ([x : x = 0] \approx [x : x = 0]). \quad (\text{HP1})$$

Nous obtenons ensuite

$$\exists x(x = \#[x : x = 0])$$

par généralisation existentielle, ce qui nous permet de donner une définition explicite de 1 :

$$1 =_{df} \#[x : x = 0].$$

Nous pouvons procéder de cette manière pour chaque entier naturel. Wright remarque à ce propos que si le principe de Hume donne une bonne définition, et si cette définition est analytique, c'est notre conception de l'analyticité qui doit changer : en dépit des apparences, les énoncés analytiques peuvent avoir des conséquences existentielles. La question de la légitimité des principes d'abstractions et des définitions par abstraction fait l'objet d'un large débat que nous ne pouvons présenter ici (voir les contributions de Cook [2007], Ebert et Rossberg [2016], et Hale et Wright [2001]). L'idée néo-logiciste cruciale en ce qui concerne la réponse au dilemme de Benacerraf est que nous pouvons recourir au principe de Hume pour déterminer les conditions d'application du concept de nombre. Autrement dit, nous pouvons, pour n'importe quel objet, déterminer s'il est un nombre ou non. Il suffit pour cela de vérifier si ses conditions d'identité peuvent être exhaustivement décrites en termes d'équinuméricité entre

concepts. Aucun objet ne satisfaisant pas cette condition ne peut être un nombre. La perspective néo-logicienne propose donc bien une réponse conservatrice au dilemme de Benacerraf : elle analyse le discours mathématique au pied de la lettre et envisage la connaissance mathématique comme une connaissance *a priori* d'objets logiques. Ce deuxième aspect en fait une sorte de platonisme si nous concevons le caractère abstrait de ces objets au sens retenu note (4.).

5.2 Le structuralisme

Il existe plusieurs sortes de réponses structuralistes au dilemme de Benacerraf. Les plus discutées ont été proposées par Geoffrey Hellman (Hellman [1989]), Michael Resnik (Resnik [1997]), Stewart Shapiro (Shapiro [1997]), et Erich Reck et Michael Price (Reck et Price [2000]). La réponse de Parsons est également de cette nature, mais puisque l'argument qui la soutient est fondé sur des considérations intuitionnelles, nous la prendrons en compte dans la section 7.3.

Arrière-plan historique : Dedekind et le formalisme de Hilbert

Dans la mesure où Dedekind construit le système des entiers naturels en refusant d'attribuer un contenu spécifique à ses éléments, nous pouvons le considérer comme un structuraliste, ou tout au moins comme un proto-structuraliste : les propriétés non structurelles du système des entiers naturels sont jugées sans pertinence dans leur ensemble, les entiers étant caractérisés uniquement par leurs propriétés relationnelles. Pour Dedekind, les mathéma-

tiques en général ont pour objet d'étude des systèmes relationnels (Dedekind [1888]).

Hilbert a lui aussi milité en faveur d'une position de ce genre, quoique d'une manière bien différente. Le point de vue finitaire refuse toute signification aux symboles mathématiques. Les énoncés dits « idéaux », introduits « de manière que les lois ordinaires [c'est-à-dire classiques] de la logique soient universellement valides [. . .], ne signifient rien dans la mesure où elles n'expriment pas d'énoncés finitaires » (Hilbert [1984], p. 196). Le point de vue hilbertien exige que, parmi les relations entre concepts, les relations structurelles restent les seules qui aient de l'importance pour les théories mathématiques. La lettre de Hilbert à Frege du 29 décembre 1899 insiste vivement sur ce point, notamment dans le passage suivant (voir Frege [1992], p. 226) :

« [. . .] chaque théorie n'est rien de plus qu'un échafaudage ou un schéma de concepts munis de leurs relations nécessaires, et [...] les éléments de base peuvent être conçus comme on veut. Si, en parlant de mes points, je pense à un certain système de choses, par exemple au système amour, loi ou ramoneur... et si je suppose ensuite que mes axiomes sont des relations entre ces choses, alors mes propositions, par exemple le théorème de Pythagore, sont également valides pour elles. Autrement dit, il est toujours possible d'appliquer n'importe quelle théorie à un nombre infini de systèmes d'éléments de base. »

Du point de vue hilbertien, il est donc essentiel que des formules comme $a + b = b + a$ soient des formules idéales de la théorie des nombres. Dans la mesure où les opérations logiques ne peuvent leur être appliquées matériellement, elles doivent, tout comme les preuves, faire l'objet d'un traitement

formel. Il est important de remarquer ici que la transition d'une conception naïve de la connaissance mathématique à un traitement formel, notamment à la formalisation des preuves rendues possibles par le langage symbolique du calcul logique, nous éloigne radicalement de ce que Hilbert appelle « la connaissance mathématique matérielle [. . .] communiquée au moyen du langage ordinaire », c'est-à-dire au genre de connaissance prise en compte par Benacerraf dans l'exposition originelle du dilemme par la supposition que les mathématiques, du point de vue sémantique comme du point de vue épistémologique, ne méritent *pas* d'être traitées différemment de n'importe quel autre domaine d'investigation, le domaine empirique inclus.

Genres de structuralismes

La distinction entre théories algébriques et théories non algébriques est utile pour introduire la réponse structuraliste au dilemme et, à vrai dire, la conception structuraliste dans son ensemble (pour la distinction entre les deux genres de théories, voir Shapiro [1997], p. 40). Les théories algébriques n'ont pas de modèle unique ; en revanche, les théories non-algébriques visent un modèle unique, le modèle attendu. Autrement dit, les théories algébriques s'intéressent aux aspects structuraux des objets mathématiques, par opposition aux objets eux-mêmes. C'est pourquoi il est au premier abord difficile de voir comment le dilemme de Benacerraf pourrait concerner les théories algébriques. Shapiro et Resnik soutiennent que *toutes* les théories mathématiques, algébriques ou non, décrivent des structures dans lesquelles les places (par opposition aux objets) entretiennent des relations d'un certain type, à savoir des relations structurelles.

Qu'est-ce qu'une relation structurelle et pourquoi est-il important que la réponse structuraliste de Shapiro et Resnik soit indépendante du nombre de modèles? Une relation structurelle est une relation dans laquelle des *patterns* [motifs] jouent un rôle. Nous devons être capable de les identifier. Prenons le cas paradigmatique des entiers naturels. Nous pouvons les identifier de différentes manières, notamment avec des ensembles de manière que, par exemple, 2 soit identifié soit avec $\{\{\emptyset\}\}$, soit avec $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Si les entiers sont des ensembles, nous devons pouvoir argumenter en faveur d'un choix ; il n'existe pourtant aucune méthode que nous puissions appliquer pour choisir entre $\{\{\emptyset\}\}$ et $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ de manière que la « réduction » des entiers naturels aux ensembles échoue (voir Benacerraf [1965]). L'attitude structuraliste consiste en un sens à se défaire de la question de savoir à quel ensemble particulier le nombre 2 est identique : *n'importe quelle réduction peut jouer le rôle* du nombre 2 dans une structure. Si jamais il est quelque chose, 2 n'est rien de plus qu'une place, un espace sans structure interne dans la structure des entiers naturels. Bien que les structures et les places dans les structures ne soient pas des objets, elles sont abstraites au sens visé par le dilemme de Benacerraf de manière que le dilemme n'a rien perdu de sa pertinence. Nous sommes toujours redevables d'une explication de la manière dont nous acquérons une connaissance des entités investies d'un tel rôle, autrement dit de la manière dont nos croyances aux places, ou à ce qui peut jouer le rôle approprié de place dans une structure, peut si bien refléter les faits structurels de l'arithmétique. Nous devons rendre compte de notre capacité à identifier des *patterns* à l'intérieur d'une structure donnée, ainsi que de notre capacité à identifier les systèmes comme des instantiations de structures et à les juger isomorphes lorsqu'elles le sont.

Les théories algébriques n'échappent pas pour autant au dilemme de Be-

Benacerraf. Dans la mesure où ces théories acceptent une pluralité de modèles et où ces modèles sont des modèles de l'arithmétique conçue en termes structurels, autrement dit de l'arithmétique en tant qu'elle décrit des structures avec des places, nous pouvons légitimement exiger une explication de la manière dont une sémantique qui analyse les vérités arithmétiques comme des vérités portant sur ces structures, s'intègre à l'épistémologie causale approuvée par Benacerraf. Et si nous choisissons la reformulation de Field en termes de croyances, comme se rapportant aux structures plutôt qu'aux entités ou aux objets mathématiques, notre tâche est d'expliquer comment nos croyances à des structures aussi distantes ou lointaines reflètent adéquatement les faits qui s'y rapportent.

La réponse structuraliste aux deux versions du dilemme de Benacerraf, algébriques ou non, est que les relations structurelles ne sont *pas* lointaines. L'une des caractéristiques remarquables du structuralisme — une caractéristique qui a largement contribué à l'attrait pour cette perspective dans son ensemble — est qu'elle est sensible à la pratique mathématicienne au sens où les mathématiciens étudient les propriétés structurelles des objets en laissant de côté leur nature spécifique. C'est le cas, par exemple, lorsque les réels sont étudiés comme des coupures de Dedekind ou des classes d'équivalences de suites de Cauchy.

Bien évidemment, le recours à l'intuition par la perception de *patterns*, notamment en ce qui concerne leur reconnaissance et leur extension dans l'analyse de Shapiro, joue un rôle clé dans la manière dont le structuralisme s'attaque à la composante épistémologique du dilemme. Bien qu'il soit garanti que les relations structurelles soient accessibles en ce sens pour les structures finies, la solution structuraliste ne peut s'appliquer au cas des structures infinies. Dans ce cas, plutôt que de s'en remettre à l'analyse

perceptuelle de la reconnaissance des *patterns*, le structuraliste doit adopter une autre stratégie consistant à proposer des définitions implicites des structures comme satisfaisant des ensembles donnés d'axiomes (voir Shapiro [1997], ch. 4).

Il n'est pas certain que nous disposions ici d'une solution de remplacement au platonisme, d'une part parce qu'il reste controversé que notre saisie des *patterns* dans le cas fini et que nos définitions implicites dans le cas infini constituent ensemble une approche unifiée et cohérente, ensuite parce les raisons que nous pourrions avoir de considérer que les axiomes satisfaits par les structures sont vrais se réduisent à une question de commodité strictement pragmatique.

Quoi qu'il en soit de ces difficultés, nous devons distinguer trois formes de structuralisme : le structuralisme *ante rem*, le structuralisme *in rebus*, et le structuralisme modal. Non seulement cette distinction reflète l'état de la recherche dans la littérature contemporaine, mais elle aide à mieux comprendre les rapports entre structuralisme et platonisme.

Le structuralisme *ante rem* de Shapiro [1997], que l'on peut considérer comme un genre de structuralisme non éliminativiste (voir Parsons [2007], Reck et Price [2000]), défend l'idée que les nombres sont des places dans une structure, par exemple dans la structure des entiers naturels, ou dans la structure de n'importe quelle séquence ω d'objets, et que ladite structure existe indépendamment de ses instantiations particulières, partageant par là-même une thèse d'existence et d'indépendance avec le platonisme. Le structuralisme *in rebus* rejette ces deux positions ; il est éliminativiste, mais également universaliste au sens de Reck et Price puisque les structures mathématiques n'existent que dans la mesure où elles sont incarnées dans des systèmes particuliers. Le structuralisme modal, tel qu'il est défendu par

Hellman (Hellman [1989]) défend quant à lui l'idée que les propositions mathématiques sont vraies seulement au cas où, pour n'importe quel système S , si S rend les axiomes de l'arithmétique vrais, alors il rend également vraies les propositions arithmétiques. L'idée directrice du structuralisme modal est que, au cas où l'existence effective des systèmes infinis devrait être rejetée, *il pourrait exister* une infinité d'objets qui rendraient vrais les axiomes de l'arithmétique. Ce genre d'analyse structuraliste rejette la thèse d'indépendance d'inspiration platoniste sans pour autant rejeter la thèse d'existence. Il lui reste néanmoins à proposer une épistémologie pour l'appareillage modal impliqué dans l'attribution de la propriété sémantique de vérité aux axiomes.

5.3 Le platonisme défendu par l'argument d'indispensabilité

Les approches conservatrices considérées jusqu'ici font de la connaissance mathématique une connaissance *a priori*. Il est néanmoins possible d'analyser le discours mathématique au pied de la lettre et de nier ce caractère *a priori*. C'est la position adoptée par les partisans de l'approche naturaliste : bien que les justifications fondées sur les sciences de la nature puissent déborder du cadre étroit des sources purement expérimentales, les justifications de toutes nos croyances doivent être en dernière analyse empiriques par nature. Quine a proposé une version nuancée du naturalisme selon laquelle les évidences ou les justifications en faveur de nos croyances sont fournies par les versions les plus développées de nos meilleures théories scientifiques, la philosophie ne pouvant ici s'autoriser un point de vue supérieur qui légifèrerait en la matière. Quine a pensé dans un premier temps que ce naturalisme justifierait une position strictement physicaliste

conduisant à limiter l'ontologie aux objets physiques (voir Goodman et Quine [1947]). Cette position physicaliste stricte a été par la suite abandonnée, et la manière la plus convaincante de présenter la dernière position de Quine en la matière est de la formuler dans les termes du célèbre critère d'engagement ontologique. Une fois nos théories formulées dans un langage du premier ordre avec identité dans lequel les termes singuliers ont été éliminés, soit par des définitions explicites, soit par une paraphrase appropriée des énoncés dans lesquels ils figurent, ce que ces théories affirment ou impliquent en termes d'existence est exhibé sans ambiguïté dans le parcours de valeurs des variables liées par les quantificateurs de la théorie (voir Quine [1948]). Rien ne peut pour autant garantir que le parcours de valeurs des variables liées par les quantificateurs du premier ordre ne contienne rien de plus que des objets physiques. Quine conclut au contraire que nous devons reconnaître l'existence des objets mathématiques, notamment des ensembles, très exactement dans la mesure où ils sont indispensables à la formulation des théories scientifiques. Cet argument d'indispensabilité a ensuite été reformulé par Putnam⁷ (voir Garavaso [2005] et Sereni [2015] pour une discussion critique de ses antécédents historiques chez Frege).

L'idée fondamentale est la suivante : si nous avons des raisons de penser qu'une théorie scientifique est vraie (ou confirmée), et si la formulation canonique de cette théorie fait appel aux mathématiques, alors nous avons

⁷ Putnam propose la formulation suivante : « [...] la quantification sur les entités mathématiques est indispensable pour la science [...] ; nous devrions donc accepter cette quantification, mais cela nous oblige à accepter l'existence des entités mathématiques en question » (Putnam [1971], p. 47). C'est cette formulation, plus concise que celle de Quine, qui est le plus souvent discuté.

également des raisons de penser que les énoncés mathématiques dont la théorie a besoin sont vrais (ou confirmés). Les vérités mathématiques se trouvent ainsi empiriquement corroborées, quoique de manière indirecte, et la connaissance mathématique perd du même coup son statut de connaissance *a priori*.

Cette argumentation présuppose une forme de réalisme scientifique : les théories scientifiques donnent une description fidèle, littéralement vraie, de la réalité, qu'elle soit ou non observable (voir Psillos [1999]). Selon Quine, le holisme de la confirmation joue également un rôle important dans l'argumentation : une hypothèse scientifique n'est jamais confirmée isolément, mais en tant qu'elle fait partie d'une théorie complète avec toutes ses présuppositions d'arrière-plan. Quatre thèses semblent jouer ici un rôle déterminant selon Quine : le naturalisme, le réalisme scientifique, le holisme de la confirmation, et l'idée que le critère d'engagement ontologique permet de révéler sans ambiguïté les implications métaphysiques des théories scientifiques. Dans une période récente, différentes versions de cet argument ont été proposées et critiquées.

Genres d'arguments d'indispensabilité

Bien que l'une des versions les plus discutées ait été proposée par Mark Colyvan (Colyvan [2001], p. 11), nous pouvons donner une autre version de l'argument, qui a l'avantage de ne dépendre ni du naturalisme ni du holisme de la confirmation (voir Panza et Sereni [2013], ch. 6) :

1. Nous avons des raisons de croire que certaines théories scientifiques sont vraies
2. Parmi ces théories, certaines ne peuvent se dispenser des théories mathématiques
3. Nous avons des raisons de croire que ces théories scientifiques sont vraies seulement si nous avons également des raisons de croire que les mathématiques dont elles ne peuvent se dispenser sont vraies.

Par conséquent :

4. Nous avons des raisons de croire que les théories mathématiques indispensables sont vraies.

Le réalisme sémantique de la conclusion (4) ne suffit pas à justifier une conclusion platoniste. Il nous faut recourir à une prémise supplémentaire énonçant clairement le recours au critère d'engagement ontologique pour l'obtenir :

5. (4) si et seulement si nous avons des raisons de croire que leurs objets existent.

Par conséquent :

6. Nous avons des raisons de croire que les objets des théories mathématiques indispensables existent.

Notons que la conclusion platoniste (6) est obtenue sans l'aide du naturalisme et du holisme de la confirmation.

La notion d'indispensabilité qui nous intéresse ici est relationnelle à deux titres. On peut se dispenser d'une théorie T relativement à une théorie T' seulement au cas où il est possible de trouver une version T'' de T , différente de T' , qui ne recoure pas au vocabulaire de T , et telle que deux conditions soient satisfaites. Premièrement T'' est équivalente à T conformément à un critère d'équivalence déterminé par la tâche à accomplir. Deuxièmement, T'' est aussi vertueuse que T conformément à un critère spécifique de virtuosité. Dans le cas contraire, T est indispensable relativement à T' . Nous obtiendrons différentes notions d'indispensabilité suivant la manière dont ces critères seront spécifiés. Nous pourrions douter que ces spécifications permettent véritablement d'obtenir des formulations fiables de l'argument d'indispensabilité (voir Panza et Sereni [2016] sur ce point). En ce qui concerne l'équivalence, différentes relations pourraient être spécifiées. Nous pourrions notamment exiger que T et T'' soient empiriquement équivalentes, autrement dit qu'elles aient les mêmes conséquences empiriques. L'équivalence peut également être analysée en termes de force explicative et c'est ce deuxième élément qui a fait l'objet de discussions récentes, notamment suite à une troisième version de l'argument due à Alan Baker (Baker [2005], Baker [2009]) :

1. Nous avons des raisons de croire dans l'existence de toute entité qui joue un rôle explicatif dans nos meilleures théories scientifiques

2. Les entités mathématiques jouent ce rôle explicatif

donc :

3. Nous avons des raisons de croire à l'existence des objets mathématiques.

Baker recourt à l'exemple suivant pour illustrer cette défense du platonisme : la meilleure explication de la raison pour laquelle certaines cigales ont des cycles de vie de 13 ou de 17 années implique, en plus de considérations empiriques concernant les conditions environnementales et les contraintes propres à l'évolution de l'espèce, un théorème de la théorie des nombres permettant de conclure que les cycles de nombres premiers d'années de vie minimisent le risque d'intersection avec les cycles de vie des prédateurs de ces cigales. Si le recours aux nombres premiers et aux résultats de la théorie des nombres les concernant s'avèrent indispensables *du point de vue explicatif* — à savoir pour l'explication évolutionniste d'un avantage conféré à la survie d'un certain genre de cigales —, et s'il n'est pas un simple instrument dont le rôle est de faciliter les calculs ou de construire un modèle utile, alors la conclusion (3) de Baker s'impose : nous *devons* croire à l'existence des nombres premiers.

Nous avons là une réponse non conservatrice au dilemme de Benacerraf dans la mesure où la vérité mathématique et l'existence des objets mathématiques sont toutes deux justifiées *a posteriori*. La réponse accepte néanmoins la condition (i) selon laquelle le discours mathématique doit être analysé au pied de la lettre. La position dialectique de l'argument d'indispensabilité est donc tout à fait particulière. D'un côté, il pourrait aider les empiristes et les naturalistes à proposer une sémantique et une épistémologie appropriées au domaine mathématique, satisfaisant ainsi les deux desiderata jugés conflictuels par Benacerraf. D'un autre côté, il contraint les partisans de l'antiréalisme et du nominalisme à fonder leur argumentation anti-platoniste sur une réfutation de l'indispensabilité des mathématiques appliquées plutôt que sur une réfutation des positions intuitionnelles ou intellectualistes traditionnelles.

Les critiques très nombreuses de l'argument d'indispensabilité ont différentes origines. Elles viennent pour une part de ceux qui rejettent le réalisme scientifique (pour une version de l'argument d'indispensabilité qui voudrait néanmoins s'en dispenser, voir Resnik [1995]), pour une autre de ceux qui rejettent le holisme de la confirmation en insistant sur le fait que les mathématiques ne sont ni confirmées ni infirmées comme le sont les sciences de la nature (Sober [1993]). D'autres ont critiqué le fait que ni le naturalisme ni le holisme de la confirmation hérités de Quine ne font justice à la pratique scientifique réelle. Penelope Maddy remarque à ce propos que certaines théories mathématiques comme la théorie des groupes sont justifiées selon les critères et des méthodes *infra*-mathématiques sans que la question de leur applicabilité soit jamais envisagée. Quant au holisme et au réalisme, Maddy insiste sur le fait que la plupart des théories scientifiques considérées comme vraies reposent sur des idéalizations dont nous savons pertinemment qu'elles sont littéralement fausses et ne peuvent être confirmées au sens retenu dans l'argument platoniste (voir Maddy [1992]; l'objection ne vaut bien sûr que si le holisme fait partie intégrante de l'argument d'indispensabilité).

La critique la plus radicale fait valoir que l'indispensabilité d'une théorie — mathématique ou autre — n'autorise aucune conclusion de nature ontologique (voir Azzouni [2004], Leng [2010], Melia [2000], et Yablo [2001]). Leng et Yablo, en particulier, défendent l'idée que notre usage de termes mathématiques apparemment référentiels doit être conçu comme celui des termes singuliers dans les contextes de fiction, contextes dans lesquels aucun engagement ontologique ne peut être en jeu. Cette manière dite « facile » de répondre à l'argument d'indispensabilité dans ses différentes versions s'oppose frontalement à la manière dite « dure »

envisagée par ceux qui prennent le critère d'engagement ontologique au sérieux. Ces philosophes-là considèrent qu'il serait au contraire malhonnête de prétendre à une ontologie qui satisferait l'exigence épistémologique du dilemme de Benacerraf en quelque sorte par défaut — pour la simple raison que les objets mathématiques, en tant qu'être fictionnels, ne peuvent par définition être hors d'atteinte d'aucune capacité cognitive — sans offrir par ailleurs une explication de l'applicabilité des mathématiques qui remplace l'imputation de vérité et de conditions de vérité aux énoncés des théories mathématiques — à savoir l'imputation responsable du platonisme, aussi bien dans la version originelle du dilemme que dans la reformulation de Field — par une autre qui permette précisément de l'éviter. En plus de ces critiques, on a également fait remarquer que, *même* si l'argument était valide, *aucune* instance particulière ne peut en être proposée une fois que toutes les notions en cause ont été spécifiées (voir Panza et Sereni [2016]).

5.4 Le nominalisme

À première vue, la doctrine médiévale selon laquelle les termes généraux n'ont pas pour référent des universaux qui seraient instanciés par des individus distincts semble très éloignée du nominalisme contemporain proposé en réponse au dilemme de Benacerraf et, plus généralement, comme solution de remplacement au platonisme. Les nominalistes du Moyen-Âge comme Guillaume d'Occam défendent la thèse métaphysique selon laquelle seules existent les entités particulières (par opposition à universelles) et concrètes (par opposition à abstraites). La blancheur, par exemple, n'est pas un universel abstrait qui serait partagé par de multiples entités blanches

concrètes. Il existe uniquement des particuliers ou individus blancs dans l'espace-temps auxquels les expressions « bol blanc », « cheval blanc », etc., renvoient une à une, en quelque sorte de manière discrète.

Ce n'est pourtant pas un hasard si ces particuliers concrets, ou ces individus, de par leur nature même (telle qu'on la conçoit d'ordinaire) sont accessibles aux capacités cognitives humaines que nous connaissons le mieux, par exemple la perception (pour reprendre les mots de Benacerraf in Benacerraf [1973], 667-668; Benacerraf et Putnam [1983], pp. 409-410; voir aussi Benacerraf [2016], pp. 266, 269, 273). Le nominaliste contemporain est également à la recherche d'une ontologie sans objets causalement inertes dont nous pourrions prendre connaissance soit par le raisonnement pur, soit par l'intuition. Nous pourrions donc reformuler un analogue du dilemme reformulé à la Field pour le cas particulier des universaux : s'il s'avère en principe impossible d'expliquer comment nos croyances aux universaux (c'est-à-dire aux référents des termes généraux) peut aussi bien refléter les faits qui s'y rapportent, cela tend à discréditer notre croyance à leur existence.

Field propose une nouvelle approche du nominalisme et, donc, un nouveau type de solution au dilemme de Benacerraf (voir Field [1980 (First Edition), Second Edition 2016, Oxford University Press] et Field [1989]). Dans la mesure où le nominaliste nie l'existence des objets mathématiques, où les mathématiques appliquées en font usage et où le platoniste les accepte en recourant à la notion de vérité, la tâche du nominaliste est d'expliquer l'applicabilité des mathématiques sans recourir à cette notion. La thèse centrale de Field est que nous pouvons nous dispenser de la notion de vérité mathématique pour le faire, la conservativité des mathématiques étant appropriée à cette tâche. Une théorie mathématique M est conservative si et

seulement si une assertion nominaliste a pertinente pour un certain domaine d'application et n'impliquant ni référence à des entités mathématiques ni quantification sur ces entités, est une conséquence d'un ensemble N d'assertations également acceptables du point de vue nominaliste seulement au cas où elle l'est de N seul, sans l'aide de M . En ce qui concerne la composante épistémologique du dilemme, l'objectif est de montrer que la connaissance mathématique est de nature instrumentale : elle permet de faciliter les dérivations sans autoriser de nouvelles conséquences inacceptables du point de vue nominaliste, ne posant donc aucune difficulté épistémologique insurmontable. En ce qui concerne la composante sémantique, la nouvelle approche nominaliste analyse les énoncés mathématiques existentiels comme littéralement faux et les énoncés mathématiques universels comme vrais mais sans aucun engagement ontologique controversé.

Les mathématiques sont-elles conservatives ? Field recourt à deux résultats métalogiques pour établir la conservativité des mathématiques : le théorème de complétude et le théorème de compacité pour la logique du premier ordre. Le théorème de complétude établit que toute expression logiquement valide du calcul des prédicats du premier ordre est démontrable, le théorème de compacité que si tout sous-ensemble fini de l'ensemble des axiomes propres d'une théorie du premier ordre a un modèle, cette théorie a un modèle. Il existe plusieurs versions possibles de ces résultats (voir Hunter [1971] pour une vue d'ensemble). Ce qui compte ici est de savoir s'ils permettent d'établir la thèse de conservativité essentielle au projet nominaliste.

La notion de cohérence joue un rôle crucial dans l'argument. Une théorie mathématique est conservative seulement au cas où elle est cohérente avec toute théorie scientifique, par exemple la physique, n'impliquant ni référence aux objets mathématiques, ni quantification sur ces objets (typiquement, dans ce cas de figure, les nombres et les fonctions). La cohérence étant définie soit sémantiquement en termes d'existence d'un modèle approprié, soit en termes de preuves à l'aide de la théorie de la démonstration, ses formulations sont irrémédiablement platonistes. Elles dépendent soit des modèles, soit des preuves et ne sont donc pas acceptables du point de vue nominaliste. La solution de Field pour surmonter cette difficulté est de monter au niveau du métalangage de manière à énoncer la thèse de conservativité dans le langage objet en introduisant une notion primitive de cohérence logique. Pour cela, Field doit recourir à la notion de compacité, la cohérence de la théorie étant alors réduite à la cohérence de chacune de ses conjonctions finies. Un premier problème est que la formulation du théorème de compacité implique le recours aux ensembles et que la théorie des ensembles reconnaît l'existence d'objets abstraits de manière que le nominaliste se voit obligé d'en donner une formulation ontologiquement non engagée. Une deuxième difficulté, plus importante, est que la preuve nominaliste de la conservativité de la théorie des ensembles offerte par Field présuppose cette théorie : le résultat métalogique de compacité est requis pour la formulation de la thèse de conservativité de manière que l'argument est coupable de circularité vicieuse. Field propose-t-il un argument permettant de conclure que la thèse de conservativité est acceptable du point de vue nominaliste ? Sur ce point, il semble que le nominalisme de Field doive faire face à la tâche intimidante d'offrir une stratégie de nominalisation non seulement pour la théorie des ensembles, mais également

pour les résultats de métalogue nécessaires à la réalisation du programme de manière que ces résultats soient obtenus d'une manière acceptable du point de vue nominaliste⁸.

Pour conclure, nous pouvons faire remarquer que l'approche fieldienne de l'épistémologie des mathématiques et, partant, des deux composantes du dilemme de Benacerraf, diffèrent de manière particulièrement frappante du nominalisme déflationniste défendu par Azzouni (Azzouni [2004]) et, en général, de toutes les manières dites faciles de répondre à l'argument d'indispensabilité dans les différentes versions considérées dans la section 5.3.

5.5 Genres de fictionalisme

Field propose deux genres de réponse au platonisme : le nominalisme fondé sur la thèse d'extension conservative pour les mathématiques appliquées, et un point de vue ouvertement fictionaliste pour les mathématiques pures, justifié par l'introduction d'un opérateur de fiction (Field [1980 (First Edition, Second Edition 2016, Oxford University Press], Field [1989]). Comment motiver cette disparité ? La question de savoir si nous avons là une stratégie antiplatoniste unifiée et cohérente reste controversée.

D'autres genres de fictionalisme ont été proposés, notamment par Mark Balaguer, Mary Leng et Stephen Yablo. Balaguer propose une réponse qui s'apparente aux approches dites faciles, mais qui prend néanmoins pour

⁸ Pour cette perspective, voir les remarques de Field in Field [1980 (First Edition, Second Edition 2016, Oxford University Press] et, au premier chef, in Field [1989], plus spécialement aux pages 119-120 et 252-268.

acquis que l'application des mathématiques est indispensable à la science (Balaguer [1996]). La stratégie consiste à proposer une analyse fictionaliste du discours mathématique, la pierre angulaire de l'analyse tenant dans le fait que le fictionalisme défendu pour les mathématiques appliquées est compatible avec une conception réaliste des sciences de la nature.

Le fictionalisme de Leng a quant à lui un double aspect (Leng [2010]). En ce qui concerne les mathématiques pures, le rôle des mathématiques est de dégager les conséquences logiques d'ensembles d'axiomes particuliers. En ce qui concerne les mathématiques appliquées, Leng défend l'idée que les entités qui ne jouent pas de rôle causal dans leur contribution aux phénomènes expliqués par les théories scientifiques doivent être analysées comme des postulations fictionnelles. C'est, typiquement, le cas des objets mathématiques. S'il s'avère au contraire que notre meilleure explication du succès d'une théorie nous oblige à reconnaître l'existence d'entités dont le rôle causal doit être pris en compte par l'explication, ces entités ne peuvent être analysées en termes de fiction. C'est le cas, typiquement, des particules subatomiques. Autrement dit, les explications mathématiques ne nous engagent à aucune assertion d'existence en ce qui concerne les mathématiques elles-mêmes, mais seulement à reconnaître l'existence des systèmes décrits et analysés à l'aide des mathématiques appliquées.

Le contraste entre l'inefficacité causale des objets mathématiques et l'efficacité causale des entités théoriques telles que les particules subatomiques est au fondement du fictionalisme défendu par Leng. Une réponse est donc fournie quant à l'aspect épistémologique du dilemme de Benacerraf, mais uniquement au sens restreint où l'existence est analysée en termes d'existence relative aux descriptions et aux systèmes.

Yablo propose quant à lui de distinguer différents genres possibles d'ana-

lyses fictionnelles d'assertions existentielles qui, à première vue (mais seulement à première vue), induisent un engagement ontologique (voir Yablo [2001]). Il sera utile de les présenter dans leur application au cas simple des expressions numériques en position de substantif ⁹.

Il y a d'abord l'instrumentalisme au sens strict, selon lequel les assertions d'existence, par exemple que 8 est le nombre de planètes, sont telles que rien, littéralement ou non, n'est authentiquement affirmé par l'acte d'assertion correspondant. Cette conception est distincte du métfictionnalisme, qui voit au contraire dans les assertions existentielles des assertions authentiques, à savoir, dans notre exemple, l'assertion selon laquelle, selon une certaine fiction relative aux nombres, 8 est le nombre de planètes. Ces deux analyses sont à leur tour distinctes du fictionalisme de l'objet qui comprend les assertions existentielles comme étant d'authentiques assertions quant au fait que quelque chose qui n'implique pas les nombres est bien le cas dans le monde réel, et que ce quelque chose particulier rendrait vraie une assertion correspondante dans une fiction qui elle, implique les nombres. Exactement comme dans le nominalisme de Field, *mutatis mutandis*, les expressions numériques sont de simples accessoires auxquels nous avons recours pour faire des assertions vraies à propos d'un monde sans nombres.

Yablo argumente en faveur de ce fictionalisme de l'objet en apportant des précisions concernant les assertions à propos de ces accessoires ou aides qui rendraient nos assertions à propos du monde vraies dans une fiction ou dans une description fictionnelle. Dans cette conception dite figuraliste (Yablo [2002]), lorsque les nombres font l'objet d'une représentation, comme c'est

⁹ On pourra comparer ces analyses avec l'analyse frégréenne de la signification des énoncés d'identité numérique dans la section 5. 1.

le cas dans une affirmation mathématique comme « il existe un nombre infini de nombres premiers », où les nombres sont à la fois des aides ou des accessoires et l'objet même des représentations, aucune contenu n'est asserté d'une manière intrinsèque qui nous forcerait à considérer que nos élocutions mathématiques sont à prendre au sens littéral, ou sont littéralement vraies. Yablo reconnaît par ailleurs qu'il n'est pas toujours possible, soit de déterminer quel fait rend un énoncé mathématique vrai dans une fiction, soit d'énoncer ce fait. Cette réserve est néanmoins en accord avec la version particulière du fictionalisme de l'objet qu'il entend défendre : le langage mathématique est après tout métaphorique. Il n'est donc pas toujours possible de le paraphraser en des termes qui soient aussi bien non mathématiques que non métaphoriques.

6. L'antiréalisme

Tout comme le mot « réalisme », le mot « antiréalisme » est souvent utilisé pour désigner des positions qui doivent être distinguées. Dans cette section, nous discuterons l'antiréalisme à propos des valeurs de vérité, la thèse selon laquelle les énoncés mathématiques, lorsqu'ils sont vrais (resp. faux) sont rendus vrais (resp. faux) par quelque chose qui dépend de manière constitutive de l'activité mathématicienne, des esprits engagés dans cette activité et des langages auxquels les mathématiciens recourent pour formuler leurs théories. Dans cette perspective, la vérité mathématique ne peut aller au-delà de ce que les mathématiciens sont à même de démontrer, au moins en principe. Pour emprunter une fois de plus les mots de Bernays, la vérité mathématique « ne peut être coupée de tout lien avec le sujet réfléchissant » (Bernays [1935], cf. Benacerraf et Putnam [1983], p. 259). Reste la question

de savoir s'il est possible de s'appuyer sur cette thèse pour défendre le réalisme ontologique ou métaphysique, la position selon laquelle les objets dont les mathématiques font la théorie, tout au moins à première vue, dépendent pour leur existence des esprits, des pratiques et des langages mathématiques en un sens qui doit être libéré de toute métaphore.

6.1 Arrière-plan historique : l'intuitionisme de Brouwer

Brouwer conçoit les preuves comme des constructions mentales. Contrairement aux preuves écrites dans un langage mathématique, les constructions mentales peuvent être des structures infinies. Il semble en première approximation que cela contredise la perspective constructiviste, mais les intuitionnistes conçoivent les structures infinies comme n'étant jamais complètes de manière que les mathématiciens peuvent saisir leurs segments finis, quelle que soit leur taille, s'il s'avère qu'ils peuvent être explicitement construits. De ce point de vue, une preuve intuitioniste avec des déductions à partir de prémisses contenant des quantificateurs universels peut nous donner une idée parfaitement claire de ce que serait une preuve explicitement analysée. Le mathématicien ne complètera pas la preuve infinie ; il ne cherchera pas à compléter le processus consistant à démontrer chacune des prémisses une par une pour justifier sa conclusion. Il lui suffira de reconnaître que chaque prémisses *peut* être prouvée, cette reconnaissance étant assurée par l'identification d'une procédure générale qui fournirait une preuve de chaque segment de la suite infinie si elle était appliquée.

Le point de vue brouwérien apporte un nouvel élément à l'aspect épistémologique du dilemme de Benacerraf, mais pas à la conception

combinatoire de la connaissance mathématique à proprement parler puisque les preuves intuitionnistes, telles que Brouwer les conçoit, ne sont caractérisées ni en termes syntaxiques, ni en termes de théorie de la démonstration, ni en termes de dérivabilité à partir des axiomes. Néanmoins, conformément à l'interprétation la plus généreuse, la contrainte de constructivité est qu'il doit être possible, au moins en principe, à une étape n du temps, d'engendrer les moyen d'effectuer une construction, quand bien même nous pourrions ne jamais nous en remettre à de tels moyens. Que nous y recourrions ou non est un fait empirique contingent ressortissant à la pratique mathématique qui, en tant que tel, n'impose aucune contrainte sur la manière dont les constructions doivent être conçues du point de vue intuitionniste. L'idéalisation en jeu dans la théorie brouwérienne du sujet créatif produisant des constructions effectuées dans la durée, où le temps est divisé en étapes discrètes dénombrables, est donc différente *par nature* de l'idéalisation en jeu dans la conception platoniste. L'idéalisation platoniste sépare radicalement les objets mathématiques de la pratique; hors de toute dimension temporelle, la réalité mathématique ne peut être soumise au changement. Analysées de manière platoniste, les valeurs de vérité ne peuvent être sujettes à des qualifications temporelles; analysées de manière intuitionnistes, elles le doivent à deux conditions. Premièrement, une preuve, lorsqu'elle est obtenue, ne peut être perdue à une étape ultérieure. Deuxièmement, étant donné une preuve mathématique, un mathématicien peut dériver une contradiction à partir de la supposition que l'énoncé déjà prouvé ne le sera pas à une étape ultérieure quelconque¹⁰.

¹⁰ Pour un développement sur l'intuitionisme, voir le ch. 5 de M. van Atten et G. Heinzmann.

6.2 L'antiréalisme de Dummett

Avec ces précisions concernant les preuves en mémoire, revenons maintenant au contenu métaphysique ou ontologique de la conception platoniste mise à l'épreuve par le dilemme de Benacerraf pour prendre en compte la défense de l'antiréalisme proposée par Michael Dummett. Dummett a défendu l'idée que l'approche sémantique de la querelle du réalisme en philosophie des mathématiques révèle le contenu non métaphorique du débat sur le platonisme (à supposer, bien sûr, que le platonisme, en tant que thèse métaphysique sur l'existence indépendante des objets mathématiques repose sur une analogie avec le cas des objets physiques ordinaires). Dummett a défendu cette conception in Dummett [1973], mais son approche de la logique et des mathématiques intuitionistes, ainsi que des aspects les plus généraux de la perspective constructiviste, aide également à en saisir les attendus (voir Dummett [1977 (2nd Edition 2000)]). La réponse antiréaliste à la composante sémantique du dilemme (la vérité doit être contrainte par la prouvabilité en principe) est la clé de la réponse antiréaliste à sa composante épistémologique (l'accessibilité aux objets mathématiques n'est rien d'autre que la capacité à trouver des preuves, au moins en principe, autrement dit des justifications en faveur d'assertions mathématiques qui, prises au pied de la lettre, impliquent une quantification sur (et une référence à) ces objets). L'analogie avec le cas des objets physiques étant fautive (voir les remarques de Linnebo rapportées dans la section 1.), l'idée directrice est que notre accès aux objets mathématiques consiste dans la recherche de preuves, dans la vérification que des preuves présumées sont bien des preuves en bonne et due forme, et dans la découverte de nouvelles preuves, bien que l'antiréaliste à la Dummett ne

s'engage nullement à la conception brouwérienne des preuves comme constructions mentales du sujet créatif.

Autrement dit, l'antiréaliste à la Dummett défend conjointement deux positions, l'une de nature heuristique, l'autre répondant directement au dilemme de Benacerraf. La première consiste en un dévoilement du contenu proprement sémantique de la dispute sur la nature des objets mathématiques. La deuxième répond à la critique de Benacerraf selon laquelle l'attribution aux énoncés mathématiques de conditions dont nous savons qu'elles sont réalisées lorsqu'elles le sont, ne permet pas de les rapporter à une analyse montrant que ces conditions sont bel et bien les conditions auxquelles ces énoncés sont vrais à la Tarski. Elle répond également à la formulation du dilemme proposée par Field selon laquelle, puisque nous ne pouvons expliquer comment nos croyances mathématiques pourraient refléter des faits abstraits, nous devons conclure que ces croyances ne sont pas fiables.

La réponse dummettienne consiste à objecter qu'à moins de pouvoir montrer que la vérité mathématique peut aller au-delà de la prouvabilité en principe, nous devons nous en remettre à l'idée que si les énoncés mathématiques sont vrais, c'est qu'ils sont prouvables en principe. Autrement dit, il n'y a *pas* de conditions de vérité transcendantes. En ce qui concerne les objets de nos croyances mathématiques, ils ne peuvent, pour reprendre l'expression de Field, être « lointains ». Si de quelconques faits doivent être reflétés par nos croyances mathématiques, ils doivent, de par la nature même de la connaissance mathématique, se rapporter à ce que nous sommes capables de démontrer en tant qu'humains à la recherche de justifications et de conditions d'assertabilité pour les énoncés mathématiques. Cette conception prend ses origines dans une interprétation de la doctrine wittgensteinienne de la signification comme usage, selon une

interprétation étroite de l'usage en termes d'apprentissage du langage mathématique, ainsi qu'en un rejet du principe sémantique de bivalence (tout énoncé est soit vrai, soit faux, de manière déterminée), justifiant le rejet concomittant de la loi logique du tiers exclu ($p \vee \neg p$), une loi invalide du point de vue intuitionniste.

6.3 Le finitisme strict

Certains philosophes ont fait valoir que la notion de prouvabilité en principe est trop faible et que la notion de vérité mathématique en cause dans l'antiréalisme doit être contrainte par la notion plus forte de prouvabilité *effective*. Autrement dit, un antiréaliste conséquent doit, soit défendre le finitisme strict (Wright [1982]), soit, en ce qui concerne les conséquences révisionnistes, adopter une logique sous-structurelle, la révision intuitionniste restant trop faible (Dubucs et Marion [2003]).

La motivation en faveur du durcissement de la position antiréaliste, tant en ce qui concerne la sémantique qu'en ce qui concerne le révisionisme logique, est que l'effectivité et la faisabilité sont les critères conformément auxquels nous devons instruire le cas des principes sémantiques comme le principe de bivalence, et celui des notions connexes de conséquence et de validité logiques.

Pourquoi l'effectivité et la faisabilité sont-elles importantes, et quel rôle jouent-elles ici, aussi bien pour la philosophie de la logique que pour la philosophie des mathématiques? En particulier, la position antiréaliste forte ou intransigeante offre-t-elle une réponse au dilemme plus convaincante que la réponse antiréaliste traditionnelle? Après tout, Benacerraf pourrait objecter que la situation est maintenant pire que celle originellement décrite. Le fini-

tiste strict et l'antiréaliste intransigeant ont analysé le concept de preuve de manière à le contraindre avec des notions d'examen exhaustif d'ensemble [*surveyability*], d'effectivité et de faisabilité tellement fortes qu'il est plus difficile encore de relier ces conditions (à savoir les conditions auxquelles nous sommes capables de fournir des preuves en un temps fini en situation sous-optimale) avec les conditions de vérité à la Tarski.

Les finitistes exigent que les preuves puissent être exhaustivement examinées, les faisabilistes que la notion de conséquence logique soit contrôlée en fonction d'une analyse stricte de nos carences cognitives, notamment en ce qui concerne nos capacités à effectuer des inférences déductives justifiées non seulement par la signification que nous avons attribué aux constantes logiques, mais par les règles structurelles que nous avons choisies pour la logique des propositions et des prédicats.

Il n'y a pas d'accord unanime sur la manière dont la notion de faisabilité doit être analysée. Le finitiste strict jugera qu'il est illégitime de nous projeter au-delà de ce que nous sommes capables de réaliser effectivement en un temps fini. Le partisan des logiques sous-structurelles, notamment de la logique linéaire, insistera sur le fait que les formules des calculs sous-structurels ont deux avantages : ce sont des occurrences singulières (*tokens*) plutôt que des types, et des actes plutôt que des objets inertes. La question de savoir si des règles structurelles comme l'afaiblissement (*weakening*) ou la contraction saisissent convenablement les éléments cruciaux de l'idéalisation en cause dans la logique classique plutôt que les règles d'introduction et d'élimination qui fixent la signification de ses constantes logiques reste ouverte. Par parité, la question de savoir comment procéder à l'élimination de cette idéalisation de manière à être certain de ne jamais être dans l'illusion de posséder une connaissance que nous ne possédons pas en réalité le reste

également.

En ce qui concerne le défi lancé par Benacerraf au platonisme, notons que les réponses de nature antiréaliste, qu'elles soient faibles ou fortes, indiquent clairement que la composante épistémologique du dilemme comporte des éléments ressortissant à la logique du premier ordre et à la théorie de la preuve que nous ne pouvons éliminer du débat¹¹.

7. Réponses intuitionnelles

Les réponses intuitionnelles dans leur ensemble reposent sur l'idée qu'une faculté particulière, l'intuition, nous donne accès aux objets mathématiques et à leurs propriétés, et constitue le fondement de la connaissance mathématique. Il y a néanmoins des différences marquantes dans la manière dont cette notion peut être analysée. Certaines sont en conflit avec l'idée que la faculté en question nous permet de prendre conscience de ces objets ou d'en prendre connaissance « comme la perception ordinaire nous permet de prendre connaissance des objets concrets ordinaires et de leurs propriétés » (voir Hale et Wright [2002] et la section 3.). Il sera utile de commencer par l'arrière-plan kantien de ces analyses pour prendre la mesure de ces différences.

7. 1 Arrière-plan historique. Kant sur l'intuition

D'une certaine manière, Kant propose un analogue du dilemme de Benacerraf exprimé en termes de conflit entre l'intuition et la connaissance *a*

¹¹ Pour un développement sur le finitisme, voir le ch. 5 de M. van Atten et G. Heinzmann.

priori. Pour Kant, la seule intuition que nous puissions avoir est l'intuition sensible, autrement dit l'intuition d'objets qui nous sont donnés soit par la perception, soit par l'imagination. Mais nous avons également une connaissance pure, notamment dans le cas des mathématiques. Le problème de Kant est de réconcilier l'idée qu'il n'y a qu'un seul genre d'intuition, l'intuition sensible, avec l'idée que nous possédons une connaissance mathématique *a priori*. Kant fait valoir que le rôle de l'intuition sensible est d'instantier ou d'exemplifier des concepts qui, en tant qu'ils jouent un rôle dans la connaissance discursive, ne peuvent jamais garantir une certitude intuitive ou une évidence démonstrative, quand bien même nos jugements mathématiques seraient apodictiques. Du point de vue kantien, les mathématiques ne portent pas sur des objets spécifiques ou *sui generis*. Elles sont tributaires en un sens constitutif des conditions auxquelles les instantiations de leurs concepts sont possibles. Il peut donc sembler que le problème kantien soit très différent du dilemme qui nous occupe ici, ne serait-ce que parce qu'il n'y a en réalité *aucun* objet non causal, inaccessible à l'expérience sensible, dont nous devrions rendre compte en termes ontologiques et en termes épistémologiques. Dans la mesure où Kant nie explicitement que nous ayons une intuition intellectuelle ou non sensible, qui viendrait en quelque sorte jouer son rôle au moment opportun où nous sommes engagés dans l'application des mathématiques, il nie également, tout au moins implicitement, que nous ayons une intuition particulière, d'un genre différent, de ce que nous avons appelé ici les « objets abstraits ».

Il y a néanmoins une forme du dilemme qui, pour sa composante sémantique, ne requiert pas une analyse tarskienne ou vériconditionnelle du discours mathématique impliquant référence à (et quantification sur) des objets d'un genre particulier. Si l'analyse de l'intuition requiert la présence

préalable des objets, ce qui rend la connaissance mathématique possible pour nous est très exactement ce qui nous est refusé si nous devons également soutenir que cette connaissance est *a priori*, autrement dit que les assertions mathématiques ne sont pas seulement vraies *simpliciter*, mais nécessairement vraies, et que leur vérité n'est pas seulement connue *simpliciter*, mais connue *a priori*, sans recours à l'expérience effective ou possible. Si les deux exigences doivent être satisfaites, il semble impossible d'expliquer comment nous appliquons les mathématiques avec succès et pourquoi la connaissance que nous appliquons est pure et *a priori*.

Kant (Kant [1783], Kant [1944], §9) propose la solution suivante : « Il n'y a qu'un moyen pour l'intuition [*Anschauung*] d'anticiper l'actualité des objets et d'être une connaissance *a priori*, à savoir : que mon intuition ne contienne rien de plus que la forme de la sensibilité, anticipant dans ma subjectivité toutes les impressions actuelles par lesquelles je suis affecté par des objets. »

Si notre analyse de la vérité mathématique comme apodictique doit se confronter à la question de l'applicabilité, et si notre analyse de la connaissance mathématique comme *a priori* doit s'accomoder de l'intuition *sans* la présence préalable des objets mathématiques, la seule solution pour que les deux exigences soient satisfaites (l'exigence sémantique et l'exigence épistémologique), est qu'une chose de nature purement formelle (la forme de la sensibilité) livre exhaustivement le contenu de notre intuition de manière que ce que nous connaissons, à savoir des propositions mathématiques nécessairement vraies, *doit* être justifié indépendamment de toute expérience sensible, réelle ou possible.

7.2 Gödel

On cite souvent comme expression marquante du platonisme gödélien les remarques sur la « perception des objets de la théorie des ensembles » dans lesquelles Gödel propose une analogie entre l'expérience sensible ou physique et la perception desdits objets, fondée en partie sur le fait que « les axiomes [de la théorie des ensembles] s'imposent à nous comme étant vrais » (Gödel [1947], Gödel [1964]). Une interprétation trop stricte de cette analogie en termes de perception avec, pour données sensorielles ou perceptuelles idoines les objets abstraits de la théorie (ensembles, uréléments, cardinaux, etc.) est certainement insuffisante. Benacerraf remarque à bon droit que l'analogie est au mieux superficielle (Benacerraf et Putnam [1983], p. 416). Après tout, pour Gödel, cette perception des objets abstraits de la théorie des ensembles dépend en partie de la reconnaissance d'une *vérité*. Pour cette raison, et quoi qu'il en soit par ailleurs de la manière dont elle « s'impose », sa conception platoniste de la théorie est, par exemple, distincte du platonisme physicaliste de Maddy (Maddy [1980]). Le problème tient ici en partie au fait qu'il peut sembler que Gödel considère le cas des énoncés empiriques comme un cas paradigmatique de référence assurée ou réussie, de manière que celle des énoncés mathématique en termes d'états de choses bénéficie elle aussi, par analogie, d'un modèle causal (voir Maddy [1990]). Il est plus prudent de suggérer comme le fait Bill Tait (Tait [1986]) que Gödel ne défend en réalité aucun modèle ou paradigme particulier, de manière que, soit le cas ordinaire et le cas mathématique sont problématiques au même titre, soit aucun ne l'est plus que l'autre. Nous pouvons en tous cas rappeler que Gödel esquisse par ailleurs un argument d'ignorance contre l'idée que nous pourrions créer

librement les théories mathématiques et leurs objets abstraits. Si nous avions la capacité de créer les mathématiques, soit *ex nihilo*, soit par une introspection de nos esprits, nous devrions connaître toutes les propriétés de ses objets, et le fait incontournable est que nous sommes dans un état d'ignorance partielle à ce sujet. Si les mathématiques étaient le résultat de notre propre création, notre ignorance de ce qui apparaît comme étant des objets abstraits selon une lecture littérale des théories, ne pourrait s'expliquer que « par notre incapacité à former une conception claire de ce que nous avons créé (ou peut-être par la difficulté inhérente à des calculs trop complexes) » (Gödel [1995] : 314). Cette conception de la nature et de l'origine de la connaissance mathématique est fautive, la raison étant que « les mathématiques modernes ont accompli un degré incomparable d'exactitude qui n'a finalement facilité en rien la solution des problèmes mathématiques » (Gödel *loc. cit.*). S'il y a ici un argument en faveur du platonisme, c'est que la persistance de propositions indécidables *pro tempora* comme la conjecture de Goldbach, que notre connaissance mathématique ne nous permet ni de démontrer ni de réfuter, vient au secours de la conception platoniste d'une réalité mathématique qui, même si elle n'est pas coupée de tout lien avec le travail des mathématiciens, ne peut purement et simplement résulter de ce travail. Il est possible de concevoir cet aspect du platonisme de Gödel comme une autre manière de dévoiler le contenu non métaphorique d'une analogie illégitime et fautive.

7.3 Parsons

Dans la voie gödélienne, Parsons propose également une analyse intuitionnelle de la connaissance mathématique. Sa position repose sur une

distinction entre intuition *de* et intuition *que*. Au niveau le plus simple et le plus fondamental, nous avons l'intuition arithmétique d'une suite de barres I, II, III, etc., sans pour autant avoir l'intuition, pas même indirecte, que la suite ordonnée infinie de suites finies de barres est isomorphe à l'ensemble des entiers naturels. Au niveau immédiatement supérieur, nous avons des propositions singulières comme « II est le successeur de I ». Ces propositions portent sur des types. Parsons analyse la connaissance que II est le successeur de I comme étant justifiée par une intuition singulière (Parsons [1979], p.105). Nous avons bien affaire ici à une proposition générale, mais uniquement dans la mesure où elle a des implications pour n'importe quelle instance ou exemplaire des symboles. Nous passons donc des intuitions *de* aux intuitions *que* parce que nous considérons chaque instance de la situation et de l'assertion qui lui correspond comme paradigmatique.

Mais il y a également le cas des propositions portant directement sur les types, comme « chaque suite de barres peut être augmentée d'une barre supplémentaire ». Ces suites ont dans leur portée un nombre indéfini de types *différents* (Parsons *op. cit.* : 105). Aucune perception ou donnée sensorielle n'est ici requise, qui jouerait le rôle de garantie intuitionnelle pour ces propositions. Comme le note Parsons, l'idée que nous avons une intuition des types « affronte de sérieuses objections, soit à cause du caractère intemporel et non causal des types en tant qu'entités abstraites, soit à cause de leur incomplétude » (Parsons *op. cit.*, p.109). Il nous faut dans ce cas imaginer une suite arbitraire de barres, soit comme un objet vague, soit de manière que sa structure interne soit sans pertinence. Parsons remarque que ces produits de l'imagination ou *Gedankenexperimente* jouent le rôle de garantie (de « vérification » dans la terminologie de Parsons) des énoncés généraux portant sur les types. Ils jouent ce rôle uniquement si certaines

conditions concernant la manière dont une suite arbitraire de barres *doit* être imaginée sont satisfaites. Dans ce cas, notamment, soit de manière vague, soit de manière que sa structure interne soit « vue » ou « comprise » comme étant sans pertinence.

Parsons reconnaît que le problème de l'atemporalité des types est de nature épistémologique. Les types tombent dans la catégorie des objets abstraits par le simple fait qu'ils n'occupent aucune région de l'espace-temps. Nous sommes donc redevables d'une explication de la manière dont nous connaissons des vérités à propos des types par le biais de la perception ou de l'intuition de leurs exemplaires, autrement dit des vérités qui vaudraient pour n'importe lequel d'entre eux. Le dilemme de Benacerraf réapparaît à point nommé, que l'intuition repose sur l'existence des objets (dans le cas où nous percevons des suites d'exemplaires de barres) ou non (dans le cas où nous imaginons une suite arbitraire d'exemplaires de barres dénuée de toute structure interne particulière).

8. Conclusion

Nous voudrions conclure par quelques remarques sur l'importance et la portée future du dilemme de Benacerraf. D'un point de vue historique, le dilemme est tributaire de l'intérêt pour les questions fondationnelles longtemps jugées centrales pour la philosophie des mathématiques. L'éloignement progressif de ces préoccupations à la fin du XX^{ème} et au début du XXI^{ème} siècles, où la question de la nature de l'explication mathématique, et où la description et l'analyse de la pratique mathématique, occupent le devant de la scène, pourrait donner l'impression que le dilemme appartient au passé. Il n'en est rien.

Rappelons en effet que la notion de preuve joue un rôle central dans ces nouveaux débats. Qu'attendons-nous des preuves mathématiques? En partie à cause de l'insatisfaction face à l'utilisation croissante de la démonstration automatisée des théorèmes, en partie à cause des difficultés rencontrées par les réponses nominalistes aux arguments d'indispensabilité, on a fait valoir que les preuves doivent faire plus que nous convaincre que les énoncés démontrés sont vrais. Elles devraient également, quand c'est possible, expliquer pourquoi ils le sont.

Le premier problème a conduit les philosophes et les historiens à étudier les relations entre des concepts mathématiques appartenant à des domaines divers et à repérer des liens conceptuels inattendus (voir par exemple Manders [1989]). En ce qui concerne le platonisme mis à mal par le dilemme, notons l'importance de l'attention récente portée à la question de l'impureté des preuves (voir Detlefsen et Arana [2011] et Arana [2017]). Les preuves des théorèmes sont pures lorsqu'elles recourent seulement aux notions intrinsèques à leur domaine d'origine pour établir leurs résultats (sur la pureté des preuves, voir le chapitre 9 d'Arana de ce volume). Leur degré d'impureté augmente à mesure qu'elles empruntent des notions et des méthodes à des domaines extrinsèques, distants ou étrangers. Quiconque s'attaque à une résolution du dilemme doit prendre au sérieux cet aspect. L'analyse combinatoire, dont la vertu principale est de prendre en compte les procédures qui justifient nos croyances, ne peut nier la pertinence épistémologique de la pureté et de l'impureté des preuves. Le dilemme, aussi bien dans sa forme originelle que sous la reformulation à la Field, se confronte déjà au fait que les mathématiciens peuvent chercher des preuves qui vont *au-delà* de la simple justification, soit parce qu'elles doivent fournir des méthodes pour construire les objets, soit parce qu'il est requis qu'elles

soient effectives, c'est-à-dire humainement implémentables. Dans un cas comme dans l'autre, c'est la *valeur* épistémique des théorèmes qui est en cause. C'est cette même valeur qui est en jeu dans la question de savoir jusqu'où, et comment, la connaissance mathématique est affectée par l'impureté.

Bibliographie

A. Arana : The changing practices of proof in mathematics. *Metascience*, 26(1):131–135, 2017.

J. Azzouni : *Deflating Existential Commitment : A Case for Nominalism*. OUP USA, 2004.

A. Baker : Are there genuine mathematical explanations of physical phenomena ? *Mind*, 114(454) : 223–238, 2005.

A. Baker : Mathematical explanation in science. *British Journal for the Philosophy of Science*, 60(3) : 611–633, 2009.

M. Balaguer : A fictionalist account of the indispensable applications of mathematics. *Philosophical Studies*, 83(3) : 291–314, 1996.

P. Benacerraf : What numbers could not be. *Philosophical Review*, 74(1) : 47–73, 1965.

P. Benacerraf : Mathematical truth. *Journal of Philosophy*, 70(19) : 661–679, 1973.

P. Benacerraf : Mathematical truth (January 1968 version). In F. Pataut, ed. : *Truth, Objects, Infinity : New Perspectives on the Philosophy of Paul Benacerraf*, pp. 263–287. Springer Verlag, Logic, Epistemology and the Unity of Science Series, 2016.

P. Benacerraf and H. Putnam, eds. *Philosophy of Mathematics Selected Readings*. Cambridge University Press, 1983.

P. Bernays : Sur le platonisme dans les mathématiques. *L'Enseignement Mathématique*, 34 : 52–69, 1935.

G. Boolos : Is Hume's Principle Analytic? In R. G. Heck, ed. : *Language, Thought and Logic*, pp. 245–61. Clarendon Press, Oxford, 1997.

L. E. J. Brouwer : Intuitionism and formalism. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 20 : 81–96, 1913.

L. E. J. Brouwer : Consciousness, philosophy, and mathematics. *Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy*, 2 : 1235–1249, 1949.

J. Clarke-Doane : What is the Benacerraf Problem ? In F. Pataut, ed. : *New Perspectives on the Philosophy of Paul Benacerraf : Truth, Objects, Infinity*, pp. 17–43, 2016.

J. Clarke-Doane : *Morality and Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2020.

M. Colyvan : There is no easy road to nominalism. *Mind*, 119(474) : 285–306, 2010.

M. Colyvan : *The Indispensability of Mathematics*. Oxford University Press, 2001.

R. T. Cook : *The Arché Papers on the Mathematics of Abstraction*. Springer, 2007.

R. Dedekind : *Was Sind Und Was Sollen Die Zahlen ?* Vieweg, Braunschweig, 1888.

M. Detlefsen and A. Arana : Purity of methods. *Philosophers' Imprint*, 11, 2011.

J. Dubucs and M. Marion : Radical anti-realism and substructural logics. In A. Rojszczak, J. Cachro and G. Kurczewski, eds : *Philosophical Dimensions of Logic and Science*, pp. 235–249. Kluwer Academic Publishers, 2003.

M. Dummett : The philosophical basis of intuitionistic logic. In M. Dummett : *Truth and Other Enigmas*, pp. 215–247. Cambridge : Harvard UP, 1973.

M. Dummett : *Elements of Intuitionism*. Oxford University Press, 1977 (2nd Edition 2000).

P. A. Ebert and M. Rossberg : *Abstractionism : Essays in Philosophy of Mathematics*. Oxford University Press UK, 2016.

H. Field : *Science Without Numbers*. Princeton University Press, 1980 (First Edition, Second Edition 2016, Oxford University Press).

H. Field : *Realism, Mathematics & Modality*. Blackwell, 1989.

H. Field : Recent debates about the a priori. In T. S. Gendler et J. Hawthorne, eds : *Oxford Studies in Epistemology Volume 1*. Oxford University Press, 2005.

G. Frege : *Die Grundlagen der Arithmetik : eine logische mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Koebner., Breslau, 1884.

G. Frege : *Die Grundgesetze der Arithmetick*, vol. I-II. H. Pohle., Jena, 1893-1903.

G. Frege : Lettre à Hilbert du 29 décembre 1899. In F. Rivenc et P. de Rouilhan, édés : *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914)*, pp. 225–230. Payot, 1992.

P. Garavaso : On Frege's alleged indispensability argument. *Philosophia Mathematica*, 13 (2) : 160–173, 2005.

K. Gödel: What is Cantor's continuum problem? In S. Feferman, J. Dawson and S. Kleene, eds : *Journal of Symbolic Logic*, pp. 176–187. Oxford University Press, 1947.

K. Gödel : What is Cantor's continuum problem? (1964 version). In P. Benacerraf and H. Putnam, eds. : *Philosophy of Mathematics : Selected Readings*, pp. 258–273. Cambridge University Press, Englewood Cliffs, 1964.

K. Gödel:[1951] Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and their Implications. In S. Feferman, ed. : *Collected Works*. Oxford University Press, 1995.

A. I. Goldman : A causal theory of knowing. *Journal of Philosophy*, 64(12) : 357–372, 1967.

N. Goodman and W. V. Quine : Steps toward a constructive nominalism. *Journal of Symbolic Logic*, 12(4) : 105–122, 1947.

B. Hale and C. Wright : *Reason's Proper Study : Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*. Oxford University Press, 2001.

B. Hale and C. Wright : Benacerraf's Dilemma Revisited. *European Journal of Philosophy*, 10(1) : 101–211, 2002.

G. Hellman : *Mathematics Without Numbers : Towards a Modal-Structural Interpretation*. Oxford University Press, Oxford, 1989.

D. Hilbert : On the infinite. In P. Benacerraf et H. Putnam, eds : *Philosophy of Mathematics : Selected Readings*, pp. 183–201. Cambridge University Press, 2^e édn, 1984.

G. Hunter : *Metalogic : An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic*. Berkeley : University of California Press, 1971.

I. Kant : *Kritik der reinen Vernunft*. Hartknoch, Riga, 1781.

I. Kant : *Prolegomena Zu Einer Jeden Künftigen Metaphysik, Die Als Wissenschaft Wird Auftreten Können*. Felix Meiner Verlag, 1783.

I. Kant : *Kritik der reinen Vernunft*. Hartknoch, Riga, 2nd édn, 1787.

I. Kant : *Critique de la raison pure*. Presses Universitaires de France, Paris, 1944.

M. Leng : *Mathematics and Reality*. Oxford University Press, 2010.

D. Liggins : Epistemological objections to platonism. *Philosophy Compass*, 5(1) : 67–77, 2010.

Ø. Linnebo : Epistemological challenges to mathematical platonism. *Philosophical Studies*, 129(3):545–574, 2006.

Ø. Linnebo : Platonism in the philosophy of mathematics. In E. N. Zalta, ed. : *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2009.

P. Maddy : Perception and mathematical intuition. *Philosophical Review*, 89(2) : 163–196, 1980.

P. Maddy : Physicalistic platonism. In A. D. Irvine, ed. : *Physicalism in Mathematics*, pp. 259–289. Springer Netherlands, Dordrecht, 1990.

P. Maddy : Indispensability and practice. *Journal of Philosophy*, 89(6) : 275–289, 1992.

P. Mancosu : *Abstraction and Infinity*. Oxford University Press, 2016.

K. Manders : Domain extension and the philosophy of mathematics. *Journal of Philosophy*, 86(10) : 553–562, 1989.

J. Melia : Weaseling away the indispensability argument. *Mind*, 109(435) : 455–480, 2000.

M. Panza and A. Sereni : *Plato's Problem : An Introduction to Mathematical Platonism*. Palgrave-Macmillan, 2013.

M. Panza and A. Sereni : The varieties of indispensability arguments. *Synthese*, 193 (2) : 469–516, 2016.

C. Parsons : Mathematical intuition. *Proceedings of the Aristotelian Society*, 80 : 145– 168, 1979.

C. Parsons : Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought. *Bulletin of Symbolic Logic*, 1(1) : 44–74, 1995.

C. Parsons : *Mathematical Thought and its Objects*. Cambridge University Press, 2007.

S. Psillos : *Scientific Realism : How Science Tracks Truth*. Routledge, Milton Park, Abingdon, Oxfordshire, 1999.

H. Putnam : *Philosophy of Logic*. London : Allen & Unwin, 1971.

W. V. O. Quine : On what there is. *Review of Metaphysics*, 2(1) : 21–38, 1948.

A. Rayo : *The Construction of Logical Space*. Oxford University Press, 2013.

E. H. Reck and M. P. Price : Structures and structuralism in contemporary philosophy of mathematics. *Synthese*, 125(3) : 341–383, 2000.

M. Resnik : Scientific vs. mathematical realism : The indispensability argument. *Philosophia Mathematica*, 3(2) : 166–174, 1995.

M. D. Resnik : *Mathematics as a Science of Patterns*. New York ; Oxford University Press, 1997.

A. Sereni : Frege, indispensability, and the compatibilist heresy. *Philosophia Mathematica*, 23(1) : 11–30, 2015.

A. Sereni : A dilemma for Benacerraf's dilemma? In F. Pataut, ed. : *New Perspectives on the Philosophy of Paul Benacerraf : Truth, Objects, Infinity*, pp. 93–125. 2016.

S. Shapiro : *Philosophy of Mathematics : Structure and Ontology*. Oxford University Press, 1997.

E. Sober : Mathematics and indispensability. *Philosophical Review*, 102(1) : 35–57, 1993.

W. W. Tait : Wittgenstein and the 'skeptical paradoxes'. *Journal of Philosophy*, 83 (September) : 475–488, 1986.

L. Wittgenstein : *Philosophical Investigations*. Wiley-Blackwell, 1953.

C. Wright : Strict finitism. *Synthese*, 51(2) : 203–282, 1982.

C. Wright : *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen University Press, 1983.

S. Yablo : Go figure : A path through fictionalism. *Midwest Studies in Philosophy*, 25 (1) : 72–102, 2001.

S. Yablo : Abstract objects : A case study. *Philosophical Issues*, 12(1) : 220–240, 2002.

E. N. Zalta : Natural numbers and natural cardinals as abstract objects : A partial reconstruction of Frege's *Grundgesetze* in object theory. *Journal of Philosophical Logic*, 28(6) : 619–660, 1999.