



HAL
open science

Matematica Actualiara (Actuarial Mathematics)

Vasile Gavrus, Adinel Gavrus

► **To cite this version:**

Vasile Gavrus, Adinel Gavrus. Matematica Actualiara (Actuarial Mathematics). 2000, 973-99593-4-2.
hal-03417983

HAL Id: hal-03417983

<https://hal.science/hal-03417983>

Submitted on 15 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



S.C. **TIPOGRAFIA
EVRIKA EURODIPS**
GALAȚI S.R.L.

Str. UNIRII Nr. 177A; Tel/Fax: 036/462799; Cod fiscal: R 3118567; Cont: 251100996105497; BRD Sucursala Galați

EXECUTĂ
ÎN CONDIȚII
GRAFICE
DEOSEBITE

- ◆ imprimare administrative
- ◆ etichete
- ◆ calendare
- ◆ cărți și broșuri
- ◆ reviste și ziare
- ◆ bilete de transport
- ◆ caiete de orice tip
- ◆ diverse

CONTACTAȚI-NE ȘI NU VEȚI REGRETA!

Ing. GĂVRUȘ Vasile

Dr. Ing. GĂVRUȘ Adinel

MATEMATICĂ

ACTUALIARĂ

$$I_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t}$$

Ing. GĂVRUȘ Vasile

Dr. Ing. GĂVRUȘ Adinel

MATEMATICĂ

ACTUALIARĂ

$$I_t = \frac{(1 + i)^t - 1}{i \cdot (1 + i)^t}$$

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale

GĂVRUȘ, VASILE

Matematică actualiară / Găvrus Vasile, Găvrus Adinel.

Galați : / Mongabit, 2000

p.; cm.

ISBN 973-99593-4-2

I. Găvrus, Adinel

51

PREFATA

Continutul prezentei lucrări nu are la bază un material bibliografic deosebit, ci câteva fascicule editate de fostul Centru de Organizare și Cercetare în Construcții (C.O.C.C. - S.A.) de pe lângă Departamentul Construcțiilor și Lucrărilor Publice, fapt ce îi conferă un mod mai personal de a prezenta temele tratate. Nu prezentăm lucruri necunoscute și nici nu avem pretentia că am făcut o descoperire în relațiile din capitolele ce urmează dar nădăjduim că, lipsa unor surse de documentare în domeniu mai la îndemâna agenților economici, să confere lucrării un anumit interes. În justificarea matematică a relațiilor am urmărit să convingem cititorul că formulele determinate constituie o garanție de netăgăduit, că rezultatele calculelor corect făcute, utilizând factorii determinanți, sunt incontestabile.

Lucrarea, așa cum se va vedea, are mai degrabă un caracter didactic, adresându-se agenților economici cu studii medii și inginerilor, care au avut mai puține șanse de a fi instruiți în acest sens. Nu se adresează economistilor, care pot avea o poziție critică a modului de prezentare a subiectelor, mai ales că, din dorința de a lărgi sfera de înțelegere a acestora, am căutat să nu lăsăm loc de prea multe întrebări.

Hotărârea de a publica acest material am luat-o după ce câțiva specialiști în domeniu, cu care ne-am consultat, ne-au sugerat această idee, asociind această necesitate cu explozia ce se produce în evoluția creșterii numărului de agenți economici care, în relațiile lor bancare, ar putea beneficia în mod util de cunoștințele ce le oferă prezenta lucrare.

Mulumim tuturor celor care au avut răbdarea să analizeze expunerea inițială a acestui material și ale căror sugestii și recomandări, au condus la încurajarea noastră de a finaliza o lucrare care poate va fi căutată.

Deasemenea, ne cerem scuze de la cititori, dacă nu am reușit să explicităm unele lucruri în suficientă măsură, deși am urmărit în mod deosebit acest lucru.

Aducem un pios omagiu regretatului prof. univ. dr. ec. Ion Cămășoiu, care a expertizat această lucrare și al cărui calificativ la adresa conținutului acestei lucrări a constituit pentru noi îndemnul major de a publica acest material.

Vom ști să apreciem deasemenea unele sugestii care vor viza măsuri de îmbunătățire a conținutului lucrării astfel că, în măsura în care aceste probleme vor găsi interes în rândul cititorilor, suntem dispusi să colaborăm pentru o ediție viitoare îmbunătățită.

TABLA DE MATERII

INTRODUCERE	1
1. DOBANZI BANCARE	5
1.1 FACTORUL DE DOBANDA COMPUSA	5
1.1.1 Determinarea factorului de dobanda compusa	5
1.2 TRANSFORMAREA RATEI DOBANZII SAU A RATEI RENTABILITATII DINTR-O UNITATE DE TIMP IN ALTA	7
1.3 DETERMINAREA RATEI DOBANZII UNEI DIVIZIUNI DE TIMP MAI MICI CUNOSCAND RATA DOBANZII PE O DIVIZIUNE MAI MARE DE TMP UTILIZAND COEFICIENTII DIN TABELE	9
1.4 FACTORUL DE ACTUALIZARE	12
1.4.1 Determinarea factorului de actualizare	13
1.5 FACTORUL DE COMPUNERE PENTRU UN AN	14
1.5.1 Determinarea factorului de compunere	14
1.5.2 Observatii	20
1.6 FACTORUL DE AMORTIZARE	22
1.7 FACTORUL VALORII ACTUALE A UNEI ANUITATI	23
1.8 FACTORUL DE RECUPARARE A FONDURILOR	29
2. ACTUALIZARI BANCARE	34
2.1 GRUPA I	34
2.1.1 Factorul de dobanda compusa D_t	34
2.1.2 Factorul de actualizare V_t	34
2.2 GRUPA II	35

2.2.1	Factorul de compunere pentru un an B_{t_c} cu depuneri la $t=0$	35
2.2.2	Factorul de compunere pentru un an B_t cu depuneri la $t=1$	36
2.2.3	Factorul de amortizare A_t la $t=1$	36
2.2.4	factorul de amortizare A_{t_c} la $t=0$	36
2.3	GRUPA III	37
2.3.1	Factorul valorii actuale a unei anuitati I_t	37
2.3.2	Factorul de recuperare a fondurilor F_t	37
2.4	CALCULE DE ACTUALIZARI	37
2.4.1	Calcul de Actualizari a unor depuneri, incasari, plati sau venituri intr-un singur moment	38
2.4.1.1	Actualizare la $t=0$	38
2.4.1.2	Actualizare la $t=n$	39
2.5	CALCULUL DE ACTUALIZARE A UNOR DEPUNERI, INCASARI SAU PLATI SUB FORMA DE RATE PERIODICE SI IN VALORI CONSTANTE	40
2.5.1	Actualizare la timpul $t=0$	41
2.5.2	Actualizarea unor depuneri sau costuri la timpul $t=n$	43
2.6	INVESTITIE ACTUALIZATA	52
2.7	INDICATORI DE EFICIENTA A UTILIZARII RESURSELOR	55
2.7.1	Raportul venituri asupra costuri V/C	56
2.7.2	Beneficiul net actualizat BNA	60
2.8	RATA INTERNA DE RENTABILITATE RIR	61
3.	RENTABILITATE ECONOMICA	75
3.1	RATA DE RENTABILITATE ECONOMICA	76
3.2	DURATA DE RECUPERARE A CAPITALULUI FOLOSIND CALCULE DE ACTUALIZARE	85

4. INFLATIE SI REGRES ECONOMIC	89
4.1 SITUATIA CAND $i=0$ SI $j\neq 0$	91
4.2 SITUATIA CAND $i\neq 0$ SI $j\neq 0$	94
4.3 FACTORI DE DOBANDA INFLUENTATI DE RATA INFLATIEI	94
4.4 FACTORUL DE ACTUALIZARE INFLUENTAT DE INFLATIE	95
4.5 FACTORUL DE COMPUNERE PENTRU UN AN INFLUENTAT DE INFLATIE	97
4.6 FACTORUL DE AMORTIZARE INFLUENTAT DE INFLATIE	99
4.7 FACTORUL VALORII ACTUALE A UNEI ANUITATI INFLUENTAT DE INFLATIE	100
4.8 FACTORUL DE RECUPERARE A FONDURILOR SUB INFLUENTA RATEI INFLATIEI	102
4.9 ACTUALIZAREA IN CONDITII DE INFLATIE SI DE REGRES ECONOMIC	102
4.9.1 Actualizare normala	103
4.9.1.1 Actualizare cand $i=0$ si $j\neq 0$	103
4.9.1.2 Actualizare cand $i\neq 0$ si $j\neq 0$	105
4.10 ACTUALIZARE INCRUCISATA	111
4.10.1 Actualizari incrucisate la timpul $t=0$ pentru factorul de rentabilitate si la $t=n$ pentru factorul de inflatie	113
4.11 CALCULUL FACTORULUI DE ATENUARE A INFLATIEI, A PROFITULUI SI A RATEI REALE DE RENTABILITATE MASURAT IN VALORI DEVALORIZATE	114
4.12 FACTOR DE PAUPERIZARE SAU FACTOR DE FALIMENTARE	116
4.12.1 Determinarea factorului de pauperizare	116

4.13 RATA REALA DE RENTABILITATE IN CONDITII DE INFLATIE	117
4.14 RATA DE PAUPERIZARE SAU DE FALIMENTARE	117
4.14.1 Actualizari incrucisate la timpul $t=n$ pentru factorul de rentabilitate si la $t=0$ pentru factorul de inflatie	118
4.15 CALCULUL FACTORULUI DE ATENUARE A INFLATIEI, A PROFITULUI SI A RATEI REALE DE RENTABILITATE MASURATE IN VALORI NEDEVALORIZATE LA TIMPUL $t=n$	118
4.15.1 Factorul de atenuare	118
4.16 ACTUALIZAREA INCRUCISATA PENTRU FLUXURI CONSTANTE ANUALE DE CAPITAL	120
4.16.1 Actualizare la $t=0$	120
4.16.2 Actualizare la $t=n$	121
4.17 DOBANDA SI RATA NEGATIVA	128
4.17.1 Rata negativa a inflatiei	131
4.17.2 Cursul de schimb al leului	133
CONCLUZII	138

ANEXA

INTRODUCERE

În condițiile actuale, fiecare agent economic devine un deținător de capital, dar și un investitor. În prima calitate, este util ca agentul economic să cunoască avantajele și dezavantajele rulării capitalului sau menținerea lui într-o bancă cu o anumită dobândă sau ca actionar, cu o anumită rată de rentabilitate. În a doua calitate (ca investitor) agentul economic trebuie să cunoască azi dacă investiția pe care o face are o eficiență dorită după un timp bine stabilit, să știe să răspundă la întrebările: "Cât trebuie să investească azi pentru a atinge un scop propus?", "În cât timp și cu ce rate se rambursează investiția menținându-se rata profitului la nivelul propus?".

Fiecare formulă matematică prezentată, va fi urmată de exemple astfel încât, agentul economic să poată alege ușor formula sau factorul potrivit fenomenului economic analizat. În demonstrarea relațiilor matematice utilizate s-a plecat de la ideea de a urmări ce se întâmplă cu unitatea monetară pusă în diferite situații de transformare în timp, ca urmare a aplicării unei rate a dobânzii sau a unei rate procentuale de rentabilitate.

Rezultă că, formulele ce vor fi prezentate, sunt funcție de timpul t și de valoarea ratei dobânzii i , respectiv $f(i,t)$, unde:

i - rata dobânzii sau rata de rentabilitate în % pe an, pe lună sau pe zi;

t - durata în unități de timp întregi: ani, luni sau zile.

În condițiile menționate mai sus, se vor determina factori care, amplificați cu numărul de unități monetare utilizate în relația economică respectivă, vor duce la obținerea rezultatului real căutat.

Se menționează că, factorii ce urmează să fie deduși, sunt foarte des utilizați în calculele bancare, fapt pentru care sunt editate cataloage cu tabele cuprinzând o largă gamă de valori a acestor coeficienți, simplificând mult calculele de determinare a efectelor pe care le are rata dobânzii sau rata de rentabilitate asupra valorii unor încasări sau plăți.

Prezentarea explicită a acestor factori se adresează acelor agenți economici pentru care operațiile de acest gen se fac cu o frecvență atât de scăzută încât determinarea prin calcul a coeficienților nu ridică probleme de timp irosit, în lipsa tabelelor amintite.

Cu scopul de a reaminti unele operații matematice des utilizate, în ceea ce urmează, folosindu-ne de gruparea $(1+i)$ ca element de bază în majoritatea acestor relații, vom face câteva precizări și recomandări.

Pentru calcularea valorii $(1+i)^t$ se recomandă, în lipsa tabelor cu valorile deja calculate, utilizarea:

- tabelor logaritmice, știind că:

$$\log(1+i)^t = t \log(1+i)$$

- ridicarea la putere cunoscându-se că:

$$(1+i)^a \cdot (1+i)^b = (1+i)^{a+b}$$

si că:

$$\frac{(1+i)^a}{(1+i)^b} = (1+i)^{a-b}$$

- minicalculatorului de buzunar .

De asemenea, progresia geometrică stând la baza unor demonstratii în ceea ce urmează, consider oportun a fi reamintită si analizată mai în detaliu.

Prin definitie progresia geometrică reprezintă un sir de termeni, al căror rang ia valori de la 0 la n, asezati în ordine crescătoare sau descrescătoare

$$C_0, C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_n$$

încât câtul dintre orice termen si predecesorul său este egal cu r, ratia progresiei, astfel :

$$\frac{C_1}{C_0} = r ; \quad \frac{C_2}{C_1} = r ; \quad \frac{C_3}{C_2} = r \quad \dots ; \quad \frac{C_n}{C_{n-1}} = r$$

Simbolic, sirul progresiei se poate scrie (C_n) , cu proprietatea că:

$$C_n = C_{n-1} \cdot r$$

oricare ar fi $n \in (0, \infty)$ si $C_0 \neq 0$. Dacă raportăm termenii la primul termen, rezultă:

$$\frac{C_1}{C_0} = r ; \quad \frac{C_2}{C_0} = r^2 ; \quad \dots ; \quad \frac{C_k}{C_0} = r^k ; \quad \dots ; \quad \frac{C_n}{C_0} = r^n$$

si deci sirul se mai poate scrie si astfel:

$$C_0 ; C_0 \cdot r ; C_0 \cdot r^2 ; C_0 \cdot r^3 ; \dots ; C_0 \cdot r^k ; \dots ; C_0 \cdot r^n$$

valabil evident numai în conditia ca primul termen C_0 să fie nenul.

O altă formă de prezentare a sirului o obținem folosind rata unității, care este câtul dintre diferența a doi termeni consecutivi raportată la termenul cu rang mai mic, astfel:

$$\frac{C_n - C_{n-1}}{C_{n-1}} = i$$

unde i = rata unității, iar

$$C_n = C_{n-1} \cdot r$$

Inlocuind obținem:

$$\frac{C_{n-1} \cdot r - C_{n-1}}{C_{n-1}} = i \quad \Rightarrow \quad \frac{C_{n-1} \cdot (r - 1)}{C_{n-1}} = i$$

$$\Rightarrow r - 1 = i \Rightarrow r = 1 + i$$

deci sirul progresiei se mai poate scrie si astfel:

$$C_0 ; C_0 \cdot (1+i) ; C_0 \cdot (1+i)^2 ; \dots ; C_0 \cdot (1+i)^k ; \dots ; C_0 \cdot (1+i)^n$$

Cum $r \in \mathbb{R}$ poate fi pozitiv sau negativ, influențează semnul termenilor seriei astfel:

- $r < 0 \Rightarrow (1+i)^r < 0$ - termenii iau semnul lui r : dacă $C > 0$ și rangul termenilor este impar, și dacă $C < 0$ și rangul termenilor este par;
- $r < 1 \Rightarrow$ seria are termeni în descreștere și se numește serie geometrică descrescătoare;
- $r > 1 \Rightarrow$ seria are termeni în creștere și se numește serie geometrică crescătoare.

Scrind seria sub formă de sumă, obținem:

$$S_n = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n \quad (a)$$

Inmultim seria S_n cu r :

$$r \cdot S_n = r \cdot C_0 + r \cdot C_1 + r \cdot C_2 + \dots + r \cdot C_n$$

dar

$$r \cdot C_0 = C_1 ; r \cdot C_1 = C_2 ; \dots ; r \cdot C_k = C_{k+1}$$

deci

$$r \cdot S_n = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + r \cdot C_n \quad (b)$$

Scădem relația (a) din relația (b):

$$r \cdot S_n - S_n = (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + r \cdot C_n) - (C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n)$$

$$S_n \cdot (r-1) = r \cdot C_n - C_0$$

dar

$$C_n = C_0 \cdot r^n \Rightarrow S_n \cdot (r-1) = r \cdot C_0 \cdot r^n - C_0 \Rightarrow$$

$$S_n \cdot (r-1) = C_0 \cdot r^{n+1} - C_0 \Rightarrow S_n \cdot (r-1) = C_0 \cdot (r^{n+1} - 1) \Rightarrow$$

$$S_n = C_0 \cdot \frac{r^{n+1} - 1}{(r-1)}$$

Suma S_n se mai poate obține și pe următoarea cale:

- plecăm de la ecuația:

$$x^{n+1} - 1 = 0$$

- una din soluțiile acestei ecuații este $x_1 = 1$, în acest caz avem:

$$x^{n+1} - 1 = (x-1) \cdot f(x)$$

unde $f(x)$ este o funcție de gradul n ;

- socotind că $x_1 = x$, avem:

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = f(x)$$

Făcând împărțirea binoamelor rezultă:

$$\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = (x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)$$

Având seria

$$S_n = C_0 + C_0 \cdot r + C_0 \cdot r^2 + \dots + C_0 \cdot r^n$$

sau

$$S_n = C_0 \cdot (1 + r + r^2 + \dots + r^n)$$

este evident că:

$$C_0 \cdot \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$$

si deci:

$$S_n = C_0 \cdot \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Simbolurile cu care se vor face diferitele notatii sunt arbitrare, încercând pe cât posibil să sugereze scopul pentru care sunt utilizate.

1. DOBANZI BANCARE

1.1 FACTORUL DE DOBANDA COMPUSA

Acest factor ne ajută să calculăm valoarea pe care o obținem după t ani, dacă depunem la Bancă un capital de valoare C_0 în condițiile în care Banca acordă o rată a dobânzii de i % pe an.

Notăm valoarea capitalului pe care urmează să-l obținem peste t ani cu C_t în condițiile unei dobânzii de i %. Desigur că $C_t > C_0$, ceea ce înseamnă că, pentru a obține valoarea capitalului C_t acumulat după t ani, va trebui să înmulțim capitalul inițial cu un factor mai mare decât 1. Notând arbitrar acest factor cu D_t putem preciza formula:

$$C_t = C_0 \cdot D_t \quad (1.1)$$

1.1.1 Determinarea factorului de dobânda compusa

Mai sus am arătat că notăm capitalul pe care-l obținem peste t ani, în condițiile unei rate a dobânzii de i %, cu C_t .

Dacă depunem inițial la Bancă numai un leu, atunci $C_0 = 1$ și deci $C_t = 1 \cdot D_t$, rezultă că pentru a determina factorul D_t , trebuie să găsim valoarea pe care o va avea capitalul inițial de un leu, dacă i se aplică rata dobânzii " i " după t ani.

Analizând efectul aplicării dobânzii de la an la an, vom avea:

- anul 1 : $C_1 = (1 + 1 \cdot i) = (1 + i)$ deci, în primul an depunem 1 leu și la sfârșitul anului se mai adaugă dobânda $1 \cdot i$;

- anul 2 : $C_2 = (1 + i) + (1 + i) \cdot i = (1 + i) \cdot (1 + i) = (1 + i)^2$, în al doilea an avem suma de la sfârșitul primului an $(1 + i)$, la care se adaugă dobânda $(1 + i) \cdot i$ și, dând factor comun pe $(1 + i)$ între acești doi termeni, rezultă că

$$C_2 = (1 + i)^2$$

- anul 3 : $C_3 = (1 + i)^2 + (1 + i)^2 \cdot i = (1 + i)^2 \cdot (1 + i) = (1 + i)^3$

Se deduce că și pentru anul t ,

$$C_t = (1 + i)^t$$

Cum pentru $C_0 = 1$ avem $C_t = D_t$, rezultă că

$$D_t = (1 + i)^t \quad (1.2)$$

iar relația (1) devine:

$$C_t = C_o \cdot (1 + i)^t \quad (1.3)$$

Factorul $D_t = (1 + i)^t$ poartă numele de factor de dobândă compusă și reprezintă valoarea unui leu după t ani, la care s-a aplicat o rată a dobânzii de i % pe an.

Exemplul nr. 1.1

O persoană a depus la CEC suma de 150.000 lei, iar rata dobânzii pe care o acordă CEC-ul este de 25 % pe an.

Se cere să se calculeze capitalul pe care-l va obține persoana respectivă după 5 ani.

Datele problemei :

- $C_o = 150.000$ lei
- $i = 25$ %
- $t = 5$ ani
- $C_t = ?$

Folosim relația (1.3):

$$C_t = C_o \cdot (1 + i)^t = 150.000 \cdot (1 + 0,25)^5 = 150.000 \cdot (1,25)^5$$

$$C_t = 150.000 \cdot (3,051) = 475.650 \text{ lei}$$

$$C_t = 475.650 \text{ lei}$$

Exemplul nr. 1.2

O investiție se realizează în trei ani cu credit de la Bancă, percepându-se o rată a dobânzii de 10 % pe an, în următoarele rate :

- anul 1 -	110.000.000 lei
- anul 2 -	260.000.000 lei
- anul 3 -	330.000.000 lei
TOTAL	
	700.000.000 lei

Se cere să se calculeze costul investiției după finalizare .

Cum investiția se realizează în 3 ani , rezultă că perioada maximă de calcul este $t = 3$ ani, dar în cadrul perioadei $t_1 \dots t_3$ sunt evenimente care trebuie analizate fiecare separat .

Pentru anul 1 timpul de calcul este $t = 3$. Pentru anul 2 timpul de calcul este $t = 2$. Pentru anul 3 timpul de calcul este $t = 1$.

În funcție de perioada de timp cât se aplică efectul ratei dobânzii i rezultă :

- anul 1 ->	$110 \text{ mil.} \cdot (1 + i)^t$	$= 110 \text{ mil.} \cdot (1 + 0,10)^3$	$= 146 \text{ mil.}$
- anul 2 ->	$260 \text{ mil.} \cdot (1 + i)^t$	$= 260 \text{ mil.} \cdot (1 + 0,10)^2$	$= 315 \text{ mil.}$
- anul 3 ->	$330 \text{ mil.} \cdot (1 + i)^t$	$= 330 \text{ mil.} \cdot (1 + 0,10)^1$	$= 363 \text{ mil.}$
TOTAL			824 mil.

Se observă că, la sfârșitul perioadei, costul investiției crește cu 124 mil., creștere care se face pe seama suportării dobânzii la credit. Este lesne de înțeles că 824 mil. reprezintă costuri efective care trebuie

rambursate, si nu 700 mil., cât ar costa investitia dacà nu ar fi influentatà de rata dobânzii. In cazul aplicàrii formulei dobânzii compuse, formula de calcul a dobânzii "d" este:

$$d = C_0 \cdot [(1 + i)^t - 1] \quad (1.3')$$

Este evident cã dobânda nu este altceva decât diferenta dintre capitalul C_t rezultat dupà t ani, în urma aplicàrii capitalului initial C_0 a unei rate de crestere anuale "i" si C_0 :

$$d = C_t - C_0 = C_0 \cdot (1 + i)^t - C_0 = C_0 \cdot [(1 + i)^t - 1]$$

1.2 TRANSFORMAREA RATEI DOBANZII SAU A RATEI RENTABILITATII DINTR-O UNITATE DE TIMP IN ALTA

Relatiile financiare nu se fac numai în conditiile utilizàrii ca unitate de timp anul, de aceea consider util sã se cunoascã modul de determinare într-o variantã aproximativã a ratei dobânzii pe unitati de timp mai mici, cunoscând rata dobânzii anuale. In acest scop presupunem cunoscutã rata dobânzii anuale i_1 si ne propunem sã determinãm rata dobânzii lunare i_0 . Pentru a demonstra relatia de transformare a ratei dobânzii anuale în rata dobânzii lunare, sã admitem urmãtorul rationament:

- dacã avem rata dobânzii i_1 pe an, atunci în n ani, depunând la început un capital C_0 , vom obtine în final un capital

$$C_t = C_0 \cdot (1 + i_1)^n$$

- pentru a determina rata lunarã, vom cãuta un i_0 astfel încât sã obtinem aceeasi valoare, dar cu relatia

$$C_t = C_0 \cdot (1 + i_0)^{12n}$$

- egalând cele douã relatii si simplificându-le cu C_t rezultã:

$$(1 + i_0)^{12n} = (1 + i_1)^n$$

Logaritmând avem: $12n \log(1+i_0) = n \cdot \log(1 + i_1)$, iar împãrtind prin n rezultã:

$$12 \log(1+i_0) = \log(1 + i_1)$$

sau

$$\log(1+i_0) = \frac{1}{12} \cdot \log(1 + i_1)$$

Dar i este cunoscut, deci putem nota

$$\frac{1}{12} \cdot \log(1 + i_1) = a$$

caz în care

$$\log(1+i_0) = a$$

- din tabelele logaritmice se gãseste cã la logaritmul de valoare a corespunde un numãr N_0 , deci:

$$(1+i_0) = N_0 \Rightarrow i_0 = N_0 - 1$$

care înmulțit cu 100 ne indica i_0 în procente.

Acest calcul se face atunci când nu avem la îndemână tabele cu valori calculate ale factorilor de dobândă compusă D.

Utilizarea acestei relații pentru determinarea dobânzilor pe unități de timp mai mici, plecând de la valori de dobânzi cunoscute pe intervale de timp mai mari, nu este cea mai indicată. Rationamentul de mai sus l-am prezentat mai mult în scopul de a intui că dobânda lunară

$$i_0 = \frac{i_1}{12}$$

unde i = rata dobânzii anuale, nu poate fi adevărată numai dacă funcția $f(t) = (1+i)^t$ ar avea o reprezentare grafică sub formă de dreaptă $y = mx + n$. Dar, $f(t)$ este de forma $y = a^x$ și reprezintă o curbă exponentială, ceea ce elimină orice comentarii contradictorii.

Un alt scop al rationamentului prezentat este acela de a dovedi că oricare ar fi n , unde n este numărul unităților de timp a celei mai mari diviziuni, relația de calcul a diviziunii acestei rate, a dobânzii la unități de timp mai mici, se face fără nici o teamă de a gresi la valoarea $n = 1$.

Dacă cunoaștem dobânda pe o diviziune de timp i_0 și urmărim să determinăm dobânda altei diviziuni de timp mai mari i_1 , relațiile de calcul decurg invers:

$$(1+i_0)^{kn} = (1+i_1)^n$$

unde :

k = numărul de diviziuni cuprinse într-o diviziune de timp mai mare, valoare ce se cunoaște în acest caz;

n = numărul de diviziuni mai mari;

i_0 = rata dobânzii la diviziunea cea mai mică, considerată cunoscută;

i_1 = rata dobânzii pentru diviziunea n , necunoscută .

Deci:

$$\log(1+i_0)^{kn} = \log(1+i_1)^n$$

sau

$$kn \cdot \log(1+i_0) = n \cdot \log(1+i_1)$$

Se simplifică n , și rămâne:

$$k \cdot \log(1+i_0) = \log(1+i_1)$$

Relația din stânga are toate elementele cunoscute, deci putem scrie că:

$$k \cdot \log(1+i_0) = b \Rightarrow \log(1+i_1) = b$$

Căutând în tabelele logaritmice valoarea numărului N_1 care are logaritmul b , avem:

$$(1+i_1) = N_1 \Rightarrow i_1 = N_1 - 1$$

Cum lucrarea de față, prin anexele de la sfârșitul ei, pune la dispoziția cititorului coeficienți de dobândă compusă pe un interval de timp și valori destul de largi, inclusiv coeficienți pentru dobânzi mici care se vor utiliza în obținerea dobânzilor pe unități de timp divizionare, rezolvarea unor probleme de acest gen se simplifică.

1.3 DETERMINAREA RATEI DOBANZII UNEI DIVIZIUNI DE TIMP MAI MICI CUNOSCAND RATA DOBANZII PE O DIVIZIUNE MAI MARE DE TIMP UTILIZAND COEFICIENTII DIN TABELE

Se presupune cunoscută dobânda i pentru o diviziune de timp t_1 . Se cere să se găsească un i_0 pentru diviziunea de timp $t_0 = kt_1$, care de asemenea este cunoscut.

Cum utilizând cele două rate, la sfârșit de perioadă valoarea acumulată trebuie să fie aceeași, putem scrie:

$$(1 + i_0)^{kt_1} = (1 + i_1)^{t_1}$$

cum t_1 și k sunt multipli întregi de timp ale celor două diviziuni, ajungem să putem scrie aceeași relație dedusă și cu raționamentul anterior, astfel:

$$(1 + i_0)^k = (1 + i_1)^1$$

Cunoscând dobânda fără să consultăm tabelele, determinăm pe loc valoarea

$$(1 + i_1)^1 = C$$

(exemplu: $i = 24\%$ atunci, $(1 + i_1)^1 = 1,24$ se deduce de la sine.)

Inlocuind valoarea factorului $(1 + i_1)^1$ avem:

$$(1 + i_0)^k = C$$

acum, orientativ facem raportul $\frac{i_1}{k} = i$.

Cu valoarea lui i , în jurul lui căutăm în tabelele cu rata dobânzii fractională la anul k și găsim că rata dobânzii i_x care va fi $i_M > i_x > i_m$ și $i_x < i$, valoarea lui C sau cea mai apropiată lui C .

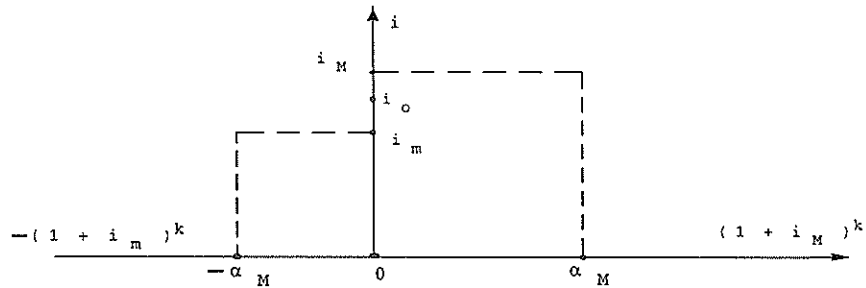
Dacă din tabele întâmplător găsim că la k în jurul valorii lui i_x , găsim un i la care corespunde exact valoarea C atunci $i_x = i_0$ și am determinat mărimea căutată.

Cum de obicei nu se întâmplă așa, și găsim o valoare C apropiată de C_1 , va trebui să utilizăm un alt instrument de calcul pentru a determina valoarea i_0 .

Alegem cele două limite ale dobânzii în jurul lui i_0 , o valoare $i_M > i_0$ și o valoare $i_m < i_0$. Tot din tabel determinăm factorii $(1 + i_M)^k = \alpha_M$ și $(1 + i_m)^k = \alpha_m$.

Prin metoda interpolării putem ajunge la valoarea dobânzii căutate cu o mică eroare.

Pentru aceasta, și pentru o înțelegere mai ușoară a relației de calcul, apelăm la o construcție grafică:



Conditii : $\alpha_m = 0$ când $i_m = i_0$;
 $\alpha_M = 0$ când $i_M = i_0$.

Admitem că între segmentele determinate de variațiile lui α , i_M și i_m , sunt relatii de proportionalitate, unde:

i_M = valoarea cea mai mare, dar și cea mai apropiată de i_x a ratei dobânzii;

i_m = valoarea cea mai mică , dar și cea mai apropiată de i_x a ratei dobânzii.

În aceste conditii, cu foarte mici erori, putem stabili o relatie de interpolare, cu ajutorul căreia determinăm valoarea lui i_0 .

Scriem rapoartele:

$$\frac{i_M - i_0}{\alpha_M} = \frac{i_0 - i_m}{\alpha_m} = \frac{i_M - i_m}{\alpha_M + (-\alpha_m)}$$

Știind că :

$$|-\alpha_m| = \alpha_m$$

putem scoate două relatii de determinare a valorii i :

$$\frac{i_M - i_0}{\alpha_M} = \frac{i_M - i_m}{\alpha_M + \alpha_m}$$

sau

$$i_M - i_0 = (i_M - i_m) \frac{\alpha_M}{\alpha_M + \alpha_m}$$

de unde:

$$i_0 = i_M - (i_M - i_m) \frac{\alpha_M}{\alpha_M + \alpha_m} \quad (1.4)$$

Similar deducem și relatia (1.5):

$$i_0 = i_m + (i_M - i_m) \frac{\alpha_m}{\alpha_M + \alpha_m} \quad (1.5)$$

Exemplul nr. 1.3

Se cunoaste dobânda anuală $i_1 = 30\%$, se cere să se găsească dobânda lunară i .

De la prima vedere putem scrie :

$$(1 + i_1) = (1 + 0,30) = 1,30$$

conform celor stabilite , rezultă că

$$(1 + i_1)^1 = (1 + i_0)^{12} \Rightarrow (1 + i_0)^{12} = 1,30$$

Facem raportul

$$\frac{i_0}{12} + \frac{30}{12} = 2,5$$

Căutăm în tabele la timpul 12, care poate fi an , lună , zi, în jurul dobânzii $i = 2,5\%$ dacă există vreun i_x care să dea

$$(1 + i_x)^{12} = 1,30$$

si nu găsim, dar găsim că la $i_M = 2,3\%$ obținem cea mai apropiată valoare, respectiv 1,313734 si la $i_m = 2,2\%$ obținem 1,298407. Astfel avem:

$$(1 + i_m)^{12} = 1,298407$$

$$(1 + i_M)^{12} = 1,313734$$

Utilizând una din relațiile de interpolare avem:

$$i_0 = i_M - (i_M - i_m) \frac{\alpha_M}{\alpha_M + \alpha_m}$$

unde:

$$\alpha_M = (1 + i_M)^k = (1 + 0,023)^{12} = 1,313734$$

$$\alpha_m = (1 + i_m)^k = (1 + 0,022)^{12} = 1,298407$$

rezultă:

$$i_0 = 2,3 - (2,3 - 2,2) \cdot \frac{1,313734}{1,313734 + 1,298407}$$

$$i_0 = 2,3 - 0,1 \cdot \frac{1,313734}{2,612141} = 2,3 - 0,1 \cdot 0,5 = 2,3 - 0,05$$

$$i_0 = 2,25\%$$

Exemplul nr. 1.4

Un agent economic dorește să stabilească valoarea unor depuneri constante anuale dar, pentru acest lucru, nu cunoaște rata dobânzii anuale i_1 , ci numai pe cea lunară care este $i_0 = 6,5\%$ pe lună. Se cere să se determine i_1 , respectiv rata anuală .

Se ia din tabelul factorilor de dobândă compusă valoarea:

$$(1 + i_0)^{12} = 2,129096$$

dar stim că:

$$(1 + i_1) = (1 + i_0)^{12}$$

deci:

$$(1 + i_1) = 2,129096$$

În mod normal ne gândim să căutăm în tabel la anul 1 pentru a găsi această valoare dar, la anul 1 în tabelele anexate nu avem calcule pentru dobânzi anuale așa de mari, deci nu putem consulta tabelul.

Este însă evident că:

$$i_1 = (2,129096 - 1)^1 = 1,129$$

deci:

$$i_1 \% = 1,129 \times 100 = 112,9 \% \Rightarrow i_1 = 112,9 \%$$

1.4 FACTORUL DE ACTUALIZARE

Cu ajutorul acestui factor se poate determina valoarea actuală (de azi) a unei sume ce urmează a fi plătită sau încasată în viitor. Cu alte cuvinte, cu ajutorul acestui factor se poate determina capitalul ce trebuie să-l depunem azi într-o bancă, pentru ca peste t ani, cu rata dobânzii i , să obținem capitalul C_t .

În acest caz cunoaștem valoarea capitalului ce-l putem obține după t ani, aplicându-i dobânda i , și căutăm capitalul C_0 .

Intrucât $C_t > C_0$, rezultă că va exista un coeficient mai mic decât 1, care înmulțit cu valoarea C_t să ne dea valoarea inițială C_0 . Notăm acest coeficient în mod arbitrar cu V_t , deci

$$C_t = C_0 \cdot V_t \quad (1.6)$$

1.4.1 Determinarea factorului de actualizare

Considerăm valoarea capitalului obținut după t ani egală cu 1, în aceste condiții formula (1.6) devine:

$$C_0 = 1 \cdot V_t$$

deci, pentru

$$C_t = 1 \Rightarrow C_0 = V_t$$

Înlocuim aceste valori în formula (1.3), care are forma:

$$C_t = C_0 \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 1 = V_t \cdot (1 + i)^t \Rightarrow$$

$$V_t = \frac{1}{(1 + i)^t} \quad (1.7)$$

și

$$C_0 = C_t \cdot \frac{1}{(1 + i)^t} \quad (1.8)$$

unde V_t este factorul de actualizare si reprezintă valoarea de azi a unui leu obtinut după t ani, aplicându-i dobânda i .

Exemplul nr. 1.5

Un tatà, fericit cã sotia sa a nãscut un fiu, face afirmatia cã depune la bancã azi, la data nasterii fiului, o sumã de bani, care, la vârsta de 18 ani, când copilul va fi major, sã acumuleze, cu o ratã a dobânzii de 25 % pe an acordatã de bancã, un capital de 30 mil. lei.

Cât capital a depus în bancã fericitul tatã pentru ca, în conditiile de mai sus, sã-si respecte promisiunea?

Datele problemei :

- $C_0 = ?$
- $C_t = 30$ mil. lei
- $t = 18$ ani
- $i = 25$ %

Aplicând relatia (1.8) avem :

$$C_0 = C_t \cdot \frac{1}{(1+i)^t} = 30 \text{ mil.} \cdot \frac{1}{(1,25)^{18}} = 30 \text{ mil.} \cdot 0,0508 = 1,5 \text{ mil.}$$

$$\underline{C_0 = 1,5 \text{ mil. lei}}$$

Asa cum se observã, acesti doi factori, $D_t = (1+i)^t$ si $V_t = \frac{1}{(1+i)^t}$ sunt în relatie invers proportionalã, respectiv, de câte ori creste D_t tot de atâtea ori se micsoareazã V_t , deci:

$$D_t \cdot V_t = (1+i)^t \cdot \frac{1}{(1+i)^t} = 1$$

Intr-o formã mai plasticã putem spune cã, prin factorul de dobândã compusã D_t prospectãm viitorul cunoscând prezentul, iar prin factorul de actualizare V_t prospectãm prezentul cunoscând date despre viitor .

In cele ce vor urma, acesti doi factori vor fi des utilizati în calculele de actualizare, calcule care sunt atãt de utile si edificatoare în obtinerea unor informatii despre eficienta sau neeficienta unor actiuni economice.

1.5 FACTORUL DE COMPUNERE PENTRU UN AN

Acest factor ne ajutã la calcularea capitalului obtinut după t ani prin depuneri constante anuale la o bancã ce oferã o ratã a dobânzii de i % pe an. Depunerile fãcându-se în rate anuale constante, le vom nota cu R_t .

La sfârșitul unei perioade de t ani, aceste t rate, cu valoarea R_t pe fiecare an, vor acumula, cu rata dobânzii i , un capital C_t . Valoarea acestui capital trebuie să fie un multiplu fractionar de R_t , multiplu pe care să-l notăm arbitrar cu B_t , deci avem:

$$C_t = R_t \cdot B_t \quad (1.9)$$

1.5.1 Determinarea factorului de compunere

Deoarece acest factor poate îndeplini două roluri distincte, va trebui, pentru a nu se produce erori de calcul, să facem o distincție clară între cele două roluri care generează și două relații diferite de calcul.

Un prim rol este acela de acumulare de capital cu depuneri anuale constante, depunerile făcându-se la începutul fiecărui an.

Al doilea rol este acela de rambursare a unor investiții sau credite cu restituiri constante pentru rambursări în fiecare an, la sfârșitul anului. În acest caz, rata de depunere începe la sfârșitul primului an.

Analizăm primul caz, respectiv când depunerea se face la începutul anului și notăm pentru distincție factorul cu B_{t_C} deci:

$$C_{t_C} = R_{t_C} \cdot B_{t_C} \quad (1.10)$$

Considerându-l pe $R = 1$, capitalul obținut după t ani va fi:

$$C_{t_C} = 1 \cdot B_{t_C}$$

Prin egalarea lui R cu 1 am decis ca să depunem în fiecare an la bancă o rată egală cu 1 leu și să determinăm valoarea acumulată după t ani, dacă banca acordă o rată a dobânzii i .

Pentru a obține factorul căutat B_{t_C} , facem calculele din aproape în aproape pe fiecare an, astfel :

- Anul 1 - depunem un leu la începutul anului astfel că, la sfârșitul anului vom avea:

$$1 + 1 \cdot i = (1 + i)$$

- Anul 2 - preluăm capitalul din anul anterior $(1+i)$ la care aplicăm rata dobânzii, rezultă $(1+i) + (1+i) \cdot i$ și mai adăugăm un leu la care de asemeni se adaugă dobânda $1 \cdot i$. Rezultă :

$$(1+i) + (1+i) \cdot i + (1+i)$$

Dăm factor comun pe $(1+i)$ dar numai la primii doi termeni, astfel:

$$(1+i) \cdot (1+i) + (1+i) = (1+i)^2 + (1+i)$$

- Anul 3 - preluăm din nou capitalul din anul 2 care este $(1+i)^2 + (1+i)$ căruia îi aplicăm rata dobânzii, adunând de asemeni rata de 1 leu și aplicându-i și la acesta rata dobânzii, rezultă :

$$(1+i)^2 + (1+i) + [(1+i)^2 + (1+i)] \cdot i + (1+i)$$

desfacem paranteza mare

$$(1+i)^2 + (1+i) + (1+i)^2 \cdot i + (1+i) \cdot i + (1+i)$$

ordonăm termenii

$$(1+i)^2 + (1+i)^2 \cdot i + (1+i) + (1+i) \cdot i + (1+i)$$

dăm factor comun la primele grupe de câte doi termeni

$$(1+i)^2 \cdot (1+i) + (1+i) \cdot (1+i) + (1+i) \Rightarrow$$

$$(1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i)$$

Similar se poate merge până la $t = n$, de aceea generalizând relația de la $t = 3$, putem scrie relația și pentru $t = n$, astfel:

$$(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i)^1$$

deci:

$$C_{t_C} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^3 + (1+i)^2 + (1+i)^1$$

sau mai restrâns:

$$C_{t_C} = \sum_{n=1}^t (1+i)^n$$

cum $C_{t_C} = B_{t_C}$ pentru $R = 1$ rezultă:

$$B_{t_C} = \sum_{n=1}^t (1+i)^n$$

dar acest sir este o serie geometrică crescătoare astfel că, dacă notăm pe $(1+i) = a$ și înlocuim, avem:

$$S = a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^3 + a^2 + a^1$$

sau:

$$S = a \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^3 + a^2 + a^1 + 1)$$

Să notăm cu s seria din paranteză, astfel:

$$s = a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^3 + a^2 + a^1 + 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^t (1+i)^n = S = a \cdot s$$

Mai stim că:

$$a^n - 1 = (a - 1) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^3 + a^2 + a^1 + 1) \Rightarrow$$

$$a^n - 1 = (a - 1) \cdot s \Rightarrow s = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

deci putem scrie că:

$$B_{t_C} = \sum_{n=1}^t (1+i)^n = a \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Înlocuim pe a cu valoarea inițială:

$$B_{t_C} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

înlocuind și pe n cu t :

$$B_{t_C} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} \quad (1.11)$$

si:

$$C_{t_c} = R_{t_c} \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} \quad (1.12)$$

Un rationament mai simplu de a ajunge la seria geometrică a cărei sumă este relația (1.11), se poate face utilizând factorul de dobândă compusă $D_t = (1+i)^t$. În acest caz determinăm pentru fiecare an valoarea obținută la sfârșitul perioadei n a unui leu depus în fiecare an, începând cu anul 1 până la anul n .

În anul 1 depunem 1 leu și obținem peste n ani $(1+i)^n$. În anul 2 depunem 1 leu și obținem peste $n-1$ ani $(1+i)^{n-1}$

.....

În anul $n-1$ depunem 1 leu și obținem peste 2 ani $(1+i)^2$. În anul n depunem 1 leu și obținem peste 1 an $(1+i)^1$.

Suma acestor depuneri a câte 1 leu la începutul fiecărui an timp de n ani, ne dă seria geometrică obținută anterior, a cărei sumă reprezintă factorul de compunere pentru un an în condiții de acumulare de capital B_{t_c} deci:

$$B_{t_c} = \sum_{n=1}^t D_{t_c} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \dots + (1+i)^2 + (1+i)^1$$

Putem spune că, factorul de compunere pentru un an cu depuneri de un leu la începutul anului reprezintă suma factorilor de dobândă compusă a unor depuneri anuale succesive în fiecare an de câte un leu, de la anul 1 până la anul $n = t$, în condițiile unei rate a dobânzii de i %.

Cu alte cuvinte, factorul de compunere pentru un an B_{t_c} reprezintă valoarea pe care o acumulăm cu rata dobânzii i în timpul t , prin depuneri succesive în fiecare an (la începutul anului) de rate valorice de câte un leu.

Exemplul nr. 1.6

Un agent economic are în perspectivă intenția de a realiza o investiție care poate să-i aducă un venit apreciabil. Situația sa financiară nu-i permite să înceapă realizarea acestei investiții imediat. Pentru a-și asigura capitalul necesar, consideră că poate fără probleme deosebite să preia o parte din beneficiul net ce-l obține lunar pentru a crea în termen de 1 an și 4 luni fondul necesar. Apreciază în mod acoperitor că depunând la bancă în fiecare lună 100000 lei, timp de 1 an și 4 luni, va obține peste 1800000 lei, ținând cont că banca acordă o dobândă de 24 % pe an, ceea ce este suficient pentru pornirea acțiunii propuse. Ce sumă va obține agentul peste 16 luni în aceste condiții ?

Datele problemei:

$t = 16$ luni

$i = 24$ % pe an

$R_{t_c} = 100000$ lei pe lună

$$C_{t_C} = ?$$

Utilizând relația (1.12) avem:

$$C_{t_C} = R_{t_C} \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

dar, pentru a răspunde la cerințele problemei, t nu mai poate reprezenta numărul de ani, ci un număr de luni pentru $R_{t_C} = 100000$ lei pe lună. Cum i % este dat în procente anuale, va trebui să găsim un alt i % care să reprezinte rata lunară.

Pentru rezolvare, pornim de la relația:

$$(1+i_0)^k = (1+i_1)^1$$

unde:

$$i_1 = 24 \% \text{ - dobânda anuală;}$$

$$k = 12 \text{ - numărul de luni pe an;}$$

$$i_0 \text{ - dobânda lunară care trebuie determinată.}$$

Inlocuind avem:

$$(1+i_0)^{12} = (1+0,24)^1 \Rightarrow (1+i_0)^{12} = 1,24$$

Căutăm în tabelele de factori calculați la datele fractionale un $i_x < \frac{i}{12}$, respectiv $i_x < 2$ pentru diviziunea 12, o valoare a factorului de dobândă compusă egală cu 1,24 sau aproape egală cu 1,24, astfel că se găsește în jurul acestei valori:

$$i_m = 1,8 \text{ cu } (1+i_m)^{12} = 1,238721 = \alpha_m$$

$$i_M = 1,9 \text{ cu } (1+i_M)^{12} = 1,2553401 = \alpha_M$$

Folosind una din relațiile (1.5) sau (1.6) de interpolare rezultă:

$$i_0 = i_m + (i_M - i_m) \frac{\alpha_M - \alpha_m}{\alpha_M - \alpha_m}$$

$$i_0 = 1,8 + (1,9 - 1,8) \frac{1,238721}{1,238721 + 1,2553401}$$

$$i_0 = 1,8 + 0,1 \cdot 0,416 \Rightarrow i_0 = 1,8 + 0,0416$$

Introducem valoarea în relația (1.12):

$$C_{t_C} = R_{t_C} \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

și obținem:

$$C_t = 100000 \cdot (1 + 0,0184) \cdot \frac{(1 + 0,0184)^{16} - 1}{0,0184} =$$

$$= 100000 \cdot (1,0184) \cdot \frac{0,03387}{0,0184} = 100000 \cdot 1,0184 \cdot 18,4076 = 1875629$$

$$C_t = 1875629 \text{ lei}$$

Cel de al doilea rol al factorului de compunere pentru un an, de rambursare a unor credite din veniturile realizate la sfârșit de perioadă, conduce la obținerea unui factor uzual în activitatea bancaro-financiară.

Determinarea acestui factor notat tot cu B_t este similară cu rationamentul făcut anterior, numai că în acest caz depunerea se face la sfârșitul anului și deci, primul an nu generează nici un fel de dobândă, astfel ca:

- valoarea leului depus în primul an va avea peste t ani

$$D_{t_n} = (1+i)^{n-1} \quad \text{unde } n = t$$

- pentru $t = 1$ an $D_{t_{n-1}} = (1+i)^{n-2}$

- pentru $t = 2$ ani $D_{t_{n-2}} = (1+i)^{n-3}$

.....

- pentru anul 3 $D_{t_3} = (1+i)^2$

- pentru anul 2 $D_{t_2} = (1+i)^1$

- pentru anul 1 $D_{t_1} = (1+i)^0 = 1$

Factorul D_{t_n} reprezintă valoarea pe care o obținem după n ani dacă depunem la sfârșitul primului an în bancă un leu, și la care i se aplică o rată a dobânzii de i %. Suma acestor factori, considerând că în fiecare an de la $t = 1$ până la n se repetă depunerea leului, reprezintă factorul de compunere pentru un an B_t deci:

$$B_t = \sum_{n=1}^t D_{t_n} = 1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

Valoarea acestei sume am dedus-o și deci, se poate scrie că

$$B_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i} \quad (1.13)$$

$$C_t = R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} \quad (1.14)$$

Exemplul nr. 1.7

Pentru rambursarea unei investiții, o societate economică trebuie să depună în fiecare lună din beneficiul realizat o sumă de 500000 lei la banca de credit, timp de 4 ani. Care este valoarea rambursată după 4 ani dacă se ia în calcul o dobândă de 2 % pe lună?

Aplicăm relația (1.14):

$$C_t = R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

unde:

$$R_t = 500000 \text{ lei/lună}$$

$$i = 2 \%$$

$$t = 4 \text{ ani} \times 12 = 48 \text{ luni}$$

Din tabelul cu valorile factorului $D_t = (1+i)^t$ căutăm la $i = 2 \%$ și $t = 48$ valoarea acestui factor și obținem

$$(1 + 0,02)^{48} = 2,587070$$

Luăm numai primele patru cifre:

$$C_t = 500000 \cdot \frac{2,587 - 1}{0,02} = 500000 \cdot \frac{1,587}{0,02} = 500000 \cdot 79,35$$

$$C_t = 39675000 \text{ lei}$$

Se aminteste că tabelul conține diviziuni egale de timp de la 1 la 50, care pot fi ani, luni sau chiar zile, depinzând la ce diviziune de timp raportăm rata dobânzii.

După cele prezentate, putem enunța că factorul de compunere pentru un an B_t , reprezintă valoarea acumulată după t ani a unor depuneri constante de câte un leu în fiecare an la sfârșitul anului, în condițiile acordării unei rate a dobânzii de $i \%$.

Exemplul nr. 1.8

Dacă din problema 1.7 cerem să se calculeze valoarea rambursată după 4 ani cu o rată de 6000000 pe an și o dobândă lunară de 2 %, vom proceda astfel:

- determinăm dobânda anuală corespunzătoare știind că

$$(1 + i_0)^{k \cdot n} = (1 + i_1)^n, \text{ unde } k = 12 \text{ și } n = 4;$$

- din tabele am aflat că $(1 + i_0)^{48} = 2,587$, atunci:

$$(1 + i_1)^4 = 2,587, \text{ căutăm pe } i_m \text{ și } i_M \Rightarrow$$

$$i_m = 26 \% \text{ și } (1 + i_m)^4 = 2,520 = \alpha_m$$

$$i_M = 27 \% \text{ și } (1 + i_M)^4 = 2,601 = \alpha_M$$

- folosim relația (1.5):

$$i_1 = i_M - (i_M - i_m) \frac{\alpha_M}{\alpha_M - \alpha_m} = 27 - 1 \cdot \frac{2,601}{4,121} = 27 - 0,63 = 26,37 \% \text{ pe an.}$$

$$\begin{aligned} C_t &= R_t \cdot \frac{(1+i)^4 - 1}{i} = 6000000 \cdot \frac{(1,2637)^4 - 1}{0,2637} = 6000000 \cdot \frac{2,550 - 1}{0,2637} = \\ &= 6000000 \cdot \frac{1,550}{0,2637} = 6000000 \cdot 5,8778 \end{aligned}$$

$$C_t = 35266800 \text{ lei}$$

1.5.2 Observatii

In exemplul nr. 1.7, $C_t = 39675000$ în condițiile unor rate mici și diviziuni mici de timp pe același interval de timp. Diferența dintre cele două rezultate este destul de substanțială reprezentând $39675000 - 35266800 = 4408200$, cauza fiind faptul că depunerile se fac la sfârșit de perioadă și deci, în primul caz avem o rată de 500000 fără dobândă pe o lună, iar în al doilea caz 6000000 fără dobândă pe un an.

Dacă ratele ar fi depuse la începutul fiecărei perioade atunci:

$$C_{t_1} = R_t \cdot (1 + i_0) \cdot \frac{(1 + i_0)^t - 1}{i_0} = 39675000 (1 + 0,02) = 40468500$$

pentru $t = 48$ de luni și 48 de rate cu depunere la început de perioadă.

$$C_{t_1} = R_t \cdot (1 + i_1) \cdot \frac{(1 + i_1)^t - 1}{i_1} = 35266800 (1 + 0,02637) = 44565900$$

pentru $t = 4$ ani și 4 rate cu depunere la început de perioadă.

Pentru 48 rate lunare, $C_{t_1} = 40468500$.

Pentru 4 rate anuale, $C_t = 44565900$.

De această dată varianta ratelor mai mari, în condițiile problemei date, este mai avantajoasă. Diferența de $44565900 - 40468500 = 4097400$ lei se justifică și în acest caz deoarece din primul an avem o depunere de 6 mil. lei care produce dobândă, iar la prima variantă prima rată este de 500000 lei, și abia la sfârșitul anului suma se rotunjește la 6 mil. lei. În acest caz, suma dobânzilor lunare este mai mică față de varianta a doua, generând diferența de 4097400 lei.

Utilizând o serie geometrică oarecare cu rata de creștere între termeni r , putem ajunge foarte ușor la seria obținută pentru calculul factorului de compunere pentru un an.

Fie $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ termenii seriei geometrice, atunci între acești termeni trebuie să existe relația:

$$\frac{Q_1}{Q_0} = r ; \quad \frac{Q_2}{Q_1} = r ; \quad \dots ; \quad \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = r$$

sau:

$$\frac{Q_1}{Q_0} = r ; \quad \frac{Q_2}{Q_0} = r^2 ; \quad \dots ; \quad \frac{Q_n}{Q_0} = r^n$$

Să notăm cu i rata dobânzii, respectiv:

$$\frac{Q_1 - Q_0}{Q_0} = i ; \quad \frac{Q_2 - Q_1}{Q_1} = i ; \quad \dots ; \quad \frac{Q_n - Q_{n-1}}{Q_{n-1}} = i$$

atunci este evident că mai putem scrie :

$$\frac{Q_1}{Q_0} - 1 = i \quad \text{sau} \quad r - 1 = i \Rightarrow r = i + 1$$

dar

$$Q_1 = Q_0 \cdot r ; \quad Q_2 = Q_0 \cdot r^2 ; \quad \dots ; \quad Q_n = Q_0 \cdot r^n$$

deci suma seriei va fi:

$$S = Q_0 + Q_0 \cdot r + Q_0 \cdot r^2 + \dots + Q_0 \cdot r^n \quad \Leftrightarrow$$

$$S = Q_0 \cdot (1 + r + r^2 + \dots + r^n) \quad \Leftrightarrow$$

$$S = Q_0 \cdot [1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^n]$$

unde i poate constitui rata dobânzii sau rata de rentabilitate.

1.6 FACTORUL DE AMORTIZARE

Acest factor reprezintă valoarea egală a plătilor de efectuat la sfârșitul fiecărui an pentru ca, după t ani, să se ramburseze 1 leu investit prin acumularea acestor plăți în bancă, acordându-se o dobândă de i %.

Pentru demonstrarea relației, ne folosim de relația (14) și avem:

$$C_t = R_t \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i}$$

Din enunțul definiției, cunoaștem următoarele date ale problemei:

- $C_t = 1$
- i % = îl considerăm cunoscut
- t = îl considerăm cunoscut
- $R_t = ?$

În mod arbitrar pentru $C_t = 1$, R_t îl notăm cu A_t . Înlocuim în relația (1.14), astfel ca:

$$1 = A_t \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i} \Rightarrow A_t = \frac{i}{(1 + i)^t - 1} \quad (1.15)$$

și:

$$R_t = C_t \cdot \frac{i}{(1 + i)^t - 1} \quad (1.16)$$

Cu această formulă se calculează factorul de amortizare A_t .

Exemplul nr. 1.9

O societate comercială are de rambursat o valoare de 39675000 lei. Rambursarea se face în 48 de rate lunare. Care este rata lunară de rambursare dacă se utilizează o dobândă de 2 % pe lună?

Utilizăm relația (1.16) și avem:

$$R_t = C_t \cdot \frac{i}{(1+i)^t - 1}$$

unde:

- $C_t = 39675000$ lei
- $i = 2\%$
- $t = 48$ luni
- $R_t = ?$

$$(1+i)^t = (1+0,02)^{48} = 2,587 \text{ luat din tabel.}$$

$$R_t = 39675000 \cdot \frac{0,02}{(1+0,02)^{48} - 1} = 39675000 \cdot \frac{0,02}{1,587} \Rightarrow$$

$$R_t = 39675000 \cdot 0,0126 = 499005 \Rightarrow$$

$$\underline{R_t \approx 500000 \text{ lei}}$$

Dacă depunerile se fac la începutul fiecărui an, atunci relația (1.16) devine:

$$R_{t_c} = C_t \cdot \frac{i}{(1+i)[(1+i)^t - 1]} \quad (1.17)$$

Demonstratia acestei relatii se face similar cu cea a lui A_t folosind relația (12), făcându-l pe $C_t = 1$ și în acest caz $R_{t_c} = A_{t_c}$.

$$1 = A_{t_c} \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} \Rightarrow A_{t_c} = \frac{i}{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]} \quad (1.18)$$

$$R_{t_c} = C_t \cdot A_{t_c} \text{ rezultând astfel relația (1.17).}$$

Se observă că factorii A_t și B_t se găsesc în raporturi de invers proportionalitate, respectiv

$$A_t = \frac{1}{B_t} \quad \text{și} \quad B_t = \frac{1}{A_t}$$

sau $A_t \cdot B_t = 1$.

1.7 FACTORUL VALORII ACTUALE A UNEI ANUITATI

Acest factor reprezintă valoarea actuală a unor serii de n plăți (unde $n = t$) de câte 1 leu la începutul fiecărui an sub influența ratei dobânzii de $i\%$ pe an, sau este valoarea de azi a unor plăți de câte 1 leu ce urmează a se face în fiecare an timp de t ani cu rata dobânzii $i\%$.

El mai poate fi valoarea împrumutului pe care l-am făcut azi, condiționat de o rată anuală de 1 leu timp de t ani cu rata dobânzii de i .

Notăm arbitrar suma acestor plăți ce se vor face în viitor și aduse în prezent cu I_t . Notăm de asemeni ratele egale de plată ce se plătesc anual tot cu R_t , atunci:

$$C_0 = R_t \cdot I_t$$

unde C_0 reprezintă valoarea sumei celor t rate anuale aduse toate din viitor în prezent.

Dacă facem pe $R_t = 1$ conform definiției, relația de mai sus devine :

$$C_0 = 1 \cdot I_t$$

deci când $R_t = 1$, C_0 este chiar I_t .

Aici I_t reprezintă valoarea factorului valorii actuale a unei anuități.

Din cele explicitate mai sus putem deduce că I_t este suma tuturor depunerilor de câte 1 leu la timpurile $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, dar nu cu valorile de atunci, ci cu valorile de azi diminuate cu influența ratei dobânzii i %.

De exemplu, avem un capital C_0 și îl ducem de la timpul $t = 1$ la timpul $t = n$. După n ani valoarea acestui capital, să-i zicem C_t , va fi:

$$C_{t_n} = C_0(1+i)^n$$

Dar am demonstrat că dacă $C_{t_n} = 1$, atunci $C_0 = V_{t_n}$, unde V_{t_n} este factorul de actualizare. Înlocuind avem :

$$1 = V_{t_n} \cdot (1+i)^n, \text{ deci } V_{t_n} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

Cu alte cuvinte, pentru anul n valoarea de 1 leu depusă atunci are azi valoarea $V_{t_n} = \frac{1}{(1+i)^n}$.

Putem judeca pentru fiecare an de la t_1 la t și, în felul acesta vom obține un sir de valori sub forma: $V_{t_1}, V_{t_2}, V_{t_3}, \dots, V_{t_n}$, valori generate de 1 leu, la care s-a aplicat dobânda i , și aduse la timpul initial t_0 .

Suma acestor valori conform definiției, va fi tocmai factorul valorii actuale a unei anuități, deci :

$$I_t = \sum_{t=1}^n V_{t_n} = V_{t_1} + V_{t_2} + V_{t_3} + \dots + V_{t_{n-1}} + V_{t_n}$$

$$V_{t_1} = \frac{1}{(1+i)^1}; V_{t_2} = \frac{1}{(1+i)^2}; \dots; V_{t_{n-1}} = \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \text{ și } V_{t_n} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$I_t = \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Dăm factor comun pe $\frac{1}{(1+i)^1}$ și obținem :

$$I_t = \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{1}{(1+i)} \left(1 + \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right)$$

Dacă substituim pe $\frac{1}{(1+i)^1}$ cu valoarea a , avem:

$$I_t = \sum_{t=1}^n a^t = a \cdot (1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$$

Notăm suma termenilor din paranteză cu s , astfel că :

$$I_t = a \cdot s$$

Seria s este o serie geometrică descrescătoare și cunoaștem că :

$$a^n - 1 = (a - 1) (1 + a + a^2 + \dots + a^{n-2} + a^{n-1})$$

deci:

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-2} + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1} = s$$

Atunci:

$$I_t = a \cdot s = a \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}, \quad \text{dar } a = \frac{1}{(1+i)} \Rightarrow$$

$$I_t = \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{(1+i)} - 1} \Rightarrow$$

$$I_t = \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{1 - (1+i)^n}{1 - (1+i)} = \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{[1 - (1+i)^n] \cdot (1+i)}{[1 - (1+i)] \cdot (1+i)^n}$$

$$I_t = \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{(1+i)}{1} \cdot \frac{1 - (1+i)^n}{[1 - (1+i)] \cdot (1+i)^n} = \frac{1 - (1+i)^n}{(-i) \cdot (1+i)^n}$$

Dar $(1+i)^n > 1$, deci $1 - (1+i)^n < 0$, raportul dintre două numere negative fiind pozitiv, totuși vom evita să lucrăm cu numere negative, astfel vom înmulți fracția și la numitor și la numărător cu -1 , obținând în final:

$$I_t = \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

Inlocuind pe n cu t , rezultă:

$$I_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t} \quad (1.19)$$

Acesta este factorul valorii actuale a unei anuități.

Stim că:

$$C_0 = R_t \cdot I_t \quad (1.20)$$

si înlocuind, avem:

$$C_0 = R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t} \quad (1.21)$$

unde:

$$I_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t} \text{ reprezintă valoarea împrumutului care se lichidează}$$

prin plata unei rate de 1 leu în fiecare an, timp de t ani.

Relatia (1.21) rezolvă determinarea împrumutului initial pentru o rată anuală R_t cu rata dobânzii de i %. In acest caz avem:

C_0 = valoarea împrumutului, pe care o căutăm ;

R_t = rata anuală, pe care o stim ;

t = intervalul de timp sau timpul final când se lichidează împrumutul;

i = rata dobânzii anuale.

Relatia (1.21) poate fi obținută utilizând si următorul rationament.

Egalăm capitalul C_t obținut în timpul t cu o rată a dobânzii i , capital ce se constituie în t rate R_t depuse la sfârșitul fiecărei perioade, cu acelasi capital C_t obținut în aceeași perioadă, dar cu depunerea unui capital initial C_0 depus integral la începutul perioadei. Deci avem:

$$C_t = R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t} \text{ si tot } C_t = C_0 \cdot (1+i)^t \Rightarrow$$

$$R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} = C_0 \cdot (1+i)^t \Rightarrow C_0 = R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t}$$

In relatia $C_t = C_0 \cdot (1+i)^t$, C_0 constituie capitalul initial ce asigură acumularea capitalului C_t după t ani (luni) cu dobânda i .

In relatia: $C_0 = R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t}$, C_0 reprezintă capitalul initial

împrumutat care se recuperează în conditii de rentabilitate de către banca creditoare cu încasări în t rate R_t si cu o rată a dobânzii de i %.

Rationamentul de mai sus se regăsește în activitatea de plăți obisnuite între parteneri de afaceri fizici sau juridici. De exemplu :

Proprietarul unui imobil solicită chiriasului plata chiriei la început de an în valoare de 1200000 lei. Chiriasul preferă să plătească în rate lunare. Proprietarul se declară de acord, dar să țină cont că în timp de un an, cu dobânda i acordată de bancă, suma cerută să fie echivalentă cu cea de la sfârșitul anului influentată de rata dobânzii i .

In acest caz se cunosc:

- $C_0 = 1200000$ lei
- $t = 12$ luni
- $i = 4\%$
- $R_t = ?$

$$C_t = R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} \quad \text{si tot} \quad C_t = C_0 \cdot (1+i)^t \quad \Rightarrow$$

Egalăm cele două relații :

$$R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} = C_0 \cdot (1+i)^t \quad \Rightarrow$$

$$R_t = C_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1} = 1200000 \cdot \frac{0,04 \cdot (1,04)^{12}}{(1,04)^{12} - 1} =$$

$$= 1200000 \cdot \frac{0,04 \cdot (1,601032)}{0,601032} = 1200000 \cdot \frac{0,06404128}{0,601032} =$$

127862

$$R_t = 127862 \text{ lei/lună}$$

Valoarea de 127862 lei primită lunar poate fi depusă la bancă, obținându-se la sfârșit de perioadă:

$$C_t = 127862 \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} = 127862 \cdot \frac{0,601}{0,04} = 1921228 \text{ lei}$$

sau dacă primește odată 1200000 lei și îi depune la bancă, va avea la sfârșit de perioadă:

$$C_t = 1200000 \cdot (1+i)^t = 1200000 \cdot (1,04)^{12} = 1200000 \cdot (1,601)$$

$$C_t = 1921238 \text{ lei}$$

Diferența între cele două valori se datorează rotunjirilor.

Proprietarul încasează la sfârșit de perioadă aceeași sumă indiferent de proceduri (plata înainte sau plată în rate), numai că trebuie respectată influența pe care o are timpul și rata de rentabilitate (în acest caz rata dobânzii).

După parcurgerea capitolului actualizării, se va înțelege ușor că factorul de compunere pentru un an, B_t , actualizat la timpul $t = 0$, ne dă factorul valorii actuale a unei anuități I_t unde:

$$I_t = \frac{1}{(1+i)^t} \cdot B_t$$

$$I_t = \frac{1}{(1+i)^t} \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} = \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t}$$

Factorul valorii actuale a unei anuități I_t actualizat la timpul $t = n$ ne dă factorul de compunere pentru un an:

$$B_t = I_t \cdot (1 + i)^t \Rightarrow \frac{1}{(1 + i)^t} = \frac{(1 + i)^t - 1}{i}$$

Exemplul nr. 1.10

Fiului unui mare magnat i s-a stabilit o rentă anuală de 60 mil. lei printr-o bancă care oferă o dobândă anuală de 15 % pe o perioadă de 10 ani.

Persoana în cauză dorește să primească banii oferiti, nu în rate anuale sub formă de rentă, ci totuși odată și azi. Cum tatăl, respectiv ofertantul, a asigurat renta anuală oferită prin depunerea inițială (azi) la bancă a unei sume mai mici de 60 mil. \times 10, respectiv 600 mil., dar care în condițiile dobânzii de 15 %, este suficientă pentru a asigura renta stabilită.

Se cere determinarea capitalului C depus la bancă în scopul menționat mai sus.

Utilizăm relația (1.21):

$$C_0 = R_t \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i \cdot (1 + i)^t} = 60 \text{ mil.} \cdot \frac{(1 + 0,15)^{10} - 1}{0,15 \cdot (1 + 0,15)^{10}} = 60 \text{ mil.} \times 5,847$$

$$C_0 = 350820000 \text{ lei}$$

Fiul magnatului primește la solicitarea sa 350820000 lei azi și renunță la 60 mil. pe an, sumă ce urma să o primească în rate anuale timp de 10 ani, respectiv la 600000000 lei.

Exemplul nr. 1.11

Un agent economic este solicitat să intre într-o afacere cu alți colaboratori care-i cer ca, în termen de două sau trei zile să le comunice cu ce capital poate participa.

Agentul analizându-și capacitatea economică, precum și condițiile afacerii, găsește că este mai rentabil să facă pentru cota de participare un împrumut la bancă, împrumut care să nu impună o rată de restituire lunară mai mare de 100000 lei, apreciind că poate suporta această plată timp de 4 ani cu o dobândă de 18 % pe an.

Cu ce valoare participă agentul la afacerea propusă?

Prima dată determinăm dobânda lunară.

Dacă $(1 + i_1) = (1 + 0,18) = 1,18$ atunci și

$$(1 + i_0)^{12} = 1,18$$

unde i_1 = dobânda anuală și i_0 = dobânda anuală.

Căutăm în tabele un $i_x < \frac{18}{12} = 1,5$ pentru anul 12 și obținem $i_m = 1,3\% \Rightarrow (1 + i_m)^{12} = 1,167 = \alpha_m$. Dar $i_M = 1,4\% \Rightarrow (1 + i_M)^{12} = 1,181 = \alpha_M$

În acest caz obținem $i_M = i_o = 1,4$ deci nu mai facem calcule de interpolare.

Avem acum toate datele problemei :

- $R_t = 100000$ lei/lună
- $i_o = 1,4\%$ - dobânda lunară
- $t = 4 \times 12$ luni = 48 luni

Folosim relația (1.21):

$$C_o = R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t}$$

$$C_o = 100000 \cdot \frac{(1+0,014)^{48} - 1}{0,014 \cdot (1+0,014)^{48}} = 100000 \cdot \frac{1,949 - 1}{0,014 \cdot 1,949} =$$

$$= 100000 \cdot \frac{0,949}{0,0273} = 100000 \times 34,76 = 3476000$$

$$\underline{C_o = 3476000 \text{ lei}}$$

1.8 FACTORUL DE RECUPERARE A FONDURILOR

Pentru a determina acest factor, ca și în celelalte cazuri, plecăm de la definiția lui. Acest factor reprezintă valoarea anuală a sumelor ce trebuie plătite pentru a se achita un împrumut de 1 leu în t ani cu rata dobânzii de $i\%$ pe an. Cu alte cuvinte, acest factor va permite calcularea nivelului sumelor constante anuale care se vor plăti pentru a se achita un împrumut într-un anumit număr de ani la o rată a dobânzii stabilită.

Notăm tot arbitrar acest factor cu F_t . Pentru a găsi valoarea lui folosim definiția și relația (1.21) :

$$C_o = R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t}$$

Considerăm împrumutul egal cu 1 leu $\Rightarrow C_o = 1$ pentru că C_o este valoarea împrumutului. În aceste condiții găsim factorul F_t , deci pentru $C_o = 1$, $R_t = F_t$.

Facem înlocuirile și demonstrația este dusă la bun sfârșit :

$$1 = F_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)^t} \Rightarrow$$

$$F_t = \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1} \quad (1.22)$$

F_t , respectiv factorul de recuperare a fondurilor, reprezintă rata anuală a unui împrumut de 1 leu pe timp de t ani cu rata dobânzii i .

Dacă facem un împrumut de N lei, atunci $R_t = N \cdot F_t$ sau revenind la relațiile noastre $R_t = C_0 \cdot F_t$, respectiv:

$$R_t = C_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1} \quad (1.23)$$

unde:

- R_t = rata pe diviziunea de timp (an, lună, etc.)
- i = rata dobânzii pe diviziunea de timp
- C_0 = împrumutul initial.

Această relație ajută pe cei care fac împrumuturi la bancă să-și calculeze singuri ratele de plată pentru o sumă dorită a fi împrumutată.

Este foarte util ca, înainte de a proceda la împrumut, cunoscând dobânda care se practică, să-ți pregătești cu competență mai multe variante, din care se va alege cea mai convenabilă.

Privind mai atent acești doi ultimi factori, (1.21) și (1.23), observăm că și aceștia sunt în raport invers proporțional:

$$I_t = \frac{1}{F_t} \quad \text{și} \quad F_t = \frac{1}{I_t} \quad \Rightarrow \quad I_t \cdot F_t = 1$$

Se observă că atât rata de rambursare cât și rata de recuperare a fondurilor am notat-o cu R_t , asta înseamnă că acestea trebuie să fie egale.

Dar rata de rambursare este :

$$R_t = C_t \cdot \frac{i}{(1+i)^t - 1}$$

iar rata de recuperare a fondurilor este :

$$R_t = C_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$$

Am arătat că în condiții de echivalență $C_t = C_0 \cdot (1+i)^t$.

Dacă se înlocuiește C_t în relația (1.16) rezultă:

$$R_t = C_t \cdot \frac{i}{(1+i)^t - 1} = C_0 \cdot (1+i)^t \cdot \frac{i}{(1+i)^t - 1} = C_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$$

$$R_t = C_0 \cdot \frac{i \cdot (1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$$

si reprezintă rata de recuperare a fondurilor in conformitate cu relatia (1.23).

Utilizând notiunea de actualizare, asupra căreia se va insista în cele ce urmează se poate spune că, factorul de recuperare a fondurilor F_t reprezintă factorul de amortizare actualizat la timpul $t = n$, deci:

$$F_t = A_t \cdot (1 + i)^t$$

si factorul de amortizare este factorul de recuperare a fondurilor actualizat la timpul $t = 0$, adica:

$$A_t = \frac{1}{(1 + i)^t} \cdot F_t$$

Exemplul nr. 1.12

Dacă agentului economic de la exemplul nr. 1.11 i s-ar cere să participe cu suma de 3476000 lei la o afacere, în comun cu alți parteneri, în condițiile unei dobânzi lunare $i = 1,4 \%$ pe o durată de 4 ani, apare implicit întrebarea: Cu ce rate lunare se va achita de această datorie, dacă se implică în afacere?

Folosim relatia (1.23):

$$R_t = C_0 \cdot \frac{i \cdot (1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1}$$

unde:

- R_t = rata lunară căutată
- C_0 = 3476000 lei
- i = 1,4 % pe lună
- t = 4 x 12 luni = 48 luni

$$R_t = 3476000 \cdot \frac{0,014 \cdot (1 + 0,014)^{48}}{(1 + 0,014)^{48} - 1} = 3476000 \cdot \frac{0,0273}{0,949} = 3476000 \cdot 0,02876$$

(Am găsit în tabel că $(1 + 0,014)^{48} = 1,949$)

$$R_t = 100169 \text{ lei} \approx 100000 \text{ lei}$$

Deci, cu această ocazie, am verificat reciproca observând că rata a rămas tot de 100000 lei. Diferențele mici apar ca urmare a utilizării unor factori cu multe zecimale, făcându-se rotunjiri si neluându-se în calcul toate zecimalele.

Exemplul nr. 1.13

Un apartament cu 3 camere este evaluat la 109000 lei. Chiriasul plătește prima rată de 30 % reprezentând 33000 lei, pentru restul de 76000 lei se împrumută de la bancă. Împrumutul trebuie achitat în 10 ani, cu o dobândă de 4 % pe an. Ce rată lunară trebuie să plătească chiriasul?

În primul rând să transformăm dobânda anuală în dobândă lunară, deci căutăm un i_x în jurul valorii $i = \frac{4}{12} \approx 0,33 \%$.

Din tabel obținem la diviziunea 12 :

$$i_m = 0,3 \% \quad \text{și} \quad (1 + i_m)^{12} = 1,036 = \alpha_m \quad \text{apropiat de } 1,04$$

$$i_M = 0,4 \% \quad \text{și} \quad (1 + i_M)^{12} = 1,049 = \alpha_M \quad \text{apropiat de } 1,04$$

Utilizăm relația (1.4) sau (1.5). Astfel relația (1.5) conduce la:

$$i_o = i_m + (i_M - i_m) \cdot \frac{\alpha_m}{\alpha_M + \alpha_m}$$

$$i_o = 0,3 + 0,1 \cdot \frac{1,036}{2,085} = 0,3 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,3 + 0,05$$

$$\underline{i_o = 0,35 \%}$$

$$(1 + i_o)^{120} = (1 + 0,0035)^{120} = (1,0035)^{120} = 1,517$$

$$R_t = C_o \cdot \frac{i \cdot (1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1} = 76000 \cdot \frac{0,0035 \cdot 1,517}{0,517} = 76000 \cdot \frac{0,005209}{0,517}$$

unde :

- $C_o = 76000$ lei - valoarea împrumutului
- $i = 0,35 \%$ - dobânda lunară
- $t = 120$ luni

$$R_t = 76000 \cdot 0,01007 = 764 \text{ lei/lună}$$

În cazul când i_o se găsește la mijlocul intervalului între două mărimi succesive, i se poate determina ca medie aritmetică $(a + b)/2$.

Observatii

Determinarea valorii $(1 + 0,0035)^{120} = 1,517$ se face cunoscând relatiile amintite: $(1+i)^a \cdot (1+i)^b = (1+i)^{a+b}$. Cum tabelul de factori de la sfârșitul lucrării nu are valori ale factorilor $(1+i)^t$ decât până la $t = 50$, suntem nevoiti a face apel la utilizarea relatiei mentionate.

In acelasi timp, nu găsım $i = 0,35\%$, dar găsım $i = 0,3\%$ și $i = 0,4\%$, motiv pentru care vom utiliza ori interpolarea ori media aritmetică.

Pentru diviziunea 50, la $i = 0,3\%$, i devine i_m și pentru $i = 0,4\%$, i devine i_M , astfel că avem :

$$\alpha_m = (1 + 0,003)^{50} = 1,161 \quad \text{și}$$

$$\alpha_M = (1 + 0,004)^{50} = 1,220$$

dar:

$$0,35 = \frac{i_m + i_M}{2}$$

Se poate admite că:

$$(1 + 0,0035)^{50} = \frac{\alpha_m + \alpha_M}{2} = \frac{1,161 + 1,220}{2} = 1,190$$

Dacă ridicăm la pătrat pe 1,190, avem:

$$(1 + 0,0035)^{100} = 1,190^2 = 1,416$$

Repetăm rationamentul pentru $t = 20$ și obținem:

$$(1 + 0,003)^{20} = 1,061 \quad \text{și} \quad (1 + 0,004)^{20} = 1,083$$

Făcând media aritmetică rezultă:

$$\frac{1,061 + 1,083}{2} = 1,072$$

sau

$$(1 + 0,0035)^{20} = 1,072$$

dar:

$$(1 + 0,0035)^{100} \cdot (1 + 0,0035)^{20} = 1,416 \cdot 1,072 = 1,517$$

2. ACTUALIZARI BANCARE

Pentru actualizarea unor fluxuri de valori în timp, relațiile determinate anterior sunt utilizate în marea lor majoritate în acest scop, fapt ce impune o prezentare mai sistematică a acestora, în vederea găsirii mai ușor a relației adecvate, funcție de constituirea și consumarea în timp a fondurilor bănești utilizate în diferite acțiuni economice.

În principal, au fost deduse 3 grupe de formule astfel:

2.1 GRUPA I

Cuprinde formule ce ne ajută să determinăm acumularea de capital cu o singură depunere în cadrul intervalului de timp analizat dar și să determinăm valoarea actuală a unui capital obținut prin influența ratei de actualizare după n ani. Din această grupă fac parte:

2.1.1 Factorul de dobândă compusă D_t

Acest factor, introdus în relația:

$$C_t = C_0 \cdot D_t \quad (2.1)$$

ne dă capitalul C_t pe care l-am acumulat după $t = n$ ani, depunând inițial o valoare C_0 .

$$D_t = (1 + i)^t \quad (2.2)$$

$$C_t = C_0 \cdot (1 + i)^t \quad (2.3)$$

2.1.2 Factorul de actualizare V_t

Factor care de asemenea, introdus în relația:

$$C_0 = C_t \cdot V_t \quad (2.4)$$

ne ajută să calculăm capitalul C_0 depus inițial, cunoscând valoarea acumulată (sau care dorim să o acumulăm) după $t = n$ ani.

$$V_t = \frac{1}{(1 + i)^t} \quad (2.5)$$

$$C_0 = C_t \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \quad (2.6)$$

Acești doi factori se actualizează unul pe altul dacă-l considerăm pe i rata de actualizare, astfel că valoarea

$$V_t \cdot D_t = \frac{1}{(1+i)^t} \cdot (1+i)^t = 1 \quad (2.7)$$

are două sensuri:

1. Actualizarea factorului V_t ceea ce înseamnă că avem un capital subunitar azi în valoare de $\frac{1}{(1+i)^t}$ pe care-l depunem timp de $t = n$ ani la o bancă și cu dobânda i obținem peste n ani capitalul de 1 (un) leu. Operația se numește actualizare la timpul $t = n$.

2. Actualizarea factorului D_t ceea ce înseamnă că, cunoaștem o valoare $(1+i)^t = D_t$ constituită după $t = n$ ani și aducem această valoare în timpul $t = 0$ care va fi de 1 (un) leu. Operația se numește actualizarea la timpul de azi, respectiv la timpul $t = 0$.

2.2 GRUPA II

Cuprinde formule ce ne ajută la calcularea unui capital acumulat la timpul $t = n$, în urma unor depuneri constante în fiecare diviziune de timp pe o perioadă de timp, începând cu timpul $t = 0$, $t = 1$, $t = x - 1$ sau $t = x$, unde x ia valoarea 2, 3, ...

Tot din această grupă face parte și factorul care ne ajută să determinăm depunerile constante, cunoscând valoarea acumulată sau valoarea de rambursat.

Deci, vom avea două formule pentru factorii de acumulare și două formule pentru factorii de determinare a ratelor de depunere constantă, funcție de momentul depunerii în cadrul diviziunii de timp (la începutul anului sau la sfârșitul anului, respectiv la $t = 0$ sau la $t = 1$).

2.2.1 Factorul de compunere pentru un an B_{t_C} cu depuneri la $t = 0$

Acest factor se definește prin:

$$B_{t_C} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t}{i} \quad (2.8)$$

Introdus în relația:

$$C_{t_C} = R_{t_C} \cdot B_{t_C} \quad (2.9)$$

și înlocuind, rezultă:

$$C_{t_C} = R_{t_C} \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} \quad (2.10)$$

unde:

C_{t_C} = capitalul acumulat după t ani cu depuneri de rate egale în fiecare an la începutul fiecărui an.

R_{t_C} = rata anuală.

2.2.2 Factorul de compunere pentru un an B_t cu depuneri la $t = 1$

$$B_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i} \quad (2.11)$$

Introdus în relația (2.9) conduce la:

$$C_t = R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} \quad (2.12)$$

unde:

C_t = valoarea rambursată după t ani cu rate lunare sau anuale constante depuse la sfârșitul fiecărei luni sau an.

2.2.3 Factorul de amortizare A_t la $t = 1$

$$A_t = \frac{i}{(1+i)^t - 1} \quad (2.13)$$

Introdus în relația $R_t = C_t \cdot A_t$ rezultă:

$$R_t = C_t \cdot \frac{i}{(1+i)^t - 1} \quad (2.14)$$

unde:

R_t = Rata anuală ce trebuie depusă la sfârșitul fiecărui an pentru a rambursa capitalul investit C_t .

2.2.4 Factorul de amortizare A_{tC} la $t = 0$

$$A_{tC} = \frac{i}{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]} \quad (2.15)$$

Introdus în relația $R_{tC} = C_{tC} \cdot A_{tC}$ rezultă:

$$R_{tC} = C_{tC} \cdot \frac{i}{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]} \quad (2.16)$$

unde:

R_{tC} = Rata ce trebuie să o depunem la bancă cu dobânda i cu scopul de a acumula peste t ani capitalul C_{tC} depunerea făcându-se la începutul fiecărui an (lună).

Din această grupă pentru calcule de actualizare se folosesc primele două relații care sunt:

$$C_{tC} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

și

$$C_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Cu aceste relații actualizarea se face la timpul $t = n$.

2.3 GRUPA III

Din această grupă fac parte două formule care ne ajută să calculăm valoarea unui împrumut, cunoscând ratele anuale sau să determinăm aceste rate dacă stim valoarea împrumutului.

2.3.1 Factorul valorii actuale a unei anuitati I_t

$$I_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} \quad (2.17)$$

Introdusă în relația $C_0 = R_t \cdot I_t$ rezultă:

$$C_0 = R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} \quad (2.18)$$

Prin această relație se face actualizarea la timpul $t = 0$, a unor depuneri constante în fiecare unitate de timp pe o perioadă de n unități de timp (ani, luni, etc.) la o rată de actualizare i pe unitatea de timp. C_0 ar putea fi împrumutul pe care îl fac azi și pe care-l pot achita, suportând rata dobânzii i în t ani cu rata R_t .

2.3.2 Factorul de recuperare a fondurilor F_t

$$F_t = \frac{i(1+i)^t}{(1+i)^t - 1} \quad (2.19)$$

Introdus în relația $R_t = C_0 \cdot F_t$ rezultă :

$$R_t = C_0 \cdot \frac{i(1+i)^t}{(1+i)^t - 1} \quad (2.20)$$

ajutându-ne să calculăm ratele de achitare ale unui împrumut R_t dacă cunoaștem valoarea împrumutului. Această relație nu se utilizează la calcule de actualizare.

2.4 CALCULE DE ACTUALIZARI

În vederea efectuării unor calcule de fezabilitate sau de eficiență a unor acțiuni economice se folosesc în mod frecvent calculele de actualizare.

Prin acest calcul se analizează evenimentele economice prevăzute sau cunoscute azi pentru timpul viitor, în condițiile unei rate de actualizare considerată rentabilă și sub influența căreia se translatează în timp valorile bănești în continuă transformare. Pe această cale, analizăm costuri și venituri ce se prevăd sau se cunosc pe un interval de timp de la $t = 0$ la $t = n$, aducându-se din viitor în prezent sau fiind duse din prezent în viitor.

În aceste condiții, cunoscând bine ratele de rentabilitate externe și alegând în mod corect rata economică de rentabilitate avem mari șanse să evităm multe insuccese economice într-o societate bazată pe economia de piață, utilizând în mod corect analizele economice bazate pe actualizări.

Asa cum am văzut în sinteză, numai unele din relațiile stabilite se folosesc la aceste calcule, a căror utilizare este determinată de felul depunerii sau încasării în rate sau o singură dată, precum și de momentul actual și de viitor ales pentru actualizare.

2.4.1 Calcule de Actualizari a unor depuneri, incasari, plati sau venituri intr-un singur moment

Această situație este cea mai frecvent utilizată, deoarece veniturile sau costurile determinate pe un interval de la t_0 până la $t = n$ ani, nu au în general aceeași valoare pentru fiecare an, astfel că actualizarea valorilor înregistrate se face pentru fiecare an în parte.

2.4.1.1 Actualizare la $t = 0$

Plecăm, pentru o mai bună edificare, de la o analiză a unei depuneri după un an de zile respectiv de la $t = 1$. Valoarea actualizată va fi valoarea la $t = 0$ și o notăm C_{a0} . După un an, C_{a0} se amplifică cu valoarea factorului de dobândă compusă, rezultând o valoare C_1 astfel că:

$$C_1 = C_{a0} \cdot (1 + i)^1 \quad \text{de unde} \quad C_{a0} = C_1 \cdot \frac{1}{(1 + i)^1}$$

Astfel am găsit valoarea actualizată la timpul $t = 0$, C_{a0} a unei valori cunoscute la timpul $t = 1$, C_1 .

Dacă acest capital C_1 s-ar fi depus la timpul $t = x$, atunci relația ar deveni:

$$C_{a0} = C_x \cdot \frac{1}{(1 + i)^x}$$

care se mai poate verifica și altfel.

Considerăm întreg intervalul de timp $t = n$ și ducem toate valorile la acest timp, în cazul nostru valoarea C_x de la $t = x$ la $t = n$ deci, $C_n = C_x \cdot (1 + i)^{t-x}$ deoarece $t - x$ ani sunt de la momentul x la momentul n , considerând numărătoarea timpilor $0, 1, 2, \dots, x, \dots, n$.

Aducerea la $t = 0$ a unei valori C_n se face cu relația deja cunoscută $C_{a0} = C_n \cdot \frac{1}{(1 + i)^t}$ unde $t = n$, înlocuind pe C_n rezultă că:

$$C_{a0} = C_x \cdot (1 + i)^{t-x} \cdot \frac{1}{(1 + i)^t}$$

sau

$$C_{a0} = C_x \cdot (1 + i)^{t-x} \cdot (1 + i)^{-t} = C_x \cdot (1 + i)^{t-x-t} = C_x \cdot (1 + i)^{-x}$$

Deci:

$$C_{a0} = C_x \cdot \frac{1}{(1 + i)^x} \quad (2.21)$$

2.4.1.2 Actualizare la $t = n$

Dacă depunerea se face din primul an, respectiv la $t = 0$ și unde avem o depunere C_0 , atunci $C_{na} = C_0 \cdot (1 + i)^t$ unde $t = n$ reprezintă respectiv numărul maxim de diviziuni de timp din intervalul de timp luat în studiu.

Foarte frecvent suntem nevoiți să actualizăm o valoare prezumptivă de la un $t_x = x$ din interiorul intervalului de timp sau actualizăm o valoare adusă la momentul $t = x$ cu alte relații de actualizare de unde o ducem ca o depunere constantă la timpul $t_n = n$.

Relatia de calcul a actualizării unei valori situată în interiorul intervalului studiat la $t = x$, în condițiile ducerii acestei valori la timpul $t = n$ este $C_{na} = C_x \cdot (1 + i)^{t-x}$, unde $t = n$ și:

C_{na} = valoarea actualizată peste n ani

$t = n$ numărul de diviziuni de timp

C_x = valoarea din anul, luna sau a diviziunii de timp egală cu x , numerotată de la 1 la n .

Intr-adevăr, să tratăm problema pe întreg intervalul, caz în care va trebui să pornim de la $t_0 = 0$. Pentru a putea aplica relația pe întreg intervalul, aducem valoarea de la momentul $t_x = x$ la momentul $t_0 = 0$. Aceasta translație se face cu ajutorul relației utilizate la actualizarea valorilor din interval la $t = 0$ având:

$$C_0 = C_x \cdot \frac{1}{(1 + i)^x}$$

Dar pentru $t = n$ stim că:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^t$$

Inlocuind pe C_0 , rezultă relația pe care urmărim să o deducem:

$$C_{na} = C_x \cdot \frac{1}{(1 + i)^x} \cdot (1 + i)^t = C_x \cdot (1 + i)^{-x} \cdot (1 + i)^t$$

$$C_{na} = C_x \cdot (1 + i)^{t-x} \quad (2.22)$$

Exemplul nr. 2.1

Dacă facem corect actualizarea unor evenimente economice, se constată că, uneori raportul venituri supra costuri actualizate la timpul $t = 0$ și la timpul $t = n$ au aceeași valoare.

Se consideră că la timpul $t = 6$ dintr-un interval de timp de la $t = 0$ până la $t = 10$, avem înregistrate următoarele valori :

- costuri totale pe an $C_6 = 100.000$ lei.
- venituri totale pe an $V_6 = 150.000$ lei.

Care este valoarea raporturilor $\frac{V_{0a}}{C_{0a}}$ și $\frac{V_{na}}{C_{na}}$ dacă rata de actualizare $i = 10\%$?

Determinăm valorile V_{0a} și C_{0a} prin actualizarea la timpul $t = 0$.

Aplicăm relația: $C_{a0} = C_x \cdot \frac{1}{(1 + i)^x}$

Observație: C poate avea simbol de capital sau de cost.

Inlocuim în formulă:

$$C_{0a} = C_6 \cdot \frac{1}{(1 + i)^6} = 100.000 \cdot \frac{1}{(1 + 0,10)^6} = 100.000 \cdot \frac{1}{(1,10)^6}$$

Din tabele se scoate la diviziunea 6 și $i = 10\%$ valoarea $(1+0,10)^6 = (1,10)^6 = 1,771$ iar $\frac{1}{1,771} = 0,564$. Rezultă că $C_{0a} = 100.000 \times 0,564 = 56.400$ lei.

$$V_{0a} = V_6 \cdot \frac{1}{(1 + i)^6} = 150.000 \cdot \frac{1}{(1,10)^6} = 150.000 \times 0,564$$

$$V_{0a} = \underline{84.600 \text{ lei}}$$

Repetăm calculul, dar facem actualizarea la timpul $t = n$; utilizând relația dedusă $C_{na} = C_x \cdot (1+i)^{t-x}$ și înlocuind avem :

$$C_{na} = 100.000 (1+0,10)^{10-6} = 100.000 (1,10)^4$$

În tabel la $i = 10\%$ și la $t = 4$ avem $(1,10)^4 = 1,464$ și deci $C_{na} = 100.000 \times 1,464 = 146.400 \text{ lei}$.

$$C_{na} = \underline{146.400 \text{ lei}}$$

$$V_{na} = 150.000 (1,10)^4 = 150.000 \times 1,464 = 219.000$$

$$V_{na} = \underline{219.000 \text{ lei}}$$

Scriind rapoartele, avem :

$$\frac{V_{0a}}{C_{0a}} = \frac{56.400}{84.600} = 1,50 \text{ și}$$

$$\frac{V_{na}}{C_{na}} = \frac{219.000}{146.000} = 1,50$$

În acest exemplu se poate vedea că în condițiile unei aceeași rate de actualizare, indiferent dacă actualizarea se face la început de perioadă sau la sfârșit de perioadă, răspunsul la problema eficienței economice este același.

De reținut faptul că nu în toate condițiile raportul V/C este identic cu V_a/C_a ca în exemplul de mai sus; exemplul dat nu reprezintă un caz general, ci are mai mult scopul de a exemplifica utilizarea relației de actualizare.

2.5 CALCULUL DE ACTUALIZARE A UNOR DEPUNERI, INCASARI SAU PLATI SUB FORMA DE RATE PERIODICE SI IN VALORI CONSTANTE

Pentru actualizarea unor valori în aceste condiții, se utilizează factorul valorii actuale a unei anuități I_t și factorul de compunere pentru un an B_t .

2.5.1 Actualizare la timpul $t = 0$

Dacă în intervalul de timp $t = 0$ până la $t = n$, avem în fiecare an depuneri (cheltuieli, venituri etc.) egale sub formă de rate, relația de calcul este dată de factorul valorii actuale a unei anuități I_t .

Notând această depunere constantă cu R_t , scriem relațiile cunoscute:

$$C_{0a} = R_t \cdot I_t \quad (2.23)$$

$$C_{0a} = R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} \quad (2.24)$$

cu singura deosebire că C_{0a} este valoarea actualizată la timpul $t = 0$ a unor depuneri constante într-o perioadă de $t = n$ diviziuni de timp.

Ca si în cazul depunerilor unice, si aici avem diverse cazuri ce pot fi întâlnite în cadrul intervalului $t = 0$ până la $t = n$ privind momentul începerii depunerilor precum si momentul finalizării depunerilor.

Să analizăm cazul când depunerile încep în momentul $t_x = x$ si se fac depuneri constante până la $t = n$.

Pentru a stabili relatia de calcul în acest caz, plecăm de la modul în care s-a determinat factorul valorii actuale a unei anuități I_t .

$$\text{Relatia I: } \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^x} + \frac{1}{(1+i)^{x+1}} + \dots + \frac{1}{(1+i)^t}$$

Această relatie se mai poate scrie si sub forma :

$$\text{Relatia II: } \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^x} + \left(\frac{1}{(1+i)^x} \right) \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{t-x}} \right]$$

Aici avem doi factori, astfel:

$$A = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^x} = \frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^x} \quad \text{si}$$

$$B = \frac{1}{(1+i)^x} \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{t-x}} \right] = \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}} \cdot \frac{1}{(1+i)^x}, \quad \text{deci}$$

$$\text{Relatia III: } \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^x} + \left(\frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}} \right) \cdot \frac{1}{(1+i)^x}$$

reprezintă suma celor doi factori $A + B$.

Atunci când depunerea începe la $t_x = x$ primii termeni până la $t_x = x$ nu există, deci relatia $\frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^x}$ se scade din $\sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ sau notând pe $n = t$ avem:

$$\sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+i)^t} = \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t}$$

Relatia ultimă este echivalentă cu relatia III caci:

$$\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} = \frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^x} + \frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}}$$

Conform enunțului din partea stângă a acestei relații trebuie să scădem efectul primei părți a intervalului până la $t = x$ și avem :

$$\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} - \frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^x} = \frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}}$$

Relația $\frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}}$ este factorul de calcul al actualizării unei valori în condițiile de mai sus:

$$C_{Oa} = R_t \cdot \frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}} \quad (2.25)$$

Uneori este mai comod să folosim relația intermediară obținută anterior, respectiv din factorul de actualizare total se scade efectul primei perioade fără depuneri astfel că, relația de calcul în acest caz mai poate fi scrisă și astfel:

$$C_{Oa} = R_t \cdot \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} - \frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^x} \right] \quad (2.26)$$

Exemplul nr. 2.2

Să se calculeze valoarea actualizată la timpul $t = 0$ a unor depuneri constante anuale $R_t = 60.000$ lei/an. Depunerile încep de la timpul $t_x = 4$ (în cel de-al patrulea an) știind că durata $t = 10$ ani, iar rata de actualizare $i = 10\%$.

Utilizăm relația (2.25):

$$C_{Oa} = R_t \cdot \frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}}$$

unde:

$$R_t = 60.000 \text{ lei}$$

$$i = 10\%$$

$$t = 10 \text{ ani}$$

$$x = 4 \text{ ani}$$

$$C_{Oa} = 60.000 \cdot \frac{1}{(1,10)^4} \cdot \frac{(1,10)^6 - 1}{0,10 \cdot (1,10)^6}$$

$$C_{Oa} = 60.000 \cdot (0,683) \cdot (4,355) = 60.000 \times 2,974 = 178.440$$

Folosind relația (2.26) avem :

$$C_{Oa} = 60.000 \cdot \left[\frac{(1,10)^{10} - 1}{0,10 \cdot (1,10)^{10}} - \frac{(1,10)^4 - 1}{0,10 \cdot (1,10)^4} \right]$$

$$C_{Oa} = 60.000 \cdot (6,144 - 3,170) = 60.000 \times 2,974$$

Deci, cu ambele relatii obtinem

$$C_{0a} = \underline{178.440 \text{ lei.}}$$

Dacă se cere să se facă actualizarea la $t = 0$ a unor depuneri ce se fac de la timpul $t = 0$ la timpul $t_x = x$ pe un interval de timp de la $t = 0$ la $t = n$ atunci, pentru determinarea relatiei plecăm de la egalitatea determinată anterior:

$$\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} = \frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^x} + \frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}}$$

În condițiile enunțului de mai sus, pentru a obține relația de calcul, scădem din valoarea factorului din stânga, factorul din dreapta, ce marchează zona fără depuneri, deci :

$$\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} - \frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}} = \frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^x}$$

$$C_{0a} = R_t \cdot \frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^x} \quad (2.27)$$

În acest mod, se pot determina și alte variante așa cum poate fi situația când evenimentele economice se petrec în interiorul intervalului, respectiv la $t = x$ până la $t = x+3$ pe un interval de timp de la 0 la n , unde $n > x+3$ și $x > 0$.

2.5.2 Actualizarea unor depuneri sau costuri la timpul $t = n$

Dacă depunerea constantă se face pe întreg intervalul de la $t = 0$ la $t = n$, actualizarea se face folosindu-ne de factorul de acumulare prin depuneri anuale în rate egale B_{t_c} :

$$B_{t_c} = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]}{i}$$

când depunerea se face la timpul $t = 0$ și nu la sfârșitul anului .

Prin notiunea de timp $t = 0$ trebuie să se înțeleagă că facem actualizarea la timpul de azi, fapt pentru care valoarea timpului t din relația:

$$B_{t_c} = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]}{i} \quad \text{față de} \quad B_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

diferă cu o unitate deoarece prima relație începe de la timpul $t = 0$ și a doua de la timpul $t = 1$, lucru ce se observă ușor la puterile sirurilor de termeni din cele două serii geometrice a căror sumă reprezintă relațiile de mai sus.

În cazul depunerilor inițiale de rate egale la începutul diviziunii de timp, cea mai simplă actualizare la timpul $t = n$ o constituie chiar relația de calcul a capitalului acumulat în aceste condiții peste $t = n$ ani, respectiv:

$$C_{na} = R_t \cdot \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]}{i}$$

unde C_{na} este valoarea actualizată la timpul $t = n$ a unor depuneri

constante R_t în fiecare diviziune de timp la începutul diviziunii.

Ca și în cazul precedent, depunerile pot începe din interiorul intervalului, ceea ce impune un raționament mai atent în utilizarea factorilor de calcul.

Presupunem și aici că depunerea începe la timpul $t_x = x$ și se finalizează la $t = n$. În mod analog analizăm problema, utilizând progresia geometrică a cărei sumă ne dă factorul B_{t_C} :

$$B_{t_C} = \sum_{t=1}^n (1+i)^t = (1+i)^1 + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^x + (1+i)^{x+1} + \dots + (1+i)^t$$

Considerăm valoarea B_{t_C} ca fiind suma a doi coeficienți determinați prin două sume de siruri respectiv:

$$B_{t_x} = \sum_{t=1}^x (1+i)^t = (1+i)^1 + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^x$$

$$B_{t_{n-x}} = \sum_{t=x+1}^n (1+i)^t = (1+i)^{x+1} + (1+i)^{x+2} + \dots + (1+i)^t$$

$$\text{unde } t = n \text{ și } B_{t_C} = B_{t_x} + B_{t_{n-x}}$$

$$B_{t_x} = (1+i) [1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{x-1}]$$

$$B_{t_{n-x}} = (1+i)^{x+1} [1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{t-(x+1)}]$$

sau:

$$B_{t_x} = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^x - 1]}{i}$$

$$B_{t_{n-x}} = \frac{(1+i)^{x+1} \cdot [(1+i)^{t-x} - 1]}{i}$$

Deci:

$$B_{t_C} = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^x - 1]}{i} + \frac{(1+i)^{x+1} \cdot [(1+i)^{t-x} - 1]}{i}$$

Înlocuind pe B_{t_C} cu valoarea sa avem:

$$\frac{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]}{i} = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^x - 1]}{i} + \frac{(1+i)^{x+1} \cdot [(1+i)^{t-x} - 1]}{i}$$

Cum din enunțul problemei, perioada 1, 2,, x este fără depuneri, efectul acestor depuneri constante trebuie scăzut din relația generală, respectiv $B_{t_C} - B_{t_x} = B_{t_{n-x}}$ sau:

$$\frac{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]}{i} - \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^x - 1]}{i} = \frac{(1+i)^{x+1} \cdot [(1+i)^{t-x} - 1]}{i}$$

Din această relație putem preciza că $C_{na} = R_t \cdot B_{t_{n-x}}$ sau

$$C_{na} = R_t \cdot (B_{t_c} - B_{t_x})$$

Deci:

$$C_{na} = R_t \cdot \left\{ \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]}{i} - \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^x - 1]}{i} \right\} \quad (2.28)$$

și:

$$C_{na} = R_t \cdot \frac{(1+i)^{x+1} \cdot [(1+i)^{t-x} - 1]}{i} \quad (2.29)$$

Această analiză de calcul ne permite să determinăm factori și în alte condiții, inclusiv pentru factori utilizați în rambursarea unor investiții unde se utilizează relația:

$$B_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

cu depuneri la sfârșit de an, luni etc.

Exemplul nr. 2.3

Să se calculeze valoarea actualizată la timpul $t = n$ a unor depuneri constante anuale $R_t = 60.000$ lei. Depunerile încep de la $t = 4$ știind că durata este de $t = 10$ ani, iar rata de actualizare este $i = 10\%$. Depunerile se fac la începutul anului.

Folosim relația (2.29):

$$C_{na} = R_t \cdot \frac{(1+i)^{x+1} \cdot [(1+i)^{t-x} - 1]}{i} = \frac{60.000 \cdot (1,10)^5 \cdot [(1,10)^6 - 1]}{0,10}$$

$$C_{na} = \frac{60.000 \cdot (1,610) [(1,771) - 1]}{0,10} = \frac{60.000 \cdot (1,610 \times 0,771)}{0,10}$$

$$C_{na} = 600.000 \times 1,241 = 744.600 \text{ lei}$$

Utilizând și relația (2.28) va trebui să dăm peste același rezultat.

$$C_{na} = R_t \cdot \left\{ \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]}{i} - \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^x - 1]}{i} \right\}$$

$$C_{na} = 60.000 \cdot \left\{ \frac{(1,10) \cdot [(1,10)^{10} - 1]}{0,10} - \frac{(1,10) \cdot [(1,10)^4 - 1]}{0,10} \right\}$$

$$C_{na} = 60.000 \cdot \left[\frac{1,10 \cdot (2,593 - 1)}{0,10} - \frac{1,10 \cdot (1,464 - 1)}{0,10} \right]$$

$$C_{na} = 600.000 [(1,10 \times 1,593) - (1,10 \times 0,464)]$$

$$C_{na} = 600.000 (1,752 - 0,510) = 600.000 \times 1,242$$

$$C_{na} = \underline{745.200 \text{ lei}} .$$

Diferența mică între cele două valori se datorează rotunjirii zecimalelor.

Exemplul nr. 2.4

La problema precedentă îi mai putem face verificarea și enunțând, sub o altă formă, datele problemei :

Cu ce rate anuale se achită o datorie a cărei valoare la timpul $t = 0$ este de 178.440 lei (exemplul nr. 2.2) știind că plata ratelor decurge după 4 ani, respectiv de la $t_x = 4$ și se desfășoară pînă la $t = 10$ la o rată de actualizare $i = 10\%$.

Pentru rezolvarea problemei plecăm de la relația actualizării la $t = 0$, adică de la relația (2.25):

$$C_{0a} = R_t \cdot \frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}}$$

de unde scoatem valoarea necunoscută R_t conform enunțului de mai sus:

$$R_t = C_{a0} \cdot (1+i)^x \cdot \frac{i(1+i)^{t-x}}{(1+i)^{t-x} - 1}$$

Inlocuind, avem :

$$R_t = 178440 \cdot (1,10)^4 \cdot \frac{0,10 \cdot (1,10)^6}{(1,10)^6 - 1}$$

$$R_t = 178440 \cdot (1,464) \cdot (0,230) = 178440 \times 0,336$$

$$R_t = 59.956$$

Eroarea se datorează zecimalelor rotunjite, deci $R_t \approx \underline{60.000 \text{ lei}}$.

Exemplul nr. 2.5

În scopul de a clarifica în cea mai mare măsură diversele situații ce pot apărea în calculele actualizării, considerăm că în cadrul unui studiu mai vast de fezabilitate analizat pe o perioadă de 10 ani într-o unitate economică, un anumit tip de costuri evidentiat separat se înregistrează numai în anul 4, 5 și 6 cu o valoare de 1.500.000 lei pe an, iar în perioadele 1 - 3 și 7 - 10 nu se prevede nimic. Considerăm rata de actualizare $i = 20\%$.

Se cere să se determine valoarea actualizată la timpul $t = 0$ și la timpul $t = n$.

Datele problemei :

$$\begin{aligned} R_t &= 1.500.000 \text{ lei/an} \\ i &= 20\% \text{ pe an} \\ t &= 10 \text{ ani durată totală} \\ t_x &= 4 \text{ ani} \\ t_y &= 6 \text{ ani} . \end{aligned}$$

Pentru a înțelege modul de calcul, plecăm de la progresele inițiale

de determinare a factorilor de actualizare. Stim că, pentru actualizarea la timpul $t = n$ a unor depuneri constante, folosim factorul de compunere pentru un an:

$$B_t = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]}{i}$$

iar pentru actualizarea la timpul $t = 0$ factorul valorii actuale a unei anuități:

$$I_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t}$$

Facem actualizarea la timpul $t = n$. In acest caz, avem sirul:

$$(1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^x + \dots + (1+i)^y + \dots + (1+i)^t$$

Constatăm că totii termenii de la $(1+i)$ până la $(1+i)^{x-1}$ lipsesc, după enunțul problemei, de asemenea lipsesc termenii de la $(1+i)^{y+1}$ până la $(1+i)^t$ din același motiv.

In cazul acestui gen de probleme, actualizarea se face pe porțiuni astfel:

Facem întâi actualizarea până la $t = y$, ținând cont de particularitatea că termenii până la $(1+i)^{x+1}$ lipsesc, scădem influența acestor termeni

$$B_{t_y} = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^y - 1]}{i} - \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^{x-1} - 1]}{i}$$

și folosim relațiile $C_{n_a} = C_{y_a} \cdot D_{t_y}$ și $C_{y_a} = R_t \cdot B_{t_y}$ deci avem:

$$C_{n_a} = R_t \cdot B_{t_y} \cdot D_{t_y}$$

unde:

$$D_{t_y} = (1+i)^{t-y}$$

C_{n_a} = valoarea costurilor actualizate la $t = n$

C_{y_a} = valoarea costurilor actualizate la timpul $t = y$

care se consideră la acest moment y o depunere la care aplicându-i factorul D_{t_y} , determinăm valoarea acesteia peste timpul $t - y$ ani. In relația B_{t_y} am scris relația pe întreg intervalul de la 1 la y din care am scăzut influența primilor termeni care lipsesc. Să calculăm factorul B_{t_y} :

$$B_{t_y} = \frac{(1,20) [(1,20)^6 - 1]}{i} - \frac{(1,20) [(1,20)^3 - 1]}{i}$$

$$B_{t_y} = (1,20 \times 9,929) - (1,20 \times 3,640) = 7,54$$

$$C_{n_a} = R_t \cdot B_{t_y} \cdot D_{t_y} = 1.500.000 \times 7,54 \times (1+i)^{t-y}$$

$$C_{n_a} = 11.310.000 \times (1,20)^4 = 11.310.000 \times 2,073$$

$$C_{na} = \underline{23.455.630 \text{ lei}} .$$

Aceeasi valoare o putem obtine si dacà facem un alt rationament. Scriem seria până la termenul t pe care o egalăm cu suma ei restrânsă:

$$(1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^x + (1+i)^{x+1} + \dots + (1+i)^y = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^y - 1]}{i}$$

Facem suma termenilor pe intervale:

$$(1+i) [1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{x-2}] + (1+i)^x \cdot [1 + (1+i)^1 + \dots + (1+i)^{y-x}] = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^y - 1]}{i}$$

Scriem relatiile sub formă restrânsă:

$$\frac{(1+i) \cdot [(1+i)^{x-1} - 1]}{i} + \frac{(1+i)^x \cdot [(1+i)^{y-x+1} - 1]}{i} = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^y - 1]}{i}$$

deci:

$$\frac{(1+i)^x \cdot [(1+i)^{y-x+1} - 1]}{i} = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^y - 1]}{i} - \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^{x-1} - 1]}{i}$$

Dar factorii din dreapta reprezintă tocmai B_{ty} deci, mai putem spune că:

$$B_{ty} = \frac{(1+i)^x \cdot [(1+i)^{y-x+1} - 1]}{i}$$

Facem calculele si avem :

$$B_{ty} = \frac{(1,20)^4 \cdot [(1,20)^3 - 1]}{0,20} = 7,54$$

Deci:

$$C_{ny_a} = R_t \cdot B_{ty} = 1.500.000 \times 7,54 = 11.310.000$$

$$C_{na} = C_{ny_a} \cdot D_{ty} = C_{ny_a} \cdot (1+i)^{t-y}$$

$$C_{na} = 11.310.000 \times (1,20) = 23.455.630$$

$$C_{na} = \underline{23.455.630 \text{ lei}}$$

Aceeasi valoare o putem obtine si dacà facem un alt rationament. Scriem seria până la termenul t pe care o egalăm cu suma ei restrânsă:

$$(1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^x + (1+i)^{x+1} + \dots + (1+i)^y = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^y - 1]}{i}$$

Facem suma termenilor pe intervale :

$$(1+i)[1+(1+i)^1+(1+i)^2+\dots+(1+i)^{x-2}] + (1+i)^x \cdot [1+(1+i)^1+\dots+(1+i)^{y-x}] = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^Y - 1]}{i}$$

Scriem relatiile sub formă restrânsă:

$$\frac{(1+i) \cdot [(1+i)^{x-1} - 1]}{i} + \frac{(1+i)^x \cdot [(1+i)^{y-x+1} - 1]}{i} = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^Y - 1]}{i}$$

Deci:

$$\frac{(1+i)^x \cdot [(1+i)^{y-x+1} - 1]}{i} = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^Y - 1]}{i} - \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^{x-1} - 1]}{i}$$

Dar factorii din dreapta reprezintă tocmai B_{tY} deci, mai putem spune că:

$$B_{tY} = \frac{(1+i)^x \cdot [(1+i)^{y-x+1} - 1]}{i}$$

Facem calculele si avem :

$$B_{tY} = \frac{(1,20)^4 \cdot [(1,20)^3 - 1]}{0,20} = 7,54$$

Deci obtinem:

$$C_{n_{Ya}} = R_t \cdot B_{tY} = 1.500.000 \times 7,54 = 11.310.000$$

$$C_{na} = C_{n_{Ya}} \cdot D_{tY} = C_{n_{Ya}} \cdot (1+i)^{t-y}$$

$$C_{na} = 11.310.000 \times (1,20) = 23.455.630$$

$$C_{na} = \underline{23.455.630 \text{ lei}}$$

Actualizarea la timpul t = 0 :

Si în acest caz, ne folosim de elementele ce au stat la baza determinării valorii factorului valorii actuale a unei anuități I_t deoarece acesta este factorul cu ajutorul căruia aducem valoarea din timpul t = n în timpul t = 0. Plecăm de la progresia geometrică:

$$\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{x-1}} + \frac{1}{(1+i)^x} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{y-1}} + \frac{1}{(1+i)^y} + \dots + \frac{1}{(1+i)^t}$$

In problemă avem 3 intervale:

- Un interval de la 1 la x fără depuneri;
- Un interval de la x la y cu depuneri constante;
- Un interval de la y la t fără depuneri.

Pentru a calcula valoarea acestor depuneri, respectiv suma de la timpul $t = 0$, înseamnă că vom aduce această valoare din timpul $y, y-1, y-2, \dots, x$ în timpul de azi, știind că din timpul x și până azi nu avem depuneri. Intervalul de la y la t în acest caz, nu ne mai interesează, neavând nici o influență. Ca și în problema anterioară, ne folosim numai de termenii sirului până la $t = y$, separând cele două intervale rămase, formând două siruri:

$$\frac{(1+i)^y - 1}{i(1+i)^y} = \frac{1}{(1+i)} \cdot \left(1 + \frac{1}{(1+i)^1} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{x-1}} \right) + \frac{1}{(1+i)^{x-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{(1+i)^1} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{y-(x+1)}} \right)$$

Scriind sumele acestor două siruri avem :

$$\frac{(1+i)^y - 1}{i(1+i)^y} = \frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^x} + \frac{1}{(1+i)^x} \cdot \left(\frac{(1+i)^{y-x+1} - 1}{(1+i)^{y-x+1}} \right)$$

Din relația din dreapta, scăzând efectul perioadei fără depuneri, rămâne valoarea actualizată la timpul $t = 0$ a celor 3 depuneri constante.

$$\frac{(1+i)^y - 1}{i(1+i)^y} - \frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^x} = \frac{1}{(1+i)^x} \cdot \left(\frac{(1+i)^{y-x+1} - 1}{(1+i)^{y-x+1}} \right)$$

Deci, factorul căutat pentru actualizare la timpul $t = 0$ a valorilor din problema propusă este :

$$I_{t_0} = \frac{1}{(1+i)^x} \cdot \left(\frac{(1+i)^{y-x+1} - 1}{(1+i)^{y-x+1}} \right)$$

$$C_{n_0} = R_t \cdot I_{t_0} = 1.500.000 \cdot \frac{1}{(1,20)^4} \cdot \left(\frac{(1,20)^3 - 1}{0,2 \cdot (1,20)^3} \right)$$

$$C_{n_0} = 1.500.000 \times 0,4 \times 2 \times 2,106 = 1.522.158$$

$$C_{n_0} = \underline{1.522.158 \text{ lei}}$$

În concluzie, calculul de actualizare ajută să transmitem valorilor bănești din diferite momente ale intervalului luat în calcul, amprenta mediului financiar în condiții de stabilitate relativă. Asta înseamnă că, apreciind în mod corect fluctuația fluxului bănesc, putem obține cu ajutorul acestor calcule, așa cum vom vedea, unele aprecieri importante privind eficiența unor cheltuieli.

Această incursiune teoretică în calculele de actualizare, socotim că are menirea să sedimenteze mai solid abilitatea de a mînuși cu ușurință relațiile prezentate fiind credem, foarte utile celor ce sunt puși să facă analize de fezabilitate și doresc să justifice concluziile lor pe o bază bine profundată.

De asemenea, calculele de actualizare se pot utiliza și la probleme curente obișnuite, de exemplu reluând problema exemplului nr. 1.12 în care s-au determinat ratele de plată la un împrumut în valoare de 76.000 lei pentru cumpărarea unui apartament cu 3 camere și pentru care cu o dobândă de 0,35 % pe lună și cu o perioadă $t = 120$ luni s-a obținut o rată $R_t = 764,62$ lei/lună.

Dacă debitorul acestui împrumut dorește ca după ce au trecut 20 de luni să mai achite odată încă 10 mii de lei cerând să i se recalculeze rata

la valoarea rămasă de plată și la timpul rămas. Pentru rezolvarea acestei probleme facem apel la relații de actualizare.

Scriem relația (2.25) sub forma:

$$C_{0a} = R_t \cdot \frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}}$$

Ea rezolvă actualizarea unor depuneri constante ce încep cu $t = x$ până la $t = n$. Dacă dorim să determinăm valoarea actualizată la timpul $t = x$ putem socoti că x este similar cu t_0 și relația (2.25) rezultă fără factorul $\frac{1}{(1+i)^x}$ deci actualizăm înmulțind relația (2.25) cu $(1+i)^x$, obținându-se o relație în t_x unde:

$$t_x = t - x$$

$$C_{0x} = R_t \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}}$$

Cu această relație determinăm în timpul x valoarea împrumutului rămas, în cazul nostru valoarea rămasă după achitarea a 20 de rate.

Datele problemei :

$R_t = 764,62$ lei pe lună reprezentând rata de plată lunară

$i = 0,35\%$ pe lună

$t = 120$ luni, durata totală ce a stat la baza calculării ratei la împrumutul inițial la $t = 0$ (76.000 lei)

$x = 20$ luni, perioada după care dorim să se determine valoarea rămasă a împrumutului necesar pentru calcularea noii valori a ratei.

$t_x = t - x = 100$ de luni

$$C_{0x} = R_t \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}} = 764,62 \cdot \frac{(1,0035)^{100} - 1}{0,0035 \cdot (1,0035)^{100}}$$

$$(1,0035)^{100} = 1,416$$

$$C_{0x} = 764,62 \cdot \frac{0,416}{0,004956} = 764,62 \times 83,93866$$

$$C_{0x} = \underline{64.181,17 \text{ lei}}$$

Dacă debitorul ar dori ca după 20 de luni după ce a achitat lună de lună ratele să achite integral datoria, ar trebui să plătească 64181,17 lei.

Plătind numai 10000 lei, rămâne ca la timpul x să mai plătească 54181,17 lei în $t - x$ rate respectiv în $120 - 20 = 100$ rate, deci:

$$C'_{0x} = C_{0x} - 10.000 = 64.181,17 - 10.000 = 54.181,17$$

Pentru recalcularea ratelor se folosește relația obținută în t_x unde $t_x = t - x$:

$$R_{t_x} = C'_{o_x} \cdot \frac{i(1+i)^{t-x}}{(1+i)^{t-x} - 1} = 54181,17 \cdot \frac{(1,0035)^{100} \cdot 0,0035}{(1,0035)^{100} - 1}$$

$$R_{t_x} = 54181,17 \times 0,0119134$$

$$R_{t_x} = \underline{645,48 \text{ lei}}$$

Deci noua rată de plată va fi 645,48 lei.

2.6 INVESTITIE ACTUALIZATA

Când se lucrează cu marfa specială numită "BANI", nu trebuie uitat că această marfă în orice societate este o funcție de timp, legată de acesta prin acel parametru numit rata dobânzii, rată de rentabilitate sau rată de profit.

Care este calea cea mai avantajoasă care să-l conducă pe întreprinzător la succes într-o afacere în care dorește să valorifice leul investit în condițiile cele mai rentabile? Este pe lângă știință și capacitate de previziune și ceva de bun simț.

În faza actuală de trecere la o piață liberă, mulți întreprinzători au în vedere la pornirea unei afaceri numai un profit imediat, nu și o activitate stabilă și de durată, cu o rentabilitate decentă, asigurând o rată de acumulare mai mică, dar sigură și continuă, comportament care, cu siguranță, i-a creat pe marii magnati.

Trecem la problemele de actualizare a investiției $I_{(x)}$, precizând că aceasta este o mărime variabilă, fiind o funcție de investiția inițială I , rata profitului sau dobânda i și de timpul t , respectiv $I_x = f(I, t, i)$.

De asemenea, o investiție are o perioadă rentabilă de funcționare P_f , o durată de execuție d și o durată totală de existență D , deci $P_f = D - d$.

Se cuvine să mai precizăm că, la investițiile a căror durată de execuție d este mare, se impune o mai atentă fundamentare a eficienței economice și un mai profund studiu de marketing. Sunt și situații când $d = 0$, aceasta atunci când investiția nu necesită lucrări de instalare, ea putând să producă imediat după procurare.

Orice investitor trebuie să știe că la pornirea unei investiții, trebuie să analizeze eficiența acesteia, plecând de la următorul principiu și anume ca rata profitului i_p să fie mai mare decât rata dobânzii bancare i_b , respectiv $i_p > i_b$.

Pentru $i_p \leq i_b$ nu sunt interese de a investi capitalul, fiind pe drept mai comod depunerea capitalului în bancă, obținându-se un profit mai mare sau egal cu cel ce s-ar obține prin investirea capitalului în condițiile $i_p \leq i_b$.

În realizarea unei investiții, se urmărește ca durata de execuție d să fie cât se poate de mică și perioada de funcționare P_f cât se poate de mare.

Se are în vedere că durata P_f nu poate fi oricât de mare, deoarece investiția se devalorizează în timp prin uzură fizică și uzură morală.

Exemplul nr. 2.7

Care este valoarea actualizată a unui model de modernizare tehnologică care necesită următoarele cheltuieli distribuite pe 2 ani de executie, utilizându-se și capital în dolari.

- anul I 4 mil. dolari și 26 mil. lei
- anul II 13 mil. dolari și 34 mil. lei
- TOTAL 17 mil. dolari și 60 mil. lei

Investitia se face în condițiile unei rate de rentabilitate de 12 % pentru capitalul în lei și de 10 % pentru capitalul în dolari. Cursul valutar al leului este considerat aici de 198 lei la un dolar.

- Se cere:
- valoarea actualizată a capitalului în lei;
 - valoarea actualizată a capitalului în dolari;
 - total valoare actualizată a întregului capital în lei.

Actualizarea se va face la timpul $t = 2$.

Se utilizează factorul de dobândă compusă $C_t = C_0 \cdot D_t$ unde:

C_t - capitalul după t ani

C_0 - capitalul de pornire

D_t - factorul de actualizare care este $(1 + i)^t$

$C_t = C_0 \cdot (1 + i)^t$ unde:

$i = 12\%$ pentru lei și 10% pentru dolari,
 $t = 1$ an și 2 ani.

Pentru o mai bună urmărire a problemei, vom folosi înregistrarea tabelară a datelor problemei și a rezultatelor:

Valori inițiale la $t = 0$ în mil. lei (dolari)

Moneda	Chelt. anul 1	Chelt. anul 2	Total cheltuieli
Lei	26	34	60
Dolari	4	13	17

Valori actualizate la $t = n$ unde $n = 2$ în mil. lei (dolari)

Moneda	Anul 1	Anul 2	Total actualizat	Total în lei actualizat
Lei	32,6	38,0	70,6	70,6
Dolari	4,8	14,3	19,1	3876,5
TOTAL	-	-	-	3947,1

Anul 1

- Actualizare capital în lei

$$D_t = (1 + i)^t = (1 + i)^2 = (1 + 0,12)^2 = 1,2544$$

$$C_{2a} = C_0 \cdot D_t \text{ unde } C_0 = 26 \text{ mil.}$$

$t = 2$ deoarece capitalul investit în primul an, are 2 ani de imobilizare deci,

$$C_{2a} = 26 \cdot (1,12)^2 = 26 \times 1,2544 = 32,6 \text{ mil.}$$

- Actualizare în dolari

$$C_{2a} = C_0 \cdot D_t = 4 \cdot (1 + 0,10)^2 = 4 \times 1,21 = 4,8 \text{ mil.}$$

unde pentru dolari s-a convenit $i = 10\%$.

Anul 2

- Actualizare în lei

$$C_{1a} = C_0 \cdot D_t = C_0 \cdot (1 + i)^t = 34 \times (1,12)^1 = 38,0 \text{ mil.}$$

- Actualizare în dolari

$$C_{1a} = C_0 \cdot D_t = C_0 \cdot (1 + i)^t = 13 \times (1,10)^1 = 14,3 \text{ mil.}$$

Pentru a obține valoarea actualizată numai în lei, se face convertirea dolarului.

Pentru anul 1

$$C_{2a} = C_0 \cdot D_t = (4 \times 198) \cdot (1 + 0,12)^2 = 993,5$$

Pentru anul 2

$$C_{1a} = C_0 \cdot D_t = (13 \times 198) \cdot (1 + 0,12)^1 = 2883,0$$

Total: $2883,0 + 993,5 = 3876,5$ mil. lei, convertiti din dolari și 70,6 mil. Lei actualizati.

TOTAL investitie actualizată în lei :

$$3876,5 + 70,6 = 3957,1 \text{ mil. lei .}$$

Deci 3957,1 mil. lei va costa noua modernizare care va trebui rambursata.

2.7 INDICATORI DE EFICIENTA A UTILIZARII RESURSELOR

La baza oricărei investiții stă o documentație cu 3 capitole esențiale,

- 1 - soluție tehnică (proiect tehnic)
- 2 - costuri (deviz)
- 3 - eficiență (justificare economică)

În cele ce urmează, se va aborda dintr-un anumit punct de vedere, problema eficienței. Eficiența constituie din punct de vedere al documentației, justificarea teoretică, în baza datelor și a investigațiilor obținute, a potenței unei investiții de a produce beneficii. În acest scop, se analizează pentru fiecare proiect (aici trei) indicatorii în măsură să dovedească dacă o investiție este rentabilă sau nu.

Acești indicatori sunt:

1. Raportul V/C respectiv venituri supra costuri;

2. Beneficiul net actualizat BNA;
3. Rata internă de rentabilitate RIR.

Pentru investiții de importanță națională, acești indicatori se bazează pe rata minimă de rentabilitate simbolizată RMR și care se folosește și ca rată de actualizare a fluxurilor monetare. RMR se stabilește pe economie și diferă de la ramură la ramură. Determinarea acestei mărimi nu este simplă, implicând o serie de influențe cu o anumită dificultate în determinarea ei. Banca Internațională de Reconstrucție și Dezvoltare (BIRD) detine date pentru fiecare țară cu care are relații de împrumut asupra ratei de actualizare.

Pentru țările în curs de dezvoltare, rata minimă de rentabilitate RMR, utilizată drept rată de actualizare, a fost pînă în anul 1990 de 8-15 %, iar pentru țara noastră de 12 %.

2.7.1 Raportul venituri supra costuri V/C

După realizarea unui proiect pentru o investiție nouă sau pentru o modernizare, se trece obligatoriu la o analiză a eficienței acesteia, începând cu determinarea raportului V/C care reprezintă raportul dintre veniturile ce urmează a se obține împărțite la costurile totale ce urmează a fi făcute.

Prin venituri se înțelege totalitatea încasărilor, iar prin costuri se înțelege totalitatea cheltuielilor efectuate cu realizarea și comercializarea produsului, inclusiv cu realizarea de investiții.

Pentru a exista beneficiu, trebuie ca $V > C$ sau $\frac{V}{C} > 1$.

Se va vedea că, pentru a determina corect raportul V/C, a cărei valoare pozitivă ne arată că investiția este eficientă, va trebui să facem actualizarea acestora, respectiv, folosind relațiile de actualizare determinate anterior, cu care vom stabili valorile lui V și ale lui C aduse din viitor în prezent, sau duse din prezent în viitor.

Exemplul nr. 2.8

La o linie tehnologică existentă, se propune un proiect de modernizare a tehnologiei de fabricație. Proiectul urmărește reducerea costurilor de exploatare de la 1.270.000 lei la 1.126.000 lei pe an, adică cu 144.000 lei pe an, investind o valoare de 1.000.000 lei, cu o durată de execuție a modernizării de un an și o durată de exploatare de 10 ani a noii modernizări.

Se contează pe o rată minimă de rentabilitate de 12 % și se cere să se determine raportul V_a/C_a .

Datele problemei :

Perioada de funcționare $P_f = 10$ ani
 Durata de execuție $d = 1$ an
 Durata totală $D = P_f + d$, adică $D = 11$ ani
 Costurile investiției $C = 1.000.000$
 Veniturile anuale $V = 144.000$

Se cere să se determine raportul dintre venitul actualizat și costul actualizat. Avem 2 variante de comparat, varianta nouă față de cea veche.

Varianta veche

ani	1	2	3 11
lei	1270000	1270000	1270000 1270000

Varianta nouă

ani	1	2	3 11
lei	2270000	1126000	1126000 1126000

Diferenta

ani	1	2	3 11
lei	1000000	144000	144000 144000

1. Determinarea raportului V/C fără influența ratei minime de rentabilitate (ratei de actualizare) i

costuri $C = 1.000.000$

venituri $V = 144.000 \times 10 \text{ ani} = 1.440.000 \text{ lei}$

$$\frac{V}{C} = \frac{1.440.000}{1.000.000} = 1,44 \quad \text{deci} \quad \frac{V}{C} > 1$$

După acest rezultat, înclinăm să credem că investiția este rentabilă. Dacă dăm această decizie, gresim, deoarece nu ținem cont de mediul financiar.

2. Determinarea raportului V/C la timpul t_0 , respectiv toate valorile se aduc din viitor la timpul de azi.

Calculul costului actualizat C_a

Pentru a calcula costul actualizat, trebuie să aducem valoarea de 1.000.000 de la $t = 1$ la $t = 0$, deci aducem un capital din viitor în prezent. Pentru aceasta, se folosește factorul de actualizare:

$$V_t = \frac{1}{(1+i)^t}$$

Deci:

$$C_a = C_0 \cdot V_t$$

unde:

$$C_0 = 1.000.000$$

C_a = cost actualizat

$$i = 12 \%$$

$t = 1 \text{ an}$, caci un an durează investiția.

La determinarea factorilor de actualizare, am stabilit că plățile și încasările se fac la sfârșitul anului.

$$C_a = 1.000.000 \cdot \frac{1}{(1+0,12)^1} = 1.000.000 \cdot \frac{1}{(1,12)^1} = 893.000$$

$$C_a = \underline{893.000 \text{ lei}}$$

Calculul venitului actualizat V_a

Din diferența celor două variante, se observă că din anul 2 se obțin venituri anuale de 144.000 lei. Pentru a aduce din viitor în prezent unele depuneri anuale constante (plăți sau încasări) se utilizează factorul valorii anuale a unei anuități:

$$I_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t}$$

din care vom scade efectul primului an când nu am avut nici o depunere, respectiv nici un venit, ci numai costuri.

În acest caz, factorul devine:

$$I_t = \frac{(1+i)^{t_1} - 1}{i(1+i)^{t_1}} - \frac{(1+i)^{t_2} - 1}{i(1+i)^{t_2}}$$

Știind că $V_a = V_0 \cdot I_t$

unde :

V_a = venit actualizat

V_0 = venit anual = 144.000 lei

t_1 = 11 ani

t_2 = 1 an

i = 12 %

$$V_a = 144.000 \cdot \left[\frac{(1+0,12)^{11} - 1}{0,12 \cdot (1+0,12)^{11}} - \frac{(1+0,12)^1 - 1}{0,12 \cdot (1+0,12)^1} \right] =$$

$$= 144.000 \cdot \left[\frac{(1,12)^{11} - 1}{0,12 \cdot (1,12)^{11}} - \frac{(1,12) - 1}{0,12 \cdot (1,12)} \right] =$$

$$= 144.000 (5,938 - 0,893) = 144.000 \times 5,045 = 726.000$$

$$V_a = \underline{726.000 \text{ lei}} .$$

Raportul $\frac{V_a}{C_a} = \frac{726.000}{893.000} = 0,81$ deci $\frac{V_a}{C_a} < 1$.

În concluzie investiția nu este rentabilă .

3. Calculul raportului $\frac{V_a}{C_a}$ la timpul $t = 11$ respectiv după 11 ani.

Calculul costului actualizat C_a

Pentru aceasta va trebui să analizăm efectul ratei rentabilității propuse după 11 ani, deci vom duce valoarea acestei investiții în acel timp. Pentru acest calcul, folosim factorul de actualizare:

$$D_t = (1+i)^{-t}$$

Deci:

$$C_a = C_0 \cdot D_t$$

unde:

C_a = cost actualizat

C_0 = investitia initială egală cu 1.000.000

i = 12 %

t = 11 ani

$$\begin{aligned} C_a &= 1.000.000 \cdot (1+0,12)^{11} - 1.000.000 \cdot (1,12) = \\ &= 1.000.000 \times 3,5 = 3.500.000 \\ C_a &= \underline{3.500.000 \text{ lei}} . \end{aligned}$$

Calculul venitului actualizat V_a

Venitul actualizat V_a peste 11 ani este tratat ca o depunere anuală de 144.000 lei, dar fără efectul primului an, deoarece în primul an nu am avut venituri. La acest calcul se pretează factorul de compunere pentru un an:

$$B_t = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]}{i}$$

Având în vedere scăderea efectului primului an avem:

$$B_t = \frac{(1+i) \cdot \left((1+i)^{t_1} - 1 \right)}{i} - \frac{(1+i) \cdot \left((1+i)^{t_2} - 1 \right)}{i}$$

$$V_a = V_0 \cdot B_t$$

unde:

V_a = venitul actualizat dus în anul 11

V_0 = venitul anual care se acumulează cu rata de 144.000 pe an

i = 12 %

t_1 = 11 ani

t_2 = 1 an

$$\begin{aligned} V_a &= 144.000 \cdot \left(\frac{(1+i) \cdot [(1+i)^{11} - 1]}{i} - \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^1 - 1]}{i} \right) = \\ &= 144.000 \cdot \left(\frac{(1,12) \cdot [(1,12)^{11} - 1]}{i} - 1,12 \right) = 144.000 \times 19,8 \end{aligned}$$

$$V_a = \underline{2.851.200 \text{ lei}}$$

$$\text{Raportul } \frac{V_a}{C_a} = \frac{2851000}{3500000} = 0,81 \quad \text{deci} \quad \frac{V_{an}}{C_{an}} < 1 .$$

Se observă că, tinând cont de rata de actualizare și în acest caz obținem același raport și aceeași concluzie: investitia nu este rentabilă.

2.7.2 Beneficiul net actualizat BNA

Dacă analizăm mai atent relațiile care există între venituri și cheltuieli, tragem următoarele concluzii :

$V_a < C_a$ activitate nerentabilă cu pierderi

$V_a = C_a$ activitate cu rentabilitate 0 deci fără posibilitatea de acumulare

$V_a > C_a$ activitate rentabilă

Prin definiție $BNA = V_a - C_a$ unde:

V_a = venituri actualizate

C_a = costuri actualizate

În efectuarea calculelor se vor folosi semnele:

(+) pentru venituri

(-) pentru costuri

Exemplul nr. 2.9

Folosim datele de la exemplul 2.8, reamintind că, urmărind să modernizăm un flux tehnologic, facem o investiție $I = 1.000.000$ pe care o realizăm în timp de 1 an. Înainte de a face modernizarea, înregistrăm costuri $C = 1.270.000$ lei dar după un timp de 10 ani consecutivi obținem un venit anual

$V_0 = 144.000$ lei. Utilizând o rată de rentabilitate $i = 12\%$ se cere să se calculeze beneficiul net actualizat BNA.

$$BNA = V_a - C_a$$

V_a pentru timpul $t = t_0$ a fost calculat și determinat la valoarea $V_a = +726.000$.

De asemenea a fost determinat și costul $C_a = - 893.000$ la timpul inițial. $BNA = V_a - C_a$ dacă folosim valori absolute (numai pozitive) sau $BNA = V_a + C_a$ dacă luăm valorile cu semnele stabilite deci:

$$BNA = + 726.000 - 893.000 = -166.000 \text{ lei}$$

Pentru $BNA < 0$ investiția nu este rentabilă. Același rezultat îl obținem dacă facem diferența costurilor celor două variante actualizate, respectiv:

$$BNA = C_{a2} - C_{a1}$$

Varianta 1

Nu facem cheltuieli de modernizare, deci pe parcursul celor 11 ani costurile sunt de 1.270.000 lei anual. Aceste costuri anuale se aduc din timpul $t = 11$ în timpul $t = 0$ cu ajutorul factorului valorii actuale a unei anuități:

$$I_t = \frac{(1 + i)^t - 1}{i(1 + i)^t}$$

Deci $C_{a1} = C_0 \cdot I_t$ unde:

C_{a1} reprezintă costurile actualizate în varianta că nu se face modernizarea

C_0 este costul anual de 1.270.000 timp de 11 ani

$t = 11$ ani

$i = 12\%$

Se observă că, în acest caz, costurile încep să decurgă din primul an:

$$C_{a1} = 1.270.000 \times \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} = 1.270.000 \cdot \frac{(1,12)^{11} - 1}{0,12 \cdot (1,12)^{11}} =$$
$$= 1.270.000 \times 5,938 = - 7.541.260$$

$$C_{a1} = \underline{- 7.541.260 \text{ lei}}$$

Varianta 2

Cheltuim 1.000.000 pentru modernizare în primul an, iar din anul 2 până în anul 11 costurile sunt de 1.126.000 folosind același factor, dar de două ori, odată pentru $t = 1$ la $C_0 = 2.270.000$ și odată pentru $t = 11$ la $C_0 = 1.126.000$ dar la care se scade efectul primului an.

Pentru simplificarea relației se arată că $\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t}$

pentru $t = 1$ devine $\frac{1}{(1+i)}$ deci, putem scrie :

$$C_{a2} = 2.270.000 \cdot \frac{1}{(1+i)} + 1.126.000 \cdot \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} - \frac{1}{(1+i)} \right]$$

iar pentru $t = 11$ avem:

$$C_{a2} = 2.270.000 \times 0,893 + 1.126.000 \times 5,045$$

$$C_{a2} = \underline{- 7.707.780}$$

$$BNA = C_{a2} - C_{a1} = -7.707.780 + 7.541.260$$

$$BNA = \underline{- 166.520 \text{ lei}}$$

2.8 RATA INTERNA DE RENTABILITATE RIR

Rata internă de rentabilitate reprezintă acea rată de actualizare pentru care totalul costurilor actualizate sunt egale cu totalul veniturilor actualizate, respectiv $BNA = 0$.

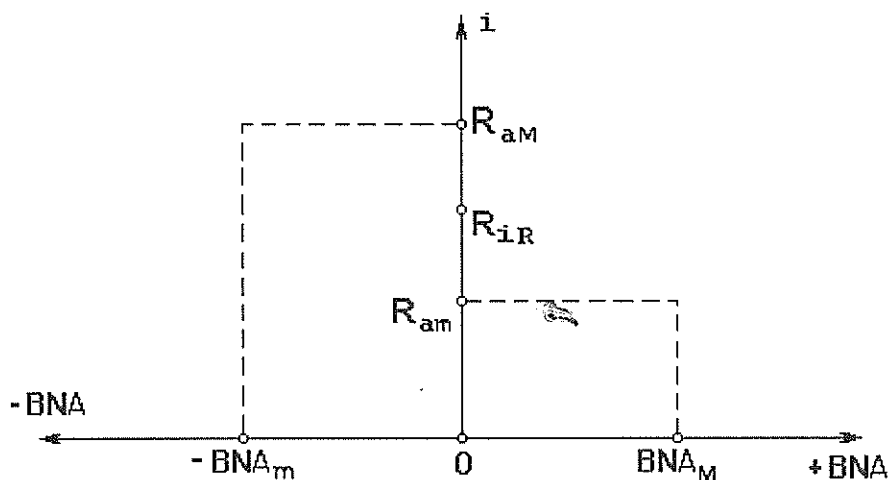
Impunând o rată mai mare decât această rată de actualizare unei investiții, ea devine nerentabilă.

Este important să se determine această rată pentru a găsi care este frontiera dintre posibilitatea de a obține profit chiar și în dauna reducerii ratei beneficiului propus inițial și situația de declin financiar.

Pentru a determina această rată, se caută două determinări ale ratei de rentabilitate, dar care, una să dea BNA pozitiv, cât mai aproape de 0 și alta determinată de un BNA negativ, tot cât se poate aproape de 0.

Relația ce se determină este un fel de interpolare, dar se determină pe principii geometrice admitând că modificări ale ratei de actualizare conduc la modificări proportionale ale celorlalte mărimi C_0 , V_0 și implicit BNA, demonstrație identică cu cea de la determinarea ratei dobânzii pe o anumită diviziune de timp.

Considerăm axa absciselor axa cu două sensuri + și -, ca axă de poziționare a beneficiilor nete actualizate, iar axa ordonatelor numai în sens pozitiv, axă de înregistrare a ratelor de rentabilitate.



Deosebirea dintre această schemă și cea de la determinarea ratei dobânzii, constă doar în faptul că la rata maximă de actualizare R_{aM} , corespunde beneficiul net actualizat minim BNA_m și la rata minimă beneficiul este maxim. Și aici ținem cont de faptul că $|-BNA_m| = BNA_m$.

Făcându-se similar egalitățile între rapoartele determinate ca în exemplul anterior, respectiv

$$\frac{R_{iR} - R_{am}}{BNA_M} = \frac{R_{aM} - R_{iR}}{|-BNA_m|} = \frac{R_{aM} - R_{am}}{BNA_M - BNA_m}$$

se obțin două relații de calcul care conduc la același rezultat:

$$R_{iR} = R_{am} + (R_{aM} - R_{am}) \cdot \frac{BNA_M}{BNA_M - BNA_m} \quad (2.30)$$

$$R_{iR} = R_{aM} - (R_{aM} - R_{am}) \cdot \frac{|-BNA_m|}{BNA_M - BNA_m} \quad (2.31)$$

unde:

- R_{iR} - rata internă de rentabilitate
- R_{am} - rata de actualizare mai mică
- R_{aM} - rata de actualizare mai mare
- BNA_m - beneficiul net actualizat minim
- BNA_M - beneficiul net actualizat maxim

Exemplul nr. 2.9

Repetăm problema anterioară. Modernizând un flux tehnologic cu o investiție de 1.000.000 realizabilă într-un an, obținem pentru următorii 10 ani, un venit suplimentar anual de 144.000 lei.

Se cere să se calculeze rata internă de rentabilitate R_{iR} , cunoscându-se rata minimă de rentabilitate $i = 12\%$. Se vor utiliza una din relațiile demonstrate. Alegem relația (2.31):

$$R_{iR} = R_{am} + (R_{aM} - R_{am}) \cdot \frac{BNA_M}{BNA_M - BNA_m}$$

Am văzut că pentru $i = 12\%$ am obținut $BNA_{(12)} = -166.520$

Pentru a avea ca valoare absolută BNA mai mică cu valoarea pozitivă, va trebui să alegem un i mai mic. Alegem $i = 10\%$ și refacem calculele de la problemele precedente pentru determinare BNA = la $V_a - C_a$ timpul t_0 :

$$V_{a_0} = V_0 \cdot I_t = 144.000 \cdot \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} - \frac{1}{(1+i)} \right]$$

$$t = 11 \quad \text{și} \quad i = 10$$

$$V_{a_0} = 144.000 \cdot \left[\frac{(1,10)^{11} - 1}{0,10(1,10)^{11}} - \frac{1}{(1,10)} \right] = 804.300$$

$$V_{a_0} = 804.300 \text{ lei}$$

$$C_{a_0} = C_0 \cdot V_t = 1.000.000 \frac{1}{(1+i)^t}; \quad t = 1$$

$$\text{Avem: } C_{a_0} = 1.000.000 \times 0,909 = 909.000$$

$$C_{a_0} = \underline{909.000 \text{ lei}}$$

$$BNA_{(10)} = V_{a_0} - C_{a_0} = 804.300 - 909.000$$

$$BNA_{(10)} = \underline{-104.700 \text{ lei}}$$

Alegem acum $i = 6\%$ și refacem calculele:

$$V_{a_0} = V_0 \cdot \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} - \frac{1}{(1+i)} \right]$$

$$V_{a_0} = 144.000 \times \left[\frac{(1,06)^{11} - 1}{0,06 \cdot (1,06)^{11}} - \frac{1}{1,06} \right] =$$

$$= 144.000 \times 6,944 = 999.900 \text{ lei}$$

$$V_{a_0} = \underline{999.900 \text{ lei}}$$

$$C_a = C_0 \cdot V_t = 1.000.000 \frac{1}{1+0,06} = 943.400$$

$$C_{a_0} = \underline{943.400 \text{ lei}}$$

$$BNA_{(6)} = 999.900 - 943.400 = +56.500 \text{ lei}$$

$$BNA_{(6)} = \underline{+56.500 \text{ lei}}$$

Utilizând una din relațiile determinate, avem:

$$RIR = R_{a_m} + (R_{a_M} - R_{a_m}) \cdot \frac{BNA}{BNA_M - BNA_m}$$

unde:

$$R_{a_m} = 6$$

$$BNA_M = 56500$$

$$R_{aM} = 10$$

$$BNA_m = -104.700$$

Inlocuind avem:

$$RIR = 6 + (10 - 6) \cdot \left(\frac{56.500}{+56.500 + 104700} \right)$$

$$RIR = 6 + (4) \times \left(\frac{56.500}{161.200} \right) = 6 + (4 \times 0,35)$$

$$RIR = 6 + 1,40 = 7,4$$

$$RIR = \underline{7,4}$$

Folosim relatia a doua:

$$RIR = R_{aM} - (R_{aM} - R_{am}) \cdot \frac{BNA_m}{BNA_M - BNA_m}$$

$$RIR = 10 - (10 - 6) \cdot \frac{-104.700}{-104.700 - 56.500}$$

$$RIR = 10 - (4) \cdot \frac{104.700}{161.200} = 10 - (4 \times 0,649) = 7,4$$

$$\underline{RIR = 7,4}$$

Exemplul nr. 2.10

Pentru a aprofunda metoda de actualizare si de verificare a unei investitii determinând rând pe rând cei trei indicatori ce indică eficienta sau neeficienta utilizării capitalului, să considerăm un exemplu mai extrem, dar care să elimine unele dubii de calcul care probabil s-au născut la problema anterioară.

O investitie de 9.000.000 durează 3 ani, cu o rată de realizări de 3.000.000 pe an. Linia tehnologică la care se aduc modernizări prin investitia de 9.000.000 lei, înregistrează costuri de productie de 80.000.000 lei pe an, dar după 3 ani de când a fost pusă în functiune, îmbunătătirile aduse înregistrează timp de 8 ani costuri de 60.000.000 lei pe an . Se cer în conditiile în care $i = 12\%$:

1. Raportul de venituri asupra costului actualizat la $t = 0$ ani, $\frac{Va_0}{Ca_0}$;
2. Raportul venituri supra costuri actualizat la $t = 11$ ani, $\frac{Va_{11}}{Ca_{11}}$;
3. Calcularea beneficiului net actualizat la $t = 0$;
4. Calcularea beneficiului net actualizat prin diferenta dintre costurile actualizate in cele două variante la $t = 0$;
5. Calcularea ratei interne de rentabilitate RIR.

Varianta clasica

ani	1	2	3	4	11
lei	80.000.000	80.000.000	80.000.000	80.000.000	80.000.000

Varianta modernizată

ani	1	2	3	4	11
lei	83.000.000	83.000.000	83.000.000	60.000.000	60.000.000

Diferente

ani	1	2	3	4	11
lei	-3.000.000	-3.000.000	-3.000.000	+20.000.000	+20.000.000

1. Calcul raportului V/A cu actualizare:

Aducând capitalul din trecut în prezent, actualizat la $t = 0$ avem:

$$V_{a_0} = V_r \cdot I_t$$

unde:

V_{a_0} = venitul actualizat la $t = 0$

V_r = venitul constant anual de 20 mil. lei

I_t = factorul valorii anuale a unei anuități:

$$I_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t}$$

Se observă că rata de venit anuală V_r începe să decurgă din al patrulea an, deci în primii 3 ani nu avem venit anual.

Pentru a aduce corect efectul acestor venituri din anul 11 în anul 0, va trebui ca din relația factorului valorii actuale a unei anuități, să scădem efectul primilor 3 ani. În acest caz obținem:

$$I_t = \frac{(1+i)^{t_1} - 1}{i(1+i)^{t_1}} - \frac{(1+i)^{t_2} - 1}{i(1+i)^{t_2}}$$

unde:

$t_1 = 11$ ani

$t_2 = 3$ ani

$I = 12\%$

$$V_{a_0} = V_r \cdot I_t = 20.000.000 \times \left[\frac{(1,12)^{11} - 1}{0,12 \cdot (1,12)^{11}} - \frac{(1,12)^3 - 1}{0,12 \cdot (1,12)^3} \right]$$

$$V_{a_0} = 20.000.000 \left[\frac{(3,48 - 1)}{0,12 \cdot 3,48} - \frac{1,40 - 1}{0,12 \cdot 1,40} \right] = 20.000.000 \left[\frac{2,48}{0,42} - \frac{0,40}{0,168} \right]$$

$$V_{a_0} = 20.000.000 \cdot (5,90 - 2,38) = 20.000.000 \times 3,52$$

$$\underline{V_{a_0} = +70.400.000 \text{ lei}}$$

Pentru determinarea costurilor la $t = 0$, respectiv C_{a_0} , se observă că aceste costuri sunt distribuite în mod egal pe o perioadă de 3 ani cu 3.000.000 pe an. Pentru a aduce valoarea costurilor la timpul $t = 0$ folosim același factor I_t deci:

$$C_{a_0} = C_r \cdot I_t$$

unde :

C_{a_0} = costuri actualizate la timpul $t = 0$

C_r = rata anuală a costurilor care aici începe cu anul 1 și se termină cu anul 3 în rate anuale egale de 3.000.000 .

$$I_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} \quad \text{unde } t = 3 \text{ și } i = 12\%$$

$$C_{a_0} = C_r \cdot I_t = 3000000 \cdot \frac{(1,12)^3 - 1}{0,12 \cdot (1,12)^3} = 3000000 \times 2,38$$

$$C_{a_0} = \underline{7.140.000 \text{ lei}} .$$

Raportul se ia în valori absolute, deci :

$$\frac{V_{a_0}}{C_{a_0}} = \frac{70.400.000}{7.140.000} = 9,86$$

$$\frac{V_{a_0}}{C_{a_0}} = 9,86 > 0 \Rightarrow \text{rentabilitate}$$

2. Calculul raportului V/C la $t = 11$:

În această situație va trebui să ducem valorile beneficiilor acumulate în rate egale începând cu al patrulea an în anul $t = 11$.

În vederea efectuării acestui calcul, vom folosi factorul B_t , factor de compunere pentru un an:

$$V_{a_{11}} = V_r \cdot B_t$$

unde:

$$B_t = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]}{i}$$

Tinându-se cont că acest venit $V_r = 20.000.000$ lei anual decurge numai începând cu anul al patrulea, va trebui să scădem efectul primilor 3 ani din relația de mai sus, caz în care factorul B_t devine:

$$B_t = \left[\frac{(1+i) \cdot [(1+i)^{t_1} - 1]}{i} - \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^{t_2} - 1]}{i} \right]$$

unde:

$$t_1 = 11$$

$$t_2 = 3$$

$$V_{a_{11}} = 20000000 \times \left[\frac{(1,12) \cdot [(1,12)^{11} - 1]}{0,12} - \frac{(1,12) \cdot [(1,12)^3 - 1]}{0,12} \right]$$

$$V_{a_{11}} = 20000000 \times \left(\frac{1,12 \cdot 2,48}{0,12} - \frac{1,12 \cdot 0,40}{0,12} \right) = 20000000 \times 19,42$$

$$V_{a_{11}} = + 388.400.000 \text{ lei}$$

Pentru calculul costurilor la $t = 11$, utilizăm aceeași relație, numai că vom ține cont că va trebui să utilizăm doi factori:

- factorul de compunere pentru un an B_t pentru a duce valoarea acumulată în anul 3, și de aici se preia valoarea obținută și se duce încă peste 8 ani cu factorul de dobândă compusă D_t deci:

$$C_{a_{11}} = (C_r \cdot B_{t_2}) \cdot (D_t)$$

unde:

$$B_{t_2} = \frac{(1+i) \cdot [(1+i)^{t_2} - 1]}{i}$$

și:

$$D_{t_3} = (1+i)^{t_3}$$

iar $t_2 = 3$ și $t_3 = 8$.

$$C_{a_{11}} = 3000000 \times \left[\frac{(1+i) \cdot [(1+i)^{t_2} - 1]}{i} \cdot (1+i)^{t_3} \right]$$

$$C_{a_{11}} = 3000000 \times \left[\frac{(1,12) \cdot [(1,12)^3 - 1]}{0,12} \cdot (1,12)^8 \right] =$$

$$= 3000000 \times (3,7793 \times 2,4759) = 3000000 \times 9,3574$$

$$C_{a_{11}} = 28.722.000 \text{ lei}$$

$$\text{Raportul } \frac{V_{a_{11}}}{C_{a_{11}}} = \frac{388400000}{28722000} = 13,522$$

Deci $\frac{V_{a11}}{C_{a11}} = 13,522 > 0$ dovedeste rentabilitatea.

3. Calculul beneficiului net actualizat BNA_0 la $t = 0$ BNA_0

Stim că $BNA = V_a - C_a$

Pentru $t = 0$ avem:

$BNA_0 = V_{a0} - C_{a0}$ în valoare absolută , sau:

$BNA_0 = V_{a0} + C_{a0}$ dacă se tine cont de semne.

$$BNA_0 = +70400000 - 7140000$$

$$BNA_0 = + 63.260.000$$

4. Calculul beneficiului net actualizat în baza costurilor actualizate în cele două variante, cu realizarea investitiei si fără realizarea investitiei la $t = 0$. C_{a1} pentru costuri de 80.000.000 pe an timp de 11 ani la timpul $t = 0$ este:

$$C_{a1} = C_r \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} = C_r \cdot \frac{(1,12)^{11} - 1}{0,12 \cdot (1,12)^{11}}$$

$$C_{a1} = 80000000 \times 5,90 = 472000000 \text{ lei}$$

$$C_{a1} = 472.000.000$$

V_{a1} nu există, rezultă că:

$$BNA_1 = -C_{a1} = -472.000.000$$

În varianta în care s-a efectuat modernizarea, calculul se va face ținând cont că, în primii 3 ani avem o rată anuală de costuri C_{r1} și în următorii 11 ani C_{r2} , deci relațiile de calcul vor fi:

$$C_{a2} = C_{r1} \cdot \frac{(1+i)^{t_2} - 1}{i(1+i)^{t_2}} + C_{r2} \cdot \left[\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} - \frac{(1+i)^{t_2} - 1}{i(1+i)^{t_2}} \right]$$

unde:

$$C_{r1} = 83.000.000$$

$$C_{r2} = 60.000.000$$

$$t_2 = 3$$

$$t = 11$$

$$C_{a_2} = C_{r_1} \cdot \frac{(1,12)^3 - 1}{0,12(1,12)^3} + C_{r_2} \cdot \left[\frac{(1,12)^{11} - 1}{0,12(1,12)^{11}} - \frac{(1,12)^3 - 1}{0,12(1,12)^3} \right]$$

$$C_{a_2} = C_{r_1} \times 2,38 + C_{r_2} \times 3,52$$

$$C_{a_2} = 83.000.000 \times 2,38 + 60.000.000 \times 3,52$$

$$C_{a_2} = -408.740.000$$

Nici aici nu avem veniturile evidentiata. Deci:

$$BNA_2 = -408.740.000 \text{ lei}$$

BNA va fi diferenta dintre costurile variantei 1 si a costurilor variantei 2 sau a celor două beneficii nete actualizate.

$$BNA = BNA_2 - BNA_1$$

$$BNA = -408.740.000 + 472.000.000$$

$$BNA = +63.260.000$$

deci, pentru BNA la $t = 0$ s-a obtinut, prin două metode de calcul, aceeasi valoare.

5. Calculul ratei interne de rentabilitate RIR.

Pentru a calcula rata internă de rentabilitate, va trebui să utilizăm două valori a ratei de actualizare, astfel încât să obținem BNA pozitiv aproape de valoarea 0 și BNA negativ tot aproape de 0, pentru a determina valoarea lui i pentru care $BNA = 0$ și care se numește Rată internă de rentabilitate RIR.

Fată de valoarea beneficiului net actualizat, intuim că trebuie să alegem rata de actualizare R_a minimă și maximă foarte mari, pentru a ne apropia de 0.

La aplicarea corectă a relațiilor care determină rata internă de rentabilitate, ne impunem a reține următoarea constatare: pentru a micșora beneficiul net actualizat BNA, trebuie să mărim rata de actualizare, de aceea, la aplicarea formulei conform schemei de deducere a acesteia pentru R_{aM} corespunde BNA_m iar pentru R_{am} corespunde BNA_n .

În aplicarea formulei se menționează că, întotdeauna vom căuta să obținem la R_{aM} un BNA_n negativ și la R_{am} un BNA_n pozitiv și că BNA_n va avea valoarea minimă, indiferent de valoarea absolută. Cunoșcând că la $i = 12\%$, $BNA = +63.260.000$, intuim că va trebui să crească foarte mult i pentru a micșora foarte mult BNA. Alegem la întâmplare $i = 100$. După efectuarea calculărilor vom obține BNA negativ dar aproape de 0. Acesta va reprezenta rata de rentabilitate cea mai mare R_{aM} iar dacă va fi invers, va reprezenta rata de rentabilitate cea mai mică R_{am} . Procedăm la efectuarea calculărilor, respectiv la determinarea valorii BNA pentru $i = 100$:

$$BNA_{(100)} = Va_{(100)} - Ca_{(100)}$$

Determinăm valoarea $BNA_{(100)}$ la timpul prezent $t = 0$.

Calculul venitului actualizat $V_{a(100)}$ se va face utilizând aceiași factori ca și la determinarea la timpul $t = 0$ a venitului actualizat pentru $i = 12\%$:

$$V_{a(100)} = V_r \cdot \left[\frac{(1+i)^{t_1} - 1}{i(1+i)^{t_1}} - \frac{(1+i)^{t_2} - 1}{i(1+i)^{t_2}} \right]$$

unde:

$V_{a(100)}$ = venit actualizat, utilizând $i = 100\%$

V_r = venitul constant obținut în fiecare an după 3 ani care este egal cu 20.000.000 lei.

$t_1 = 11$ ani, perioada de calcul

$t_2 = 3$ ani, durata realizării investiției după care decurg veniturile constante.

$i = 100\%$ ales prin sondaj, urmărind să obținem în BNA în valoare absolută cât se poate de mic.

$$V_{a(100)} = 20.000.000 \cdot \left[\frac{(1+1,00)^{11} - 1}{1,0 \cdot (1+1,00)^{11}} - \frac{(1+1,00)^3 - 1}{1,0 \cdot (1+1,00)^3} \right]$$

$$V_{a(100)} = 20.000.000 \cdot \left[\frac{2^{11} - 1}{1,0 \cdot (2)^{11}} - \frac{2^3 - 1}{1,0 \cdot (2)^3} \right]$$

$$V_{a(100)} = 20.000.000 \cdot \left[\frac{2048 - 1}{2048} - \frac{8 - 1}{8} \right]$$

$$V_{a(100)} = 20.000.000 \times 0,124 = 2.480.000 \text{ lei}$$

$$V_{a(100)} = \underline{+ 2.480.000 \text{ lei}}$$

Calculul costului $C_{a(100)}$ se va face cu ajutorul relației:

$$C_{a100} = C_r \cdot \frac{(1+i)^{t_2} - 1}{i(1+i)^{t_2}}$$

Aici C_{a100} reprezintă costul actualizat adus din anul 3 în anul 0 pentru $i = 100\%$.

Se face observatia că așa cum am obținut valoarea venitului actualizat, luând în calcul numai efectul investiției, așa și la calcularea costului se iau în calcul numai cheltuielile ocazionate cu investiția.

C_r reprezintă cheltuielile anuale constante și succesive pentru o perioadă de 3 ani începând cu anul $t = 1$, utilizând rata de rentabilitate $i = 100\%$, fiind egale cu 3.000.000 lei. Considerăm $t_2 = 3$ ani și $i = 100\%$. Avem:

$$C_{a(100)} = C_r \cdot \frac{(1 + 100)^3 - 1}{1,0(1 + 100)^3} = 3.000.000 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)$$

$$C_{a(100)} = -2.628.000$$

$$\text{Algebric: } BNA(100) = V_{a(100)} + C_{a(100)}$$

$$BNA(100) = +2.480.000 - 2.628.000$$

$$BNA(100) = -148.000 \text{ lei}$$

Nemaifăcând alte încercări și admitându-l pe $i = 100\%$ drept rată de rentabilitate actualizată de calcul pentru obținerea valorii RIR, putem spune că am obținut valoarea ratei de actualizare cea mai mare R_{aM} și BNA cel mai mic, respectiv BNA_m . Urmărim acum să determinăm rata de actualizare cea mai mică, dar cu BNA pozitiv și de valoare cât se poate de mică care va reprezenta BNA_M . Alegerea lui i care să asigure această condiție se face tot la întâmplare, știind acum că va fi cuprins sigur între $i = 100\%$ și $i = 12\%$, intuind că va fi mai aproape de 100.

Dacă din întâmplare, la următoarea încercare nu obținem un BNA pozitiv ci tot negativ, acesta cu siguranță că în valoare absolută va fi mai mic decât cel determinat anterior cu $i = 100\%$ și îl vom alege drept rată de actualizare cea mai mare R_{aM} cu beneficiul net actualizat corespunzător, cel mai mic BNA_m căutând mai departe un R_{aM} . Alegem acum $i = 80\%$ și refacem calculul urmând același itinerar:

$$V_{a(80)} = V_r \cdot \left[\frac{(1 + 0,8)^{11} - 1}{0,8 \cdot (1 + 0,8)^{11}} - \frac{(1 + 0,8)^3 - 1}{0,8 \cdot (1 + 0,8)^3} \right] =$$

$$= V_r \cdot \left[\frac{(1,8)^{11} - 1}{0,8 \cdot (1,8)^{11}} - \frac{(1,8)^3 - 1}{0,8 \cdot (1,8)^3} \right] =$$

$$= V_r \cdot \left[\frac{641,93 - 1}{0,8 \cdot (641,93)} - \frac{5,83 - 1}{0,8 \cdot (5,83)} \right] =$$

$$= V_r \cdot \left[\frac{640,93}{513,94} - \frac{4,83}{4,66} \right] = V_r \cdot (1,255 - 1,035)$$

$$V_{a(80)} = 20.000.000 \times 0,22 = 4.400.000 \text{ lei .}$$

$$V_{a(80)} = + 4.400.000 \text{ lei}$$

$$Ca_{(80)} = Cr \cdot \frac{(1 + 0,8)^3 - 1}{0,8(1 + 0,8)^3} = Cr \cdot \frac{(1,8)^3 - 1}{0,8(1,8)^3} = Cr \cdot \frac{5,83 - 1}{0,8 \times 5,83}$$

$$Ca_{(80)} = 3.000.000 \times 1,035 = 3.105.000 \text{ lei}$$

$$Ca_{(80)} = -3.105.000 \text{ lei .}$$

Utilizând valorile absolute, avem :

$$BNA_{(80)} = Va_{(80)} - Ca_{(80)} = 4.400.000 - 3.105.000$$

$$BNA_{(80)} = + 1.295.000 \text{ lei .}$$

Dacă am fi ales un $i > 80$ am fi obținut BNA mai mic, ceea ce trebuie să urmărim pentru ca RIR obținut să aibă o valoare cât se poate de aproape de condiția dată prin definiție. Urmărim mărimile determinate pentru a calcula valoarea RIR:

$$RIR = Ra_M - (Ra_M - Ra_m) \cdot \frac{BNA_m}{BNA_M - BNA_m}$$

unde:

$$Ra_M = 100$$

$$Ra_m = 80$$

$$BNA_M = + 1295000$$

$$BNA_m = - 148000$$

$$RIR = 100 - (100 - 80) \cdot \frac{- 148000}{1295000 - (- 148000)}$$

$$RIR = 100 - 20 \cdot \frac{148000}{1443000} = 100 - (20 \times 0,103)$$

$$RIR = 100 - 2,06 = 97,94$$

$$RIR = 97,94$$

Calculăm RIR cu relația a doua demonstrată, care va trebui să dea același rezultat:

$$RIR = Ra_m + (Ra_M - Ra_m) \cdot \frac{BNA_M}{BNA_M - BNA_m}$$

$$RIR = 80 + (100 - 80) \cdot \frac{1295000}{1295000 + 148000}$$

$$RIR = 80 + 20 \cdot \frac{1295000}{1443000} = 80 + (20 \times 0,897)$$

$$RIR = 80 + (20 \times 0,897) = 80 + 17,94$$

$$RIR = 97,94$$

În concluzie, investiția din acest exemplu este rentabilă numai până la $i = 97,94$. Dacă depășim această rată, înseamnă că nu putem asigura rata de acumulare sau de consum propusă.

Fată de cele prezentate până acum cu privire la investiții, se cuvine să conchidem:

1. Înainte de a începe analiza eficienței economice a unei investiții este necesar în primul rând, să ne alegem o rată minimă de rentabilitate RMR pe care o luăm drept rată de actualizare. Rata de actualizare poate fi aleasă chiar rata dobânzii bancare la care se adaugă câteva procente.

2. Cu ajutorul acestei rate notate în relațiile noastre cu i și care, așa cum am menționat anterior, reprezintă rata de actualizare, determinăm beneficiul net actualizat și implicit, la determinarea raportului V_a/C_a , respectiv veniturile actualizate asupra costurilor actualizate.

3. Determinăm valoarea beneficiului net actualizat atât pentru interpretarea justă a rentabilității investiției, cât și pentru a sluji la calcularea ratei interne de rentabilitate RIR.

Presupunând că pentru același scop avem două, trei sau mai multe proiecte, după efectuarea calculelor de mai sus procedăm astfel :

a) Eliminăm proiectele care au BNA (Beneficiul Net Actualizat) negativ.

b) Ordonăm variantele după valoarea BNA pozitiv în ordine descrescătoare.

c) Analizăm, începând cu prima poziție, alți factori care pot influența alegerea uneia sau altelei din variantele cu BNA pozitiv, nu după valoarea cea mai mare, ci și funcție de alte criterii cum ar fi:

- modul de asigurare a resurselor;
- transport de materii prime;
- preț de desfacere;
- sponsorizări externe ca urmare a unor interese sociale sau politice;
- poluări;
- coeficient de risc privind diferite durate de funcționare;
- motive strategice.

Soluția aleasă trebuie să garanteze o rentabilitate cât de poate de sigură.

3. RENTABILITATE ECONOMICA

Este corect ca, utilizând atât de frecvent notiunea de rată de rentabilitate, rata dobânzii sau rata beneficiului notat cu i , să lămurim în câteva cuvinte expresia matematică a acestei mărimi chiar dacă, așa cum am mai menționat, determinarea ei este cu atât mai greu de obținut, cu cât exprimă o rată de dezvoltare a unei sfere mai largi de activitate ca ramuri industriale sau chiar industria unei țări în ansamblul ei.

Lucrarea de față nu-și propune să abordeze probleme de o asemenea complexitate, de aceea limităm problema determinării ratei de rentabilitate la sfere de activități mai restrânse, ba chiar la nivelul micilor întreprinzători.

Așa cum am mai comentat, nimeni nu întreprinde o afacere numai de dragul de a avea o ocupație, ci o întreprinde din dorința de a prospera și intuiește o dezvoltare permanentă a întreprinderii sale, plecând de la un anumit capital inițial și ajungând peste ani la un capital mult mai mare.

Fără să facă un calcul, agentul economic se gândește la un ritm de dezvoltare lunar sau anual, propunându-și o anumită rentabilitate a afacerii sale. Dacă această dorință este analizată corect în mediul financiar în care trăim, atunci agentul economic are șanse mari de a evita unele tentații care aparent sunt avantajoase, dar care pot duce într-un viitor la faliment.

Prin rata rentabilității înțelegem capacitatea unei activități economice de a asigura beneficii care să conducă în permanentă la acumularea de capital pentru o continuă dezvoltare. La nivelul unei țări aceste rate sunt mici, ba chiar sunt și regrese, iar la nivel microeconomic aceste rate pot avea valori mult mai mari.

Indiferent la ce nivel se determină această rată, când ea există, conduce la dezvoltare dacă se găsește într-un raport corect cu rata dobânzii bancare, sau cu alte rate externe de care depinde. Deci, în abordarea unor analize de fezabilitate, trebuie să determinăm două categorii de rate de rentabilitate:

1. Rate externe de rentabilitate, care cuprind Rata minimă de rentabilitate RMR sau Rata de actualizare. Această mărime trebuie aleasă din cele existente în ramura industrială respectivă pe economie sau, așa cum am mai precizat, poate fi chiar rata dobânzii bancare mărită cu câteva procente.

2. Rate interne de rentabilitate RIR sau rată de rentabilitate economică RRE care se calculează și care, de fapt, oglindeste eficiența locală sau, mai bine zis, a acțiunii economice studiate.

3.1 RATA DE RENTABILITATE ECONOMICA

Această rată, ca de altfel și rata internă de rentabilitate, exprimă rentabilitatea medie a tuturor cheltuielilor efectuate pentru realizarea

unei productii sau a unor servicii într-o perioadă de calcul aleasă. Dacă notăm încasările cu P_t , atunci pentru o perioadă de la 0 la n ani, valoarea actualizată a acestor încasări va fi de:

$$\sum_{n=1}^t K_t \cdot P_t \quad (3.1)$$

unde K_t reprezintă factorul de actualizare, care pentru actualizarea la t

= 0 poate fi $\frac{1}{(1+i)^t}$ sau $\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t}$ iar pentru actualizare la $t = n$

poate fi $(1+i)^t$, $\frac{(1+i)^t - 1}{i}$ și $\frac{(1+i) \cdot [(1+i)^t - 1]}{i}$.

De asemeni, dacă notăm cu I_x eventualele investitii pe perioada calculată și cu C_t cheltuieli ce se fac pentru activitatea economică, atunci pentru intervalul ales, totalitatea costurilor vor fi:

$$\sum_{n=1}^t K_t \cdot (I_t + C_t) \quad (3.2)$$

unde K_t reprezintă factorul de actualizare, putând lua una din valorile date de relațiile menționate mai înainte.

Rata de rentabilitate economică RRE va fi valoarea lui i care va obliga să avem:

$$\sum_{n=1}^t K_t \cdot P_t - \sum_{n=1}^t K_t \cdot (I_t + C_t) = 0 \quad (3.3)$$

Metoda utilizată este similară cu cea folosită la determinarea ratei interne de rentabilitate RIR, unde am ales de la bun început o rată de actualizare externă care a stat la baza determinării beneficiului net actualizat. În acest caz, însă, alegem i minim și i maxim, cu ajutorul cărora actualizăm componentele costurilor și a veniturilor pînă când obținem: $V_{a1} - C_{a1} > 0$ și $V_{a2} - C_{a2} < 0$ cu valori absolute cât se poate de mici.

La alegerea ratelor de actualizare i_1 vom pleca de la rata dobânzii având în vedere că ne referim mai mult la acțiuni ale unor mici întreprinzători care-și pot desfășura activitatea numai utilizând băncile de credit. Pentru a limpezi modul de utilizare al relațiilor (3.1), (3.2) și (3.3), apelăm la un exemplu:

Exemplul nr. 3.1

Un agent economic își propune să pornească la o acțiune de afaceri care să-i aducă profit. În acest sens, are o viziune clară a ceea ce are de făcut și ce dorește să obțină pentru o perioadă de 1,5 ani respectiv 18 luni. Nu cunoaște rata de rentabilitate, dar știe că banca de credit îi percepe o dobândă anuală de 75 %.

Pe parcursul intervalului (de 18 luni), propus pentru determinarea ratei de rentabilitate economice R.R.E., se prevăd următoarele evenimente economice:

1. Agentul economic investeste un capital de un milion de lei din împrumut bancar pe termen scurt cu rate de restituire în termen de 10 luni începând cu luna a 5-a, iar încasarea împrumutului de un milion se face în 4 rate a câte 250 mii lei pe lună.

2. Investiția durează 4 luni cu un ritm de execuție lunară de 250 mii lei pe lună, dar fiind vorba de amenajări, nu aduce beneficii decât după 4 luni.

3. Costurile în primele 4 luni sunt mai mari, afectate fiind de cheltuielile de investiții și nu se înregistrează beneficii care să asigure o acumulare de capital astfel că ce se produce se și consumă.

4. Din luna a 5-a cresc încasările ca urmare a finalizării investiției, obținându-se beneficii chiar în condițiile rambursării investiției.

5. Incepând din luna a 15-a, beneficiul crește vertiginos ca urmare a lichidării datoriei.

6. Capitalul pe care-l rulează agentul economic și pe care-l putem lua drept cost de producție lunară până la realizarea investiției este de 1,5 mil. lei pe lună după care costurile de producție scad cu 1 milion.

7. Până la realizarea investiției, costurile sunt aproximativ egale cu încasările, respectiv de 1,5 mil. lei, fapt ce l-a determinat pe întreprinzător să elimine una sau mai multe surse de cheltuieli (chirii, perisări, transport etc.) printr-o investiție suplimentară.

În baza acestor date, să intuim modul de calculare a ratei de rentabilitate economică.

Determinarea ratei dobânzii lunare

Am ales ca rată a dobânzii anuale $i_1 = 75\%$ ca punct de orientare și de calcul. Știm că $(1 + 0,75)^1 = (1 + i_0)^{12}$ deci $1,75 = (1 + i_0)^{12}$. Din tabelele date în anexă obținem:

$$\text{- la } i_m = 4,7 \text{ pe } \alpha_m = (1 + i_m)^{12} = 1,735$$

$$\text{- la } i_M = 4,8 \text{ pe } \alpha_M = (1 + i_M)^{12} = 1,755$$

Folosind relația (1.5) de interpolare, avem :

$$i_0 = i_m + (i_M - i_m) \cdot \frac{\alpha_m}{\alpha_M - \alpha_m}$$

Înlocuind, obținem :

$$i_0 = 4,7 - 0,1 \cdot \frac{1,735}{3,480} = 4,74$$

$$\underline{i_0 = 4,74}$$

Pentru actualizarea veniturilor și costurilor după relațiile (3.1) și (3.2) se poate alege o primă valoare a lui $i > i_0$, să zicem $i_1 = 5\%$ pe lună ceea ce înseamnă că pe an avem o rată de 79,5%. După ce vom face toate calculele cu i_1 și vom cunoaște valoarea și semnul relației (3.3) vom intui și valoarea lui i_2 care va trebui să conducă la o valoare a relației (3.3) de semn opus cu cea dedusă cu i_1 .

Calculăm costurile de producție pe primele 4 luni știind că la costul de 1,5 milioane pe lună se adaugă valoarea determinată de efectul investiției.

Calculul costului din investiții

luna 1	$250.000 \cdot (1 + i_0)^4 = 250.000 \cdot (1,0474)^4 = 300.750$
luna 2	$250.000 \cdot (1 + i_0)^3 = 250.000 \cdot (1,0474)^3 = 285.000$
luna 3	$250.000 \cdot (1 + i_0)^2 = 250.000 \cdot (1,0474)^2 = 274.250$
luna 4	$250.000 \cdot (1 + i_0)^1 = 250.000 \cdot (1,0474)^1 = 261.750$

TOTAL: 1.120.750

Având în vedere că suma de 250.000 se repetă ca o depunere în rate, se poate verifica totalul de 1.120.750 lei și cu relația (1.12), respectiv:

$$C_t = R_t \cdot (1 + i)^t \cdot \frac{[(1 + i)^t - 1]}{i} = 250 \cdot (1,047)^4 \cdot \frac{[(1,047)^4 - 1]}{0,047}$$

$$C_t = 250 \cdot (1,047)^4 \cdot \frac{0,203}{0,0474} = 250 \times 4,28 \times 1,0474 = 250 \times 4,483$$

$$C_t = \underline{1.120.750 \text{ lei}}$$

Suma de 1.120.750 lei constituie valoarea ce trebuie rambursată în 10 rate începând cu anul 5.

În următoarele 10 luni se restituie împrumutul, fiind necesar a se determina cu cât vor crește costurile și cu cât vor scădea veniturile în fiecare lună începând cu luna 5 și terminând cu luna a 14-a inclusiv, pentru aceasta determinăm rata de restituire a împrumutului folosind relația:

$$R_t = C_t \cdot \frac{i(1 + i)^t}{(1 + i)^t - 1} = 1.120.750 \cdot \frac{0,0474 \times (1,0474)^{10}}{(1,0474)^{10} - 1}$$

$$R_t = 1.120.750 \cdot \frac{0,0474 \times 1,587}{0,587} = 1.120.750 \times 0,129$$

$$R_t = \underline{144.576 \text{ lei}}$$

În baza noilor valori obținute față de datele problemei, putem înregistra, pentru fiecare lună, veniturile și costurile.

Expunem sub formă tabelară aceste valori, înregistrând și actualizările la $t = 0$ și $i = 5\%$.

Luna	COSTURI			VENITURI						
	Valoare	Coef.	Actualizat	Valoare	Coef. de actualizare	Valoare actualizată				
1	1800750	0,952	1714314	1500000	0,952	1428000				
2	1785000	0,907	1618995	1500000	0,907	1360500				
3	1774250	0,863	1531177	1500000	0,863	1294500				
4	1761750	0,822	1448158	1500000	0,822	1233000				
5	644576	}	}	1355424	}	}				
6	644576			1355424						
7	644576			1355424						
8	644576			1355424						
9	644576			6,045			3896461	1355424	6,045	8193538
10	644576							1355424		
11	644576							1355424		

Luna	COSTURI			VENITURI										
	Valoare	Coef.	Actualizat	Valoare	Coef. de actualizare	Valoare actualizată								
12	644576	}	}	1355424	}	}								
13	644576			1355424										
14	644576			1355424										
15	500000			}			}	1500000	}	}				
16	500000							1500000						
17	500000							1,790			895000	1500000	1,790	2685000
18	500000							1500000						
TOTAL			-11104105			+16194538								

NOTA : Valorile costurilor neactualizate s-au obtinut astfel :

In lunile 1 - 4 s-au adăugat la costul de 1,5 mil. valorile împrumutate, la care s-a adăugat si dobânda conform celor declarate mai înainte.

Incepând cu luna a 5-a si până în luna 14 inclusiv, valoarea costurilor a scăzut cu un milion, respectiv la 500.000, dar am adăugat rata de restituire a datoriei de 144.576 lei. De la luna 15 la 18, costurile sunt de 500.000 lei.

Veniturile rămân aceleasi, numai că pe o perioadă de 10 luni ele se diminuează cu valoarea de 144.576 lei, care sunt restituiti lunar băncii ca fiind rata de restituire a datoriei.

Actualizarea costurilor si a veniturilor la $t = 0$ se face cu ajutorul factorului $V_t = \frac{1}{(1+i)^x}$ până la $t = 4$ inclusiv.

Între $t = 4$ și $t = 14$ inclusiv, actualizarea se face cu relația:

$$C_{a_0} = R_t \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}}$$

unde:

$$x = 4 \quad t = 14 \quad \text{și} \quad R_t = 644576.$$

Cu aceeași relație se obține și actualizarea intervalului cuprins între luna 15 și luna 18 unde $x = 14$ și $t = 18$ iar $R_t = 500.000$ lei.

În baza acestor relații determinăm coeficienții de actualizare:

$$\frac{1}{(1+i)^4} \cdot \frac{(1+i)^{10} - 1}{i(1+i)^{10}} = \frac{1}{(1,05)^4} \cdot \frac{(1,05)^{10} - 1}{0,05(1,05)^{10}} =$$

$$= 0,783 \times 7,721 = 6,045 \quad \text{și}$$

$$\frac{1}{(1+i)^{14}} \cdot \frac{(1+i)^4 - 1}{i(1+i)^4} = \frac{1}{(1,05)^{14}} \cdot \frac{(1,05)^4 - 1}{0,05(1,05)^4} =$$

$$= 0,505 \times 3,545 = 1,790$$

Constatăm că prima valoare a lui $i = 5\%$ ne dă expresia:

$C_{a_1} - V_{a_1} = 16.194.538 - 11.104.105$ pozitivă, egală cu $+ 5.090.433$, deci:

$$\text{BNA} = + 5.090.433 \text{ lei}$$

Pentru a determina rata de rentabilitate economică, trebuie să alegem un i , astfel încât să obținem un BNA negativ știind că BNA scade pe măsură ce crește rata de actualizare; alegem un $i = 10\%$ pe lună și recalculăm coeficienții:

$$\frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}} = \frac{1}{(1,1)^4} \cdot \frac{(1,1)^{10} - 1}{0,1(1,1)^{10}} = 0,683 \times 6,144 =$$

4,19

$$\frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}} = \frac{1}{(1,1)^{14}} \cdot \frac{(1,1)^4 - 1}{0,1(1,1)^4} = 0,263 \times 3,169 =$$

0,830

De la $t = 1$ la $t = 4$ utilizăm relația $\frac{1}{(1+i)^t}$ și trecem coeficienții determinați în tabelul de calcul.

Actualizarea la $t = 0$ pentru $i = 10\%$ se va face folosind tabelul prezentat anterior. În acest caz obținem:

$$\text{BNA} = 11.674.503 - 8.793.023 = + 2.881.480 \text{ lei}.$$

Nu am reușit să obținem o valoare negativă, de aceea va trebui să mai facem o încercare cu $i = 20\%$:

$$\frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}} = \frac{1}{(1,2)^4} \cdot \frac{(1,2)^{10} - 1}{0,2(1,2)^{10}} = 0,482 \times 4,192 = 2,020$$

$$\frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}} = \frac{1}{(1,2)^4} \cdot \frac{(1,2)^4 - 1}{0,2(1,2)^4} = 0,077 \times 2,588 = 0,199$$

Completând și pozițiile de la 1 la 4 cu coeficienții rezultati din relația $\frac{1}{(1+i)^t}$ obținem situația identică ca la $i = 5\%$. Și în acest caz obținem un BNA pozitiv, dar foarte aproape de valoarea 0, respectiv:

$$\text{BNA} = 6.916.950 - 6.015.036 = + 901.914 \text{ lei}$$

Încercăm în continuare cu $i = 30\%$ și determinăm coeficientul ca la celelalte încercări, folosind tabelul de mai jos:

Luna	COSTURI			VENITURI		
	Inregis- trate	Coef. de actuali- zare	Actuali- zate	Inregis- trate	Coef. de actuali- zare	Actuali- zate
1	1800750	0,769	1384776	1500000	0,769	1153500
2	1785000	0,591	1054035	1500000	0,591	886500
3	1774250	0,455	807283	1500000	0,455	682500
4	1761750	0,350	616612	1500000	0,350	525000
5	644576	1,081	696786	1355424	1,081	1465213
6	644576			1355424		
7	644576			1355424		
8	644576			1355424		
9	644576			1355424		
10	644576			1355424		
11	644576			1355424		
12	644576			1355424		
13	644576			1355424		
14	644576			1355424		
15	500000	0,054	27000	1500000	0,054	81000
16	500000			1500000		
17	500000			1500000		
18	500000			1500000		
TOTAL			4586492			4793713

$$\text{BNA} = 4793713 - 4586492 = +207.221$$

Nici de data aceasta nu am reusit să obținem un BNA negativ, de aceea continuăm încercările, alegând din nou o rată mai mare, respectiv $i = 40\%$ și recalculând coeficientii cu relațiile menționate, obținând tabelul:

Luna	COSTURI			VENITURI		
	Inregis- trate	Coef. de actuali- zare	Actuali- zate	Inregis- trate	Coef. de actuali- zare	Actuali- zate
1	1800750	0,714	1285735	1500000	0,714	1071000
2	1785000	0,510	910350	1500000	0,510	765000
3	1774250	0,364	645827	1500000	0,364	546000
4	1761750	0,260	458055	1500000	0,260	390000
5	644576	0,627	414149	1355424	0,627	849850
6	644576			1355424		
7	644576			1355424		
8	644576			1355424		
9	644576			1355424		
10	644576			1355424		
11	644576			1355424		
12	644576			1355424		
13	644576			1355424		
14	644576			1355424		
15	500000	0,0166	8300	1500000	0,0166	24900
16	500000			1500000		
17	500000			1500000		
18	500000			1500000		
TOTAL			3712416			3646750

$$V_a - C_a = 3.646.750 - 3.712.416 = - 65.666 \text{ lei.}$$

Obtinem un BNA negativ, deci putem trece la calculul RRE.

Am găsit că pentru $i_1 = 30\%$ obținem $BNA_1 = + 207.221$ iar pentru $i_2 = 40\%$ obținem $BNA_2 = - 65.666$.

Pentru determinarea ratei interne sau a ratei de rentabilitate economică, facem următoarele notatii:

$$i_1 = R_{a_m} \quad \text{si} \quad BNA_1 = BNA_M$$

$$i_2 = R_{a_M} \quad \text{si} \quad BNA_2 = BNA_m$$

In acest caz avem:

$$R_{a_m} = 30 \%$$

$$BNA_M = + 207.221$$

$$R_{aM} = 40 \%$$

$$BNA_m = -65.666$$

Plecând de la relația (2.30) putem scrie:

$$RRE = R_{am} + (R_{aM} - R_{am}) \cdot \frac{BNA_M}{BNA_M - BNA_m}$$

Inlocuind avem :

$$\begin{aligned} RRE &= 30 + (40 - 30) \cdot \frac{207221}{207221 + 65666} = 30 + 10 \cdot \frac{207221}{272887} = \\ &= 30 + 10 \times 0,759 = 30 + 7,59 = 37,59 \end{aligned}$$

$$\underline{RRE = 37,59 \%}$$

Prin acest exemplu s-a urmărit clarificarea modului de calcul a ratei de rentabilitate economică și nu s-a ținut cont de rigorile contabile de înregistrare a fluxurilor financiare.

CONCLUZII

1. Din exemplul de mai sus, trebuie de reținut că la determinarea unei rate interne de rentabilitate, trebuie plecat în primul rând, de la o rată de actualizare care trebuie să fie rată de referință, fiind acea rată care influențează în mod direct veniturile și cheltuielile, în cazul nostru rata dobânzii.

2. Dacă, după efectuarea calculelor și obținerea ratei interne sau economice constatăm că rata dobânzii bancare i este mai mică decât RRE cu câteva procente, activitatea economică poate fi considerată pozitivă, asigurând o anumită rată de acumulare de capital.

3. În exemplul de mai sus, RRE este foarte mare, respectiv de 37,59 % pe lună față de 4,74 % pe lună cât reprezintă dobânda bancară, ceea ce nu pune probleme de risc.

4. Exemplul ales desigur că s-ar putea să nu aibă veridicitate, dar scopul a fost de a lămuri mai bine traseul și instrumentul teoretic de a rezolva asemenea probleme, deși în conjunctura anilor '90 sunt situații, după câte le simțim, de îmbogățire peste noapte, ceea ce pare că-i conferă exemplului o tentă de actualitate.

5. Pentru a nu face interpretări gresite, considerăm că trebuie clarificat de ce se consideră rentabilă acțiunea economică și sub valoarea RRE respectiv $R_a < RRE$ cu condiția ca $R_a < i_b$.

Din modul de calcul se știe că am ajuns la RRE punând condiția ca la aceste valori $BNA = 0$, plecând prin încercări de la aproximativ valoarea dobânzii bancare. Până am ajuns la $i = 40 \%$, toate valorile BNA au fost pozitive, deci marcau eficiență economică. De la $i = 37,59 \%$ în sus, valoarea BNA devine negativă, și deci nu mai marchează eficiență.

Explicația este simplă: pentru fiecare încercare, rata i aleasă a constituit o rată de actualizare ca și cum evenimentele economice exterioare ar impune această influență, respectiv ar fi identic cu i_b rata bancară.

Din acest punct de vedere, putem afirma că Rata de Rentabilitate Economică RRE este acea rată care asigură rentabilitatea economică, chiar în condițiile în care rata de actualizare ar crește până la mărimea ei,

având rentabilitate 0 atunci când $RRE = R_a$ extern. În condițiile în care $RRE < R_a$ extern, avem declin economic și urmează falimentul.

Cu alte cuvinte, agentul economic căruia i-am asumat afacerea prezentată, rezistă chiar în condițiile în care banca de credit ridică dobânda de la 4,74 % până aproape de 37,59 %, fără să înregistreze pierderi. La dobânda de 37,59 % costurile devin egale cu încasările așa că, la această valoare a ratei de actualizare, ceea ce se încasează se și consumă. Menținându-se rata dobânzii la valoarea de 4,74 %, agentul economic cu RRE de 37,59 % se poate spune fără gres că are un ritm de acumulare de capital neobisnuit.

Asa cum am văzut la exemplul nr. 2.9, sunt și situații limită când de la primele calcule de investigare pentru determinarea ratei interne obținem un BNA negativ; asta nu înseamnă că în aceste cazuri trebuie să renunțăm la o analiză mai profundă a fenomenului economic, deoarece scăzând rata de actualizare putem obține un BNA pozitiv, ceea ce confirmă că acțiunea economică este avantajoasă.

În acest caz nu este nimic greșit, așa este, numai că, admitând o rată de actualizare mai mică, am coborât pretențiile noastre în ceea ce privește mărimea ratei de acumulare, dar nu trebuie uitat că această rată de actualizare internă trebuie să nu coboare sub rata de actualizare externă, sau în cazul nostru, sub rata dobânzii bancare, caz în care chiar cu BNA pozitiv, activitatea economică nu este eficientă.

3.2 DURATA DE RECUPERARE A CAPITALULUI FOLOSIND CALCULE DE ACTUALIZARE

Această durată exprimă numărul de ani în care venitul net actualizat (sau BNA) egalează valoarea reală a investiției. Este lesne de înțeles că momentul t pentru actualizare, se alege ca fiind momentul terminării și punerii în funcțiune a investiției, respectiv avem $t = d$, unde d este durata de execuție a investiției și marchează anul de punere în funcțiune.

Notăm cu T durata în ani după punerea în funcțiune a investiției, după care valoarea totală a investiției actualizată la timpul $t = d$ se egalează cu suma totală a veniturilor nete actualizate. Cu notațiile de mai sus, putem scrie relația generală:

$$\sum_{t=1}^d I_x \cdot (1+i)^{d-t+1} = \sum_{t_1=1}^T \frac{1}{(1+i)^{t_1}} \cdot V_{nt_1} \quad (3.4)$$

unde:

I_x = valoarea investițiilor anuale în perioada de executie $t = 1, 2, \dots, d$.

V_{nt_1} = valoarea veniturilor nete în anii de funcționare, constituind suma acestor venituri actualizate.

Ca și în cazul determinării ratei de rentabilitate economice, și aici relația (3.4) poate fi scrisă sub o formă mai generală, astfel:

$$\sum_{t=1}^d K_t \cdot I_x = \sum_{t_1=1}^T K_{t_1} \cdot V_{nt_1} \quad (3.5)$$

unde K_t poate lua forma:

$$(1+i)^t \quad ; \quad \frac{[(1+i)^t - 1]}{i} \quad \text{sau} \quad \frac{(1+i)[(1+i)^t - 1]}{i}$$

iar K_{t_1} poate lua valoarea $\frac{1}{(1+i)^{t_1}}$ sau $\frac{(1+i)^{t_1} - 1}{i \cdot (1+i)^{t_1}}$.

Exemplul nr. 3.2

Un obiectiv industrial cu o valoare de investitii de 150 milioane lei se realizează în doi ani astfel:

- în anul 1 = 50 mil. lei

- în anul 2 = 100 mil. lei

În valoarea investitiei este cuprinsă și valoarea capitalului circulant. După 2 ani, respectiv după realizarea integrală a investitiei și punerea acesteia în funcțiune, se asigură în primul an un venit net de 10 milioane, în al doilea an 15 milioane, iar în următorii ani câte 25 de milioane în fiecare an.

Se apreciază că investitia realizată poate asigura acest beneficiu timp de 20 de ani, iar investitii asemănătoare realizează o rată de rentabilitate de 10%. Se cere, în funcție de datele problemei enunțate, să se calculeze durata de recuperare a investitiei.

Actualizarea se face cu $i = 10\%$ la timpul $t = n$ pentru investitie unde $n = 2$ și la timpul $t_1 = 0$ pentru venituri unde $t_1 = d + 1$.

Expunem datele tabelar:

Anul	Val. I_x	Coef. de actualiz.	Valoare actualiz.	Valoare V_{nt}	Coef. de actualiz.	Valoare actualiz.
1.	50	1,210	60,5	-	-	-
2.	100	1,100	110,0	-	-	-
3.	-	-	-	10,0	0,909	9,09
4.	-	-	-	15,0	0,826	12,39
5.	-	-	-	25,0	0,751	18,77
6.	-	-	-	25,0	0,683	17,07
7.	-	-	-	25,0	0,620	15,50
8.	-	-	-	25,0	0,564	14,10
9.	-	-	-	25,0	0,513	12,82
10.	-	-	-	25,0	0,466	11,65
11.	-	-	-	25,0	0,424	10,60
12.	-	-	-	25,0	0,385	9,62
13.	-	-	-	25,0	0,350	8,75
14.	-	-	-	25,0	0,318	7,95
15.	-	-	-	25,0	0,289	7,22
16.	-	-	-	25,0	0,265	6,57
17.	-	-	-	25,0	0,239	5,97
TOTAL :			170,5	168,07		

Modul de rezolvare :

1. Se determină valoarea totală a investiției actualizate cu relația:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^t$$

unde: $C_0 = 50$ mil. pentru primul an și
100 mil. pentru anul 2

$$C_1 = I_1 = 50 \cdot (1 + i)^2 = 50 \cdot (1 + 0,1)^2 = 50 \cdot (1,21) = 60,5$$

$$C_2 = I_2 = 50 \cdot (1 + i)^1 = 100 \cdot (1 + 0,1)^1 = 100 \cdot (1,21) = 110,0$$

Cunoscând că veniturile nete după doi ani sunt constante, putem determina cu aproximație valoarea T , respectiv numărul de ani în care se recuperează capitalul astfel:

$$170,5 = 25 \cdot x \quad \text{unde} \quad x = \frac{170,5}{25} = 6,82$$

Folosind factorul valorii actuale a unei anuități, adică relația (1.19), respectiv $I_t = \frac{(1 + i)^t - 1}{i(1 + i)^t}$, căutăm în tabele la valoarea 6,82 și

la dobânda 10 % ce t îi corespunde? Vom găsi că la aceste date $t = 12$ pentru $I_t = 6,813692$. Dar, cum în prezenta lucrare nu sunt tabele cu alți

factori decât cu factorul dobânzii compuse $(1 + i)^t$, plecând de la factorul I_t trebuie să ajungem la factorul $D_t \cdot (1 + i)^t$. Stiind că

$$\frac{(1 + i)^t - 1}{i(1 + i)^t} = 6,82 \text{ atunci:}$$

$$(1 + i)^t - 1 = 6,82 \cdot i(1 + i)^t \quad \text{sau}$$

$$(1 + i)^t - 6,82 \cdot i(1 + i)^t = 1 \quad \text{și}$$

$$(1 + i)^t \cdot (1 - 6,82 \cdot i) = 1 \quad \text{dar } i = 0,1$$

$$(1,10)^t \cdot (1 - 0,682) = 1 \quad \text{deci}$$

$$(1,10)^t = \frac{1}{0,318} = 3,14$$

Căutăm în tabele pentru $i = 10$ % ce t corespunde la valoarea 3,14 și găsim că la valoarea cea mai apropiată $t = 12$ avem $(1 + 0,1)^{12} = 3,138$.

Stim acum că durata recuperării investiției $T \approx 12$, putând completa tabelul cu valorile actualizate cel puțin până la $d + 12$ respectiv anul 14.

Luăm din tabele coeficientii de actualizare făcând raportul $\frac{1}{(1 + i)^t}$,

în tabelele anexate neavând calculat acest factor, ci numai $(1 + i)^t$. Adunând cele 12 pozitii, constatăm că ne mai trebuie în jur de 3 ani ca să obținem aproximativ valoarea de 170,5 și într-adevăr $T = 12 + 3 = 15$ la valoarea de 168,07 se mai poate verifica folosind relația de actualizare:

$$C_{0a} = R_t \cdot \frac{1}{(1+i)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} - 1}{i(1+i)^{t-x}} \quad \text{unde } t = 15 \text{ si } x = 2$$

Deoarece această relație se utilizează numai unde avem valori constante ale veniturilor (de 25 mil. lei) și deoarece primii 2 ani au depuneri diferite, scădem din factorul actual al unei anuități I_x influența primilor doi ani și relația devine ca mai sus.

$$C_{0a} = 25 \cdot \frac{1}{(1,10)^2} \cdot \frac{(1,10)^{13} - 1}{0,1 \cdot (1,10)^{13}} = 25 \times 0,826 \times 7,103$$

$C_{0a} = 146,67$ la care adăugăm primii 2 termeni

$$9,09 + 12,39 = 21,48 \quad \text{deci, } V_a = 146,67 + 21,48 = 168,15$$

Diferența de 0,08 se datorează modului cum sunt rotunjite zecimalele în cele două variante.

4. INFLATIE SI REGRES ECONOMIC

Inflatia este un fenomen nedorit si insoteste intotdeauna alte fenomene de cumpănă în istoria unor popoare, fiind o consecință a acestora. Se manifestă intotdeauna la nivelul întregii economii si se mentine atâta timp cât rata de acumulare a unei tari este în continuu regres. Fenomenele care pot declansa ritmuri mari de regrese economice si implicit si financiare sunt multiple si în majoritatea lor influentează negativ nivelul de viață a unui popor întreg, nu numai prin inflatie ci si prin alte consecinte tragice.

Printre aceste fenomene cauzatoare de inflatie, amintim :

- Războaiele;
- Revolutiile cu instabilitățile lor politice;
- Războaie civile;
- Calamități naturale de proportii;
- Embargouri economice.

Toate aceste fenomene au influență negativă asupra stabilității economice în ansamblul economiei unei natiuni, determinând scăderea continuă pentru o anumită perioadă a venitului national.

Această boală economică odată declansată este foarte greu de controlat, desi se stie că singurul antidot al ei este redresarea economiei.

Existenta inflatiei implică în primul rând, o economie dezorganizată unde productivitatea muncii sociale scade continuu iar salariile si preturile cresc în cadrul unei continue competitii de a se restabili un echilibru între valoarea muncii sociale la un moment dat si pretul mărfurilor.

Această scădere a muncii sociale si implicit a nivelului de trai, poate conduce la dezastre economice, de aceea este necesar să se facă mari eforturi de a stopa scăderea continuă a venitului national până la o rată de regres "0" sau de dezvoltare "0" si de a începe redresarea.

Momentul ratei de dezvoltare "0" este momentul de la care nu se coboară mai jos, iar mentinerea pe o durată mai mare a acestei situatii este primul semnal că s-a dat peste solutia redresării economice. Unde se va situa acest moment? la ce nivel de sărăcie? depinde de multi factori la care într-un fel suntem cu totii părtași.

În actiunile economice orice agent este obligat să tină cont în aceste conjuncturi de rata posibilă a inflatiei. A neglija acest lucru înseamnă cu siguranță faliment.

Prin rata de inflatie se înțelege valoarea pe unitate de timp, calculată ca medie pe o perioadă mai îndelungată, care exprimă ritmul de crestere a numărului de unități monetare la suta de unități, astfel încât

valoarea unității monetare să poată compensa permanent în mod echitabil valoarea muncii sociale în continuă scădere.

Notăm această rată cu "J". Ea va exprima într-un fel rata inflației, deoarece valoarea de schimb a unității monetare nu crește cu această rată, ci scade, ca urmare a scăderii productivității muncii.

Analizând mai profund efectul inflației ca urmare a regresului economic, este ușor de intuit că nu poate exista egalitate între rata de creștere a preturilor și rata de creștere a salariilor atâta timp cât valoarea socială a muncii scade.

Asa cum s-a arătat că valoarea muncii sociale dă sensul de regres sau de progres mai putem adăuga că, creșterea în continuare a salariilor prin indexare pentru a compensa impactul social la modificări pozitive de preturi, este o măsură de echilibrare între cele două fluxuri financiare dar, întotdeauna în aceste condiții, se face în detrimentul nivelului de trai pentru că altfel nu este posibilă menținerea unui echilibru economico-financiar dar și social, în condițiile în care moneda națională se devalorizează continuu.

Determinarea ratei inflației "J" se poate face ușor pentru o perioadă anterioară, dar pentru perioada viitoare această determinare ține într-un fel de domeniul previziunilor și mai puțin al calculelor. Faptul că apar dobânzi pe credite deosebit de mari, este o consecință a acestor incertitudini privind rata de inflație în viitor.

Admitând o creștere medie a preturilor de 15 ori în ultimile 32 de luni de la 1 ianuarie 1990 și până în 1993, putem calcula rata lunară a inflației: $(1+i)^{32} = 15$. Din tabelele anexe la $t = 32$ căutăm un i care să dea o valoare mai mică de 15.000.000.

Găsim că la $J_m = 8,8\%$, $(1 + J_m)^{32} = 14.863.622 = \alpha_m$ și la $J_M = 8,9\%$, $(1 + J_M)^{32} = 15.307.073 = \alpha_M$.

Prin interpolare avem :

$$J_0 = J_m + (J_M - J_m) \cdot \frac{\alpha_m}{\alpha_M + \alpha_m}$$

$$J_0 = 8,8 + (8,9 - 8,8) \cdot \frac{14.863.622}{30.170.695}$$

$J_0 = 8,949\%$ rată de inflație lunară în condițiile date, iar rata anuală va rezulta din următorul calcul:

$$(1 + J_1) = (1 + J_0)^{12} \quad \text{iar} \quad (1 + J_0)^{12} = (1 + 0,08949)^{12}$$

$$(1 + J_1) = 2,796913$$

iar:

$$J_1 = 2,797 - 1 = 1,797$$

sau:

$$J_1 = 179,7\% \text{ pe an.}$$

Deci rata medie de creștere a preturilor este de 179,7% anual în condițiile presupuse, care poate fi numită și rată de devalorizare.

Din cele prezentate, trebuie trasă concluzia că agenții economici nu trebuie să piardă din vedere în acțiunile lor, analiza temeinică, a fenomenelor de inflație, fiind obligați pentru a supraviețui, să cunoască tot timpul fenomenele de regres economic din țară, deoarece acestea pot

într-o oarecare măsură să anticipeze regresul sau progresul economic pe întreaga economie.

Fenomenul de instabilitate economică apare evident în toate statele lumii, indiferent de sistemul economic centralizat sau de piață, dar pentru rate foarte mici de inflație putem spune că avem o stabilitate relativă și că numai de la anumite valori de regres economic în sus trecem la starea de inflație.

În cazul stării de inflație, am putea spune că economia unei țări se găsește într-o situație de echilibru economic labil și guvernatorilor le trebuie multă abilitate pentru a nu ieși din acest echilibru. A scăpa de sub control un asemenea echilibru, ar constitui un colaps economic, ceea ce ar conduce în scurt timp la ieșirea de sub controlul statului nu numai a fenomenelor economice dar și a celor sociale, iar redresarea nu ar fi posibilă decât cu mari represiuni și renunțări la unele principii democratice.

În acțiunile economice de viitor, va trebui ca în calculele de perspectivă apropiată, să introducem și influența ratei inflației. În cazul utilizării în analizele economice a ratei de inflație sau a ratei de devalorizare, relațiile de calcul se determină similar ca în cazul factorilor de dobândă compusă: $F = F[(1+i), t]$.

Tinând cont de rata inflației sau de rata de devalorizare, vom găsi formule, funcție și de această mărime, respectiv $F_1 = F[(1+j), t]$ iar atunci când actualizăm valori bănești în condiții de inflație care se găsesc sub incidența unor dobânzi, vom obține relații funcție de ambele mărimi, deci:

$$F_2 = F[(1+i), (1+j)]$$

Pentru a determina relațiile de calcul utilizând rata de inflație sau de devalorizare, trebuie să ținem cont că ne putem afla în două situații:

4.1 SITUAȚIA CÂND $i = 0$ ȘI $j \neq 0$

Atunci, toate relațiile determinate pentru i sunt valabile și pentru rata inflației j respectiv $D_f = (1+j)^t$ numit factor de inflație compusă și care reprezintă numărul de unități monetare din timpul $t = n$ care echivalează valoarea unei unități monetare din timpul $t = 0$.

$$V_f = \frac{1}{(1+j)^t} \text{ este factorul de actualizare a efectului}$$

inflației, reprezentând valoarea pe care o are azi un leu din timpul $t = n$ obținut prin inflație cu rata j , sau se mai poate spune că acest factor reprezintă valoarea de azi a unei unități monetare de ieri, obținută sub influența ratei de inflație.

$$B_f = \frac{(1+j)^t - 1}{j} \text{ sau } B_f = (1+j) \cdot \frac{(1+j)^t - 1}{j} \text{ reprezintă}$$

factorul de compunere pentru un an, reprezentând suma valorilor numerice a unor depozitări constante și periodice a câte un leu, cu valoarea reală din timpul depunerii, asupra cărora s-a aplicat rata de inflație j . Valoarea obținută reprezintă valoarea în lei care echivalează ca putere de cumpărare cu suma ratelor de câte un leu, cu valoarea lui la depunere, fără influența ratei de inflație.

$$A_f = \frac{j}{(1+j)^t - 1} \text{ este factorul de amortizare în condiții de}$$

inflație, reprezentând rata de plată anuală sau lunară a unei sume ce o întvedem a fi creată la timpul $t = n$ influențată de rata inflației.

$$I_f = \frac{(1+j)^t - 1}{j(1+j)} \text{ este factorul valorii actuale a unei anuități și în}$$

cazul inflației reprezintă valoarea de azi a unor rate a căror valoare este influențată de rata inflației.

Cu alte cuvinte I_f reprezintă suma unor rate în valoare de un leu la timpul respectiv aduse la timpul de azi sub influența ratei de inflație j .

$$F_f = \frac{j(1+j)^t}{(1+j)^t - 1} \text{ este factorul de recuperare a fondurilor și}$$

reprezintă în acest caz, valoarea ratelor de plată a unui împrumut de un leu exprimate în unități monetare devalorizate, cu valori echivalente ca putere de cumpărare cu unitatea de la timpul inițial, evaluate pentru fiecare rată în momentul restituirii.

Pentru o mai bună înțelegere, vom exemplifica fiecare caz :

a) Care va fi echivalentul sumei de 1000 lei de azi peste 10 luni, rata inflației fiind de 2 % pe lună:

$$C_f = C_0 \cdot (1+j)^t$$

$$C_0 = 1000 \text{ lei}$$

$$j = 2 \% \text{ pe lună rata inflației}$$

$$t = 10 \text{ luni}$$

$$C_f = C_0 \cdot (1+j)^t = 1000 \cdot (1+0,02)^{10} = 1000 \cdot (1,218994)$$

$$\underline{C_f = 1219 \text{ lei}}$$

Valoarea de 1219 lei ne spune că pentru a cumpăra produse care au costat acum 10 luni 1000 lei azi, după 10 luni cu rata inflației $j = 2 \%$ pe lună le vom cumpăra cu 1219 lei.

b) Ce valoare trebuie să avem azi pentru ca 1219 lei după 10 luni să asigure aceeași putere de cumpărare, știind că rata inflației este $j = 2 \%$ pe lună.

$$C_0 = C_f \cdot \frac{1}{(1+j)^t} \quad \text{unde:}$$

$$C_0 = ?$$

$$C_f = 1219 \text{ lei}$$

$$j = 2 \% \text{ pe lună}$$

$$t = 10 \text{ luni}$$

$$C_0 = 1219 \cdot \frac{1}{(1+0,02)^{10}} = 1219 \cdot \frac{1}{1,218994}$$

$$C_0 = 1000 \text{ lei}$$

Deci, păstrând 1219 lei timp de 10 luni, vom constitui atunci o valoare de cumpărare echivalentă azi cu 1000 lei la rata de inflație $j = 2 \%$ pe lună.

c) Dacă în fiecare lună, timp de un an păstrăm pentru acumulare 10.000 lei pe lună, la sfârșitul anului vom avea 120.000 lei.

În condițiile de inflație, cu o rată de inflație de 2 % pe lună, să calculăm în aceste condiții valoarea care ar compensa suma de 120.000 lei, ca putere de cumpărare după un an.

$$C_f = R_f \cdot \frac{(1+j)^t - 1}{j} = 10.000 \cdot \frac{(1+0,02)^{12} - 1}{0,02}$$

$$C_f = 10.000 \cdot \frac{0,268242}{0,02} = 10.000 \cdot \frac{26,8242}{2} = 10.000 \cdot 13,4121$$

$$C_f = 134.121 \text{ lei}$$

După un an, pentru a menține aceeași putere de cumpărare a celor 120.000 lei adunați, ar trebui să mai adăugăm la ei 14.121 lei. Menționăm că relația de calcul este corespunzătoare cu restituirea ratelor la sfârșit de lună.

d) Care va fi suma echivalentă la valoarea de azi împrumutată la cineva de 120.000 lei, cu restituire lunară a câte 10.000 lei, știind că rata inflației este de $j = 2\%$ și $t = 12$ luni.

$$C_0 = R_f \cdot \frac{(1+j)^{12} - 1}{j(1+j)^{12}} = 10.000 \cdot \frac{(1+0,02)^{12} - 1}{0,02(1+0,02)^{12}}$$

$$C_0 = 10.000 \times 10,575341$$

$$C_0 = 105.753 \text{ lei}$$

Am împrumutat 120.000 lei și aceștia după 12 luni valorează 105.753 lei, deci am pierdut 14.247 lei.

e) Care ar trebui să fie rata de restituire a unui împrumut de 120.000 lei, astfel încât să se țină cont că această rată să compenseze rata inflației de 2 % pe lună. Împrumutul se face pentru un an, iar ratele în număr de 12 sunt egale.

Folosim factorul de recuperare a fondurilor:

$$R_f = C_0 \cdot \frac{j(1+j)^t}{(1+j)^t - 1} = 120.000 \cdot \frac{0,02(1+0,02)^{12}}{(1+0,02)^{12} - 1}$$

$$R_f = 120.000 \cdot 0,094560 = 11.347 \text{ lei}$$

$$R_f = 11.347 \text{ lei}$$

Deci, în loc de a se restitui câte 10.000 lei pe lună, pentru a achita datoria de 120.000 lei se va restitui 11.347 lei pe lună, pentru a acoperi devalorizarea permanentă a leului cu 2 % pe lună.

4.2 SITUAȚIA CÂND $i \neq 0$ ȘI $j \neq 0$

Aceasta este situația cea mai generală. Relațiile de calcul se determină utilizând același raționament ca și la obținerea celor 6 factori

utilizati la rata dobânzii, numai că în acest caz folosim două rate care se influentează una pe alta.

4.3 FACTORI DE DOBANDA INFLUENTATI DE RATA INFLATIEI

Acest factor are relatia $D_t = (1+i)^t$ fără efectul inflatiei. In situatii de inflatie, acest factor este influentat de rata de inflatie j . Plecând de la acelasi rationament cu care am demonstrat relatia de mai sus, ne propunem să determinăm o relatie a cărui simbol îl notăm cu D_{t_f} care să țină cont în timp atât de rata dobânzii i , cât și de rata inflatiei j .

Am arătat că, în primul an, efectul dobânzii asupra unui leu este de $1 + 1 \cdot i$. La sfârșitul anului, fiecare din acesti doi termeni vor fi influentati de rata inflatiei și se adaugă la acesti termeni, $1 \cdot j + i \cdot j$ deci, avem :

$$D_{1_f} = 1 + 1 \cdot i + 1 \cdot j + 1 \cdot i \cdot 1 \cdot j = 1 + i + j + i \cdot j$$

Dăm factor comun pe j și avem:

$$D_{1_f} = (1+i) + (1+i)j$$

Dăm factor comun pe $(1+i)$ și obținem:

$$D_{1_f} = (1+i) \cdot (1+j)$$

In cel de al doilea an avem:

$$D_{2_f} = (1+i)(1+j) + (1+i)(1+j) \cdot i + (1+i)(1+j) \cdot j + (1+i)(1+j) \cdot i \cdot j$$

In acest caz, la începutul anului am plecat cu valoarea de la sfârșitul primului an, căruia i-am aplicat influența dobânzii, rezultând primii doi termeni. La acestia, am adăugat aceeasi termeni, dar influentati și de rata inflatiei "j". Facem grupările :

$$D_{2_f} = (1+i)(1+j) \cdot [1 + i + j + i \cdot j]$$

In paranteza mare avem valoarea primului an, deci:

$$1 + i + j + i \cdot j = (1+i) \cdot (1+j)$$

de unde:

$$D_{2_f} = (1+i)^2 \cdot (1+j)^2$$

Se poate dezvolta rationamentul de mai sus până la timpul t și se obține relatia generală:

$$D_{t_f} = (1+i)^t \cdot (1+j)^t \quad (4.1)$$

Acest factor reprezintă valoarea fictivă a unui leu depus la o bancă asupra căruia se aplică dobânda i pe o perioadă de n ani (luni) egală cu t care compensează influența inflatiei, exprimând numărul de lei ce ar echivala în valoare cu suma obținută de la bancă, în conditii de stabilitate când $j=0$.

Cu alte cuvinte, valoarea acestui coeficient ne arată care ar trebui să fie valoarea unui leu după n ani în conditii de inflatie care să aibă

aceeasi putere de cumpărare pe care ar avea-o leul la care s-a aplicat dobânda i după n ani, în conditii de stabilitate financiară ($j = 0$).

4.4 FACTORUL DE ACTUALIZARE INFLUENTAT DE INFLATIE

Având relatia $V_t = \frac{1}{(1+i)^t}$ fără efectul inflatiei, sub influenta ratei de devalorizare sau de inflatie " j " va deveni sub forma:

$$V_{tf} = \frac{1}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t} \quad (4.2)$$

Pentru a dovedi veridicitatea relatiei, plecăm de la dobânda compusă.

Presupunem că vrem să determinăm valoarea echivalentă C_{tf} după t ani (luni) în conditii de aplicare a dobânzii i si a inflatiei j asupra unui capital initial C_0 .

Relatia de calcul este:

$$C_{tf} = C_0 \cdot (1+i)^t \cdot (1+j)^t$$

Din această relatie scoatem valoarea lui C_0 :

$$C_0 = \frac{C_{tf}}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t}$$

Facem pe $C_{tf} = 1$ si avem :

$$C_0 = \frac{1}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t}$$

În aceste conditii $C_0 = V_{tf}$.

În baza acestui rationament, putem reconstitui următoarea definitie:

Coeficientul V_{tf} de actualizare, influentat si de rata de inflatie, reprezintă valoarea de azi care, mărită sub influenta dobânzii si a inflatiei ne dă 1 (un) leu peste $n = t$ ani (luni).

Pentru o mai bună edificare asupra sensului celor două relatii, să ne propunem să determinăm suma ce ne-ar asigura o echivalentă corectă de capital în conditii de dobândă cu $i = 3\%$ pe lună si rată de inflatie $j = 2\%$ pe lună la sfârșitul unei perioade de 18 luni si a unei sume de 100.000 lei.

$$C_{tf} = C_0 \cdot (1+i)^t \cdot (1+j)^t$$

unde:

$$C_0 = 100.000 \text{ lei}$$

$$i = 3\% \text{ pe lună}$$

$$j = 2\% \text{ pe lună}$$

deci:

$$C_{t_f} = 100.000 \cdot (1 + 0,03)^{18} \cdot (1 + 0,02)^{18}$$

$$C_{t_f} = 100.000 \cdot (1,702433) \cdot (1,428246)$$

$$C_{t_f} = 243.149 \text{ lei}$$

Această valoare compensează valoarea:

$$C_t = 100.000 \cdot (1,702433) = 170.243 \text{ lei}$$

Dacă nu ar exista inflație, suma de 170.243 lei ar constitui valoarea capitalului după $t = n$ ani (luni), păstrat într-o bancă ce oferă dobânda i . Existând inflație și cunoscând-o, putem determina suma ce o poate echivala pe aceasta (243.149) pentru a o păstra în bancă fără devalorizarea capitalului menționat.

Desigur că nimeni nu compensează această sumă, de aceea aceste relații ne ajută să calculăm pierderile reale în condiții de inflație, față de situația unei stabilități economice.

Pierderea relativă în cazul în care $i \neq 0$ se obține, prin diferența relațiilor $C_0 \cdot (1 + i)^t \cdot (1 + j)^t - C_0 \cdot (1 + i)^t$.

Înlocuind, avem: $243149 - 170243 = 72906$ lei, iar pierderea absolută reprezintă $C_0 \cdot (1 + j)^t - C_0$, respectiv $142824 - 100000 = 42824$ lei.

Aceste pierderi trebuie înțelese ca fiind unități monetare fictive, care exprimă compensarea unor devalorizări de monedă. În cazul pierderii relative avem și partea de pierdere ce revine dobânzilor.

Din cele prezentate, rezultă că inflația lasă amprente sărăciei pe orice capital, fie stocat, fie depus în bănci cu rate de dobândă.

Agentii economici care pricep acest fenomen, vor ști că în conjunctura de instabilitate financiară este nevoie de multă abilitate în dirijarea capitalului. Este recomandabil, pentru a te menține într-un circuit economic progresiv, să se mărească viteza de circulație a mijloacelor circulante, precum și să se sesizeze momentele de salturi a preturilor pentru a deține o proporție mai mare de marfă în acel moment decât de bani din totalul patrimoniului pe care-l are societatea economică respectivă.

4.5 FACTORUL DE COMPUNERE PENTRU UN AN INFLUENȚAT DE INFLAȚIE

Sub influența ratei de inflație sau a ratei de devalorizare a monedei, și în acest caz, pentru a obține relația de calcul, se va pleca de la elementele ce au fost utilizate în determinarea acestui factor pentru dobândă.

Fiind vorba de valoarea ce se acumulează în timp prin depuneri în rate egale anuale sau lunare cu valoarea unei unități monetare, am utilizat seria geometrică crescătoare cu termen sub forma $(1 + i)^n$ unde $n = 1, 2, 3, \dots, t$, respectiv:

$$B_t = (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^n$$

Dacă luăm separat fiecare termen, el nu este altceva decât factorul de dobândă compusă și deci B_t este o sumă de factori de dobândă compusă de la $t = 0$ până la $t = n$, deci:

$$B_t = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + \dots + D_n$$

dar stim din relatia(4.1) că $D_{1f} = (1+i) \cdot (1+j)$;

$D_{2f} = (1+i)^2 \cdot (1+j)^2$ si asa mai departe până la

$D_{tf} = (1+i)^n \cdot (1+j)^n$. In acest caz , factorul B_t influentat de factorul de inflatie devine:

$$B_{tf} = (1+i) \cdot (1+j) + (1+i)^2 \cdot (1+j)^2 + \dots + (1+i)^n \cdot (1+j)^n$$

sau, se mai poate scrie pentru a pune în evidentă posibilitatea de substituire si astfel:

$$B_{tf} = [(1+i)(1+j)] + [(1+i)(1+j)]^2 + \dots + [(1+i)(1+j)]^n$$

Facem substitutia $[(1+i)(1+j)] = b$

$$B_{tf} = b + b^2 + \dots + b^n$$

sau:

$$B_{tf} = b \cdot (1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1})$$

Se stie din demonstratiile anterioare că:

$$B_{tf} = b \cdot \frac{b^n - 1}{b - 1}$$

Inlocuindu-l pe b cu valoarea lui si pe $n = t$ avem:

$$B_{tf} = (1+i)(1+j) \cdot \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+i)(1+j) - 1} \quad (4.3)$$

Se observă că dacă facem pe $j = 0$ obținem relatia:

$$B_t = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Relatia de calcul devine:

$$C_{tf} = R_t \cdot (1+i)(1+j) \cdot \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+i)(1+j) - 1} \quad (4.4)$$

Prin această relatie determinăm o valoare fictivă la timpul $n = t$ care ne arată influența inflației la suma cumulată prin depuneri constante și periodice (la începutul fiecărei luni sau an) într-o bancă ce oferă dobânda i și în condiții de inflație " j ".

Dacă depunerea se face la sfârșit de perioadă (sfârșit de lună sau an), relatia devine:

$$C_{tf} = R_t \cdot \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+i)(1+j) - 1} \quad (4.5)$$

Cu aceste relatii putem calcula pierderea pe care o obținem din cauza inflației, ca în exemplul următor:

Să se calculeze care este pierderea relativă și pierderea absolută la depuneri lunare de 100.000 lei, în condiții de inflație $j = 3\%$ și dobânda de 2% . Depunerile se fac la sfârșit de lună timp de un an.

Calculăm valoarea fictivă C_{tf} :

$$C_{tf} = R_t \cdot \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+i)(1+j) - 1}$$

Inlocuind, obținem:

$$C_{tf} = 100.000 \cdot \frac{(1+0,02)^{12} \cdot (1+0,03)^{12} - 1}{(1+0,02)(1+0,03) - 1}$$
$$C_{tf} = 100.000 \cdot \frac{(1,268) \cdot (1,425) - 1}{(1,02)(1,03) - 1} = 100.000 \cdot \frac{1,807 - 1}{1,051 - 1}$$

$$C_{tf} = 100.000 \cdot \frac{0,807}{0,051} = 100.000 \times 15,823$$

$$\underline{C_{tf} = 1.582.300 \text{ lei}}$$

Aceasta este suma care ar echivala în mod echitabil cu suma ratelor lunare pentru un an cu dobânda $i = 2\%$.

Suma ratelor când $j = 0$ se determină cu relația cunoscută:

$$C_t = R_t \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i} = R_t \cdot \frac{(1+0,02)^{12} - 1}{0,02} = R_t \cdot \frac{1,268 - 1}{0,02}$$

$$C_t = 100.000 \cdot \frac{0,268}{0,02} = 100.000 \times 13,4$$

$$\underline{C_t = 1.340.000 \text{ lei}}$$

$P_{df} = C_{tf} - C_t = 1.582.300 - 1.340.000 = 242.300$ lei reprezentând pierderea relativă, iar pierderea absolută:

$$P_{da} = R_t \cdot B_f - \sum_{t=1}^{12} R_t = C_f - \sum_{t=1}^{12} R_t$$

$$\sum_{t=1}^{12} R_t = 100.000 \times 12 = 1.200.000$$

$$C_f = R_t \cdot B_f = 100.000 \cdot \frac{(1+j)^t - 1}{j}$$

$$C_f = 100.000 \cdot \frac{(1+0,03)^{12} - 1}{0,03} = 100.000 \cdot \frac{1,425 - 1}{0,03}$$

$$C_f = 100.000 \cdot \frac{0,425}{0,03} = 100.000 \times 14,166$$

$$\underline{C_f = 1.416.600 \text{ lei}}$$

Pierderea absolută este :

$$P_{da} = 1.416.600 - 1.200.000 = 216.000 \text{ lei}$$

$$\underline{P_{da} = 216.000 \text{ lei}}$$

4.6 FACTORUL DE AMORTIZARE INFLUENTAT DE INFLATIE

Si în acest caz, vom obtine două relatii: una pentru depuneri la sfârșit de perioadă si una pentru depuneri la început de perioadă.

Relatia de calcul a valorii depunerilor la sfârșit de perioadă

Plecăm de la relatia de calcul folosind factorul de acumulare C_{tf} :

$$C_{tf} = R \cdot \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+i)(1+j) - 1}$$

Presupunem că rata R utilizată are o valoare care face ca relatia de mai sus să dea $C_{tf} = 1$. In acest caz, rata aleasă devine un factor si îl notăm cu A_{tf} astfel că înlocuind, avem:

$$1 = A_{tf} \cdot \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+i)(1+j) - 1}$$

De aici, îl scoatem pe A_{tf} care este factorul căutat:

$$A_{tf} = \frac{(1+i)(1+j) - 1}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1} \quad (4.6)$$

Relatia de calcul devine:

$$R_{tf} = C_{tf} \frac{(1+i)(1+j) - 1}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1} \quad (4.7)$$

Cu această relatie determinăm rata medie ce trebuie achitată, compensând si inflatia lună de lună. In cazul în care depunerile se fac la începutul perioadei, relatia de calcul devine:

$$R_{tf} = C_{tf} \cdot \frac{1}{(1+i)(1+j)} \cdot \frac{(1+i)(1+j) - 1}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1} \quad (4.8)$$

4.7 FACTORUL VALORII ACTUALE A UNEI ANUITĂȚI INFLUENTAT DE INFLATIE

Pentru deducerea relatiei de calcul, utilizăm seria geometrică descrescătoare. Stiind că în cazul dobânzii seria avea forma:

$$\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

si aici avem un sir de factori de actualizare V_t .

Pentru deducerea relatiei I_{tf} vom utiliza factorul de actualizare V_{tf} care

are forma $\frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{1}{(1+j)^n}$ unde $n = 1, 2, \dots, t$ deci:

$$I_{t_f} = \frac{1}{(1+i)(1+j)} + \frac{1}{(1+i)^2 \cdot (1+j)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n \cdot (1+j)^n}$$

Ca si la demonstratia precedentă facem substitutia: $\frac{1}{(1+i)(1+j)} = C$
si obtinem:

$$I_{t_f} = C + C^2 + C^3 + \dots + C^n$$

sau:

$$I_{t_f} = C \cdot (1 + C + C^2 + \dots + C^{n-1})$$

Stim suma acestei serii, astfel că putem scrie:

$$I_{t_f} = C \cdot \frac{1 - C^n}{1 - C}$$

Inlocuindu-l pe C obtinem:

$$I_{t_f} = \frac{(1+i)^n \cdot (1+j)^n - 1}{(1+i)^n \cdot (1+j)^n \cdot [(1+i)(1+j) - 1]}$$

unde $n = t$.

Utilizând acest factor, relatia de calcul devine:

$$C_{of} = R \cdot \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t \cdot [(1+i)(1+j) - 1]} \quad (4.9)$$

Această relatie ne ajută să determinăm împrumutul pe care-l putem face în condițiile în care ratele de plată sunt afectate de rata inflației. În mod concret, dacă avem capacitatea financiară de a suporta lunar o rată de 100.000 lei și nu mai mult în condițiile când dobânda $i = 2\%$ și rata inflației este de 3% , ce împrumut putem face la bancă pentru a fi restituit în 12 rate lunare.

$$C_{of} = 100.000 \cdot \frac{(1+0,02)^{12} \cdot (1+0,03)^{12} - 1}{(1+0,02)^{12} \cdot (1+0,03)^{12} \cdot [(1+0,02)(1+0,03) - 1]}$$

$$C_{of} = 100.000 \cdot \frac{(1,268) \cdot (1,425) - 1}{(1,268) \cdot (1,425) \cdot [(1,02)(1,03) - 1]}$$

$$C_{of} = 100.000 \cdot \frac{0,807}{1,807 \times 0,051} = 100.000 \times \frac{0,807}{0,092}$$

$$\underline{C_{of} = 877.173 \text{ lei}}$$

Dacă nu ar exista inflație:

$$C_o = 100.000 \cdot \frac{1,268 - 1}{0,02 \cdot 1,268} = 100.000 \cdot \frac{0,268}{0,025}$$

$$\underline{C_o = 1.072.000 \text{ lei}}$$

Deci în acest caz, față de $\sum_{t=1}^{12} R_t = 1.200.000$ lei, suportăm numai dobândă în valoare de 128.000 lei. Putem spune că pierderile sunt următoarele:

$$P_{d_r} = R - C_{of} = 1.200.000 - 877.173 = 322.827 \text{ lei}$$

reprezentând pierdere relativă.

$$P_{d_a} = R - C_j$$

$$C_j = R \cdot \frac{(1+j)^t - 1}{j \cdot (1+j)^t} = 100.000 \cdot \frac{1,425 - 1}{0,03 \cdot (1,425)}$$

$$C_j = 100.000 \cdot \frac{0,425}{0,427} = 100.000 \times 9,95316$$

$$C_j = 995.316 \text{ lei}$$

$$P_{d_a} = 1.200.000 - 995.316 = 204.684 \text{ lei}$$

$$P_{d_a} = 204.684 \text{ lei}$$

Această valoare de 204.684 lei reprezintă valoarea reală pierdută după un an la suma de bani de 1.200.000 adunată în fiecare lună a câte 100.000 lei. Cantitatea de 204.684 lei ar putea fi de exemplu contravaloarea mărfii în echivalentul de azi pe care o pierdem peste 12 luni la adunarea unui capital de 1.200.000 lei în rate de câte 100.000 lei pe lună, ca urmare a unei rate de inflație de $j = 3\%$.

4.8 FACTORUL DE RECUPERARE A FONDURILOR SUB INFLUENȚA RATEI INFLAȚIEI

Acest factor, în situații de inflație, notat cu F_{t_f} se deduce similar ca și în celelalte două cazuri, prin utilizarea relației de bază, în cazul nostru factorul valorii actuale a unei anuități I_{t_f} . Utilizând același raționament, ajungem la concluzia că:

$$F_{t_f} = \frac{1}{I_{t_f}}$$

deci:

$$F_{t_f} = \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t \cdot [(1+i)(1+j) - 1]}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1} \quad (4.10)$$

și că:

$$R_{t_f} = C_{of} \cdot F_{t_f}$$

Inlocuind, obținem:

$$R_{t_f} = C_{of} \cdot \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t \cdot [(1+i)(1+j) - 1]}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}$$

Prin această relație, determinăm rata lunară sau anuală de plată în condiții de inflație, cunoscând împrumutul C_{of} . Această valoare este o valoare fictivă dar băncile, pentru a nu da faliment, pot condiționa împrumutul de corectarea permanentă a ratelor de plată, funcție de rata inflației.

4.9 ACTUALIZAREA ÎN CONDIȚII DE INFLAȚIE ȘI DE REGRES ECONOMIC

S-a mai arătat că regresul economic este caracteristic oricărei economii fie ea de piață, fie ea centralizată și nu conduce la inflație dacă rata de regres este nesemnificativă.

Dacă se acționează prompt la redresarea economiei pentru a preveni creșterea ratei de regres și mai ales pentru a reînvia economia anulând această rată și asigurând ritmuri pozitive de dezvoltare economică, aceste fenomene pentru majoritatea populației unei țări trec neobservate, dar nu pentru acei agenți economici care întreprind acțiuni de perspectivă și mai ales pentru aceia care folosesc fluctuația valorilor monetare în obținerea de câștiguri suplimentare (sistemul de funcționare al burselor).

Rezultă că este posibil, ca tratarea actualizării unor fluxuri financiare în condițiile în care alături de rata de actualizare folosim și rata de inflație sau rata de regres, să prezinte interes nu numai din punct de vedere teoretic dar și practic.

De altfel, în condiții de inflație suntem nevoiți să actualizăm în mod permanent patrimoniul pe care-l detinem, pentru a-i stabili tot timpul valoarea actuală, funcție de valoarea unității monetare care diferă de la perioadă la perioadă în aceste condiții.

De asemenea, în analizele economice premergătoare calculelor de fezabilitate, raportul venituri actualizate supra costuri actualizate V_a/C_a își schimbă valoarea în condițiile luării în calcul și a ratei de regres de aceea, pentru a trage concluzii corecte, este bine dacă se cunoaște această rată să se ia în seamă. Ca și în cazul actualizării folosind rata de rentabilitate economică ca rată de actualizare, actualizările în condiții de regres economic sau inflație se fac la timpul $t = 0$ sau la timpul de perspectivă $t = n$.

Rata de regres economic sau rata de inflație pentru timpul viitor este o mărime aleatoare fiind mai mult o problemă de prognoză, folosindu-se totuși unele date statistice privind trecutul imediat și ținându-se cont de programele de perspectivă și prognoze economice pentru a putea intui această rată.

4.9.1 Actualizare normală

Actualizarea în condiții de inflație sau de regres economic se face în mai multe condiții, funcție de scopul urmărit astfel:

1. Actualizare la timpul $t = 0$ sau $t = n$ atunci când $i = 0$ și $j \neq 0$
2. Actualizare la timpul $t = 0$ și $t = n$ atunci când $i \neq 0$ și $j \neq 0$
3. Actualizare încrucișată la timpul $t = 0$ și $t = n$

4.9.1.1. Actualizare când $i = 0$ și $j \neq 0$

Această actualizare reprezintă într-un fel expresia matematică prin care putem exprima valoarea unității monetare din timpul de azi în timpul viitor și invers, din timpul viitor în timpul de azi, cunoscându-se în mod precis rata de devalorizare.

Relațiile ce urmează se pretează și la evaluarea în mod corect a valorii patrimoniului, dar în acest caz $t_0 = 0$ este momentul anterior iar $t = n$ este momentul prezent.

Relatiile de calcul nici nu trebuie demonstrate deoarece, luându-se rata de regres sau de inflatie în sensul de crestere numerică a unitătilor monetare, suntem în situatia calculării dobânzii compuse numai că, în loc de i vom folosi notatia j .

Actualizare la timpul $t = 0$ din prima grupă de factori

În această situație ne aflăm atunci când dorim să cunoaștem ce valoare reprezintă azi un leu adus din viitor, respectiv de la timpul $t = n$ în condițiile cunoașterii ratei de regres sau de inflatie " j "

$$V_f = \frac{1}{(1 + j)^t}$$

Cu acest factor de actualizare, calculăm valoarea unui capital din timpul $t = n$ evaluat în unități monetare cu valoarea de azi a unității monetare respectiv $C_{f_{a_0}} = C_n \cdot V_f$ sau $C_{f_{a_0}} = C_n \cdot \frac{1}{(1 + j)^t}$ unde:

$C_{f_{a_0}}$ = capitalul actualizat în condiții de inflatie

C_n = capitalul de la timpul $t = n$

j = rata inflatiei în procente %

Factorul de actualizare $\frac{1}{(1 + j)^t}$ reprezintă valoarea de azi a leului de mâine devalorizat, măsurat în leu de azi.

Toate relațiile utilizate la rata de actualizare în sens de progres economic sunt valabile și în acest caz, doar interpretarea rezultatelor diferă.

Actualizare la $t = n$ din prima grupă de factori

Dacă dorim să exprimăm valoarea unui capital în valoarea unității monetare din timpul $t = n$ cunoscând rata de inflatie, folosim factorul $D_f = (1 + j)^t$ rezultând $C_{f_{n_a}} = C_0 \cdot D_f$ sau $C_{f_{n_a}} = C_0 \cdot (1 + j)^t$ unde:

$C_{f_{n_a}}$ = valoarea capitalului din timpul $t = n$ a cărui valoare la acest timp este echivalentă cu valoarea capitalului C_0 din timpul $t = 0$ dar numeric $C_{f_{n_a}} > C_0$. $C_{f_{n_a}}$ ar mai putea fi de exemplu valoarea unui mijloc fix actualizat din timpul de ieri la timpul de azi. De exemplu, dacă un mijloc fix a costat acum un an 10 milioane, astăzi cu o rată $j = 5\%$ pe lună va costa $10 \text{ mil.} \cdot (1 + 0,05)^{12} = 10 \text{ mil.} \cdot 1,795856$ deci $C_{f_{n_a}} = 17.958.560$ lei.

Cu alte cuvinte, valoarea lui $C_{f_{n_a}}$ este valoarea lui C_0 măsurat în unități monetare cu valoarea din timpul $t = n$.

Actualizare la timpul $t = 0$ folosind relatia din a treia grupă de factori

Cunoscând rata inflatiei sau a regresului economic si intuind realizarea unei investitii într-o anumită perioadă de timp t cheltuind în fiecare unitate de timp capitale egale dar care sunt evaluate la valoarea reală din timpul consumului, atunci putem folosi pentru a exprima în lei de azi, capitalul consumat, relatia $C_{f_{0a}} = R_t \cdot \frac{(1+j)^t - 1}{j(1+j)^t}$ care este similară cu relatia (2.24) unde R_t reprezintă ratele sau capitalul consumat în fiecare unitate de timp la valoarea unității monetare a timpului când s-a consumat. $C_{f_{0a}}$ reprezintă consumul real de capital măsurat în valorile monedei din timpul de azi.

Relatiile (2.25), (2.26) si (2.27) sunt valabile si pentru această categorie de calcul.

Actualizare la timpul $t = n$ folosind relatia din a doua grupă de factori

Dorind să exprimăm în anul $t = n$ suma unui anumit flux de costuri sau venituri periodice care se constituie la valoarea unității monetare din momentul înregistrării, folosim relatia $C_{f_{na}} = R_t \cdot \frac{(1+j) \cdot [(1+j)^t - 1]}{j}$ unde costurile sau veniturile se constituie la sfârșit de perioadă, iar $C_{f_{na}}$ reprezintă suma costurilor (a veniturilor) măsurată în valoarea unității monetare din timpul $t = n$.

Si în acest caz, se mentine valabilitatea relatiilor (2.28) si (2.29), dacă intervalul de calcul are aceleasi caracteristici ca cel ce a stat la baza deducerii acestor relatii.

4.9.1.2 Actualizare când $i \neq 0$ si $j \neq 0$

Această categorie de actualizare este de preferat să se folosească în calculele de fezabilitate, chiar si în conditii de stabilitate relativă, dar din motive de necunoastere a ratei de regres se preferă alegerea unei rate de actualizare acoperitoare. Totusi, starea actuală de inflatie când sensibilizează agentii economici în luarea în seamă a ratei de inflatie si a nu o nesocoti, impune o atentie mai deosebită acestei actualizări.

De aceea, apreciem că prezentarea mai succintă a relatiilor de calcul în aceste conditii nu va reprezenta neapărat niste cugetări teoretice, mai ales că agentii economici de azi privesc cu mai mult interes stabilirea unor conditii de eficiență economică.

Trebuie însă de remarcat, că relatiile de actualizare ce vor urma sunt valabile pentru a analiza din punct de vedere al eficienței economice o investitie sau o întreprindere de natură economică numai dacă $i > j$; pentru $i < j$ nu trebuie să se facă nici un calcul de eficiență deoarece însăși relatia ne spune că suntem într-o situatie de regres si că nu sunt solutii de eficiență în aceste conditii. Pentru $i < j$, asa cum o vedem la actualizarea încrucișată, putem eventual calcula pierderile care în functie de diferenta dintre i si j determină viteza cu care ne îndreptăm spre faliment.

Actualizare la $t = 0$ utilizând relația din prima grupă de factori

În condițiile în care cunoaștem rata de actualizare i și rata de inflație j , ne putem permite să actualizăm fluxurile financiare respectiv venituri și costuri, pentru a analiza din punct de vedere economic gradul de eficiență al unor întreprinderi economice sau al unor investiții.

Pentru actualizarea unei valori constituite într-o singură rată, se folosește factorul V_{t_f} , respectiv relația (4.2) astfel:

$$C_{t_{f_{0a}}} = C_n \cdot V_{t_f}$$

sau:

$$C_{t_{f_{0a}}} = C_n \cdot \frac{1}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t} \quad (4.11)$$

Pentru o valoare constituită la timpul $t_x = x$, relația de mai sus se poate scrie sub forma:

$$C_{t_{f_{0a}}} = C_x \cdot \frac{1}{(1+i)^x \cdot (1+j)^x} \quad (4.12)$$

Actualizarea la $t = n$ utilizând relația din prima grupă de factori

Și aici, constituirea sumei se face într-un singur moment, momentul 0 sau momentul x respectiv de la $t = 0$ sau de la $t = x$.

Actualizarea se face utilizând relația determinată anterior, respectiv relația: $D_{t_f} = (1+i)^t \cdot (1+j)^t$, deci:

$$C_{t_{f_{na}}} = C_x \cdot (1+i)^{t-x} \cdot (1+j)^{t-x} \quad (4.13)$$

Pentru $x = 0$:

$$C_{t_{f_{na}}} = C_0 \cdot (1+i)^t \cdot (1+j)^t \quad (4.14)$$

Actualizarea la $t = 0$ utilizând grupa a treia de factori

Această actualizare se face folosind factorul determinat I_{t_f} și utilizând relația (4.9) când veniturile sau costurile se constituie la intervale de timp egale și la valoarea timpului de constituire. Relația de calcul este:

$$C_{t_{fa_0}} = R_t \cdot \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t \cdot [(1+i) \cdot (1+j) - 1]} \quad (4.15)$$

Dacă depunerea începe la $t = x$, relația de mai sus în virtutea demonstrației relației (2.25) devine:

$$C_{t_{f_{a_0}}} = R_t \cdot \frac{1}{(1+i)^x \cdot (1+j)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} \cdot (1+j)^{t-x} - 1}{(1+i)^{t-x} \cdot (1+j)^{t-x} \cdot [(1+i) \cdot (1+j) - 1]} \quad (4.16)$$

sau cu relatia (2.26):

$$C_{t_{f_{a_0}}} = R_t \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+i)^t (1+j)^t \cdot [(1+i)(1+j) - 1]} \cdot \frac{(1+i)^x \cdot (1+j)^x - 1}{(1+i)^x \cdot (1+j)^x \cdot [(1+i)(1+j) - 1]} \quad (4.17)$$

Actualizare la $t = n$ utilizând grupa a doua de factori

Se pleacă tot de la depuneri sau constituirii constante de valori după perioade egale de timp dar, de această dată efectul sumei ratelor îl citim după n ani.

Această actualizare se face prin relatia (4.5) respectiv:

$$C_{t_{f_{n_a}}} = R_t \cdot \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+i) \cdot (1+j) - 1}$$

Si aici putem avea constituirii de rate de la un anumit moment, respectiv de la $t = x$. Atunci, prin utilizarea demonstratiei relatiei (2.29) se deduce:

$$C_{t_{f_{n_a}}} = R_t \cdot (1+i)^x \cdot (1+j)^x \cdot \frac{(1+i)^{t-x} \cdot (1+j)^{t-x} - 1}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1} \quad (4.18)$$

Înainte de a trece la actualizarea încrucișată, să concretizăm printr-un exemplu cele prezentate până acum la această formă de actualizare.

Folosim în acest scop exemplul nr. 2.8 unde veniturile de 144.000 lei se obțin egale în fiecare an din anul al doilea și până în anul 11 iar cheltuielile de 1.000.000 se vor face în primul an.

Rata de actualizare $i = 12\%$. S-a obținut prin actualizare la această rată $\frac{V_a}{C_a} = 0,81$.

Să verificăm ce ne spune raportul $\frac{V_a}{C_a}$ în condiții de inflație cu $j = 5\%$ pe an, utilizând datele de mai sus și făcând actualizarea la $t = 0$ și la $t = n$.

Actualizând veniturile și costurile la $t = 0$ avem:

$$C_{t_{f_{0_a}}} = C_0 \cdot \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{1}{(1+j)}$$

deoarece numai în primul an avem costuri înregistrate și le aducem de la $t = 1$ la $t = 0$, deci:

$$C_{t_{f_{0_a}}} = 1.000.000 \cdot \frac{1}{(1,12)^1} \cdot \frac{1}{(1,05)^1}$$

$$C_{t_{f_{0_a}}} = 1.000.000 \cdot (0,952381 \times 0,892857)$$

$$C_{t_{f_{0_a}}} = 1.000.000 \times 0,850340 = 850.340$$

$$\underline{C_{tfoa} = 850.340 \text{ lei}}$$

Veniturile decurg din cel de al doilea an, deci utilizăm relația (4.17) unde $t = 11$ și $x = 1$.

$$V_{tfoa} = R_t \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+i)^t (1+j)^t \cdot [(1+i)(1+j) - 1]} - \frac{(1+i)^x \cdot (1+j)^x - 1}{(1+i)^x \cdot (1+j)^x \cdot [(1+i)(1+j) - 1]}$$

$$V_{tfoa} = 144000 \frac{(1,12)^{11} \cdot (1,05)^{11} - 1}{(1,12)^{11} (1,05)^{11} \cdot [(1,12)(1,05) - 1]} - \frac{(1,12) \cdot (1,05) - 1}{(1,12) \cdot 1,05 \cdot [(1,12)(1,05) - 1]}$$

$$V_{tfoa} = 144.000 \cdot \left[\frac{5,949499 - 1}{5,949499 \cdot (1,76 - 1)} - \frac{1,176 - 1}{(1,176)(1,176 - 1)} \right]$$

$$V_{tfoa} = 144.000 \cdot \left[\frac{4,949499}{1,047111} - \frac{0,176}{4,206976} \right]$$

$$V_{tfoa} = 144.000 \cdot (4,726814 - 0,8503407) = 144.000 \times 3,876474$$

$$\underline{V_{tfoa} = 558.212 \text{ lei}}$$

Folosind relația echivalentă:

$$V_{tfoa} = R_t \cdot \frac{1}{(1+i)^x \cdot (1+j)^x} \cdot \frac{(1+i)^{t-x} \cdot (1+j)^{t-x} - 1}{(1+i)^{t-x} \cdot (1+j)^{t-x} \cdot [(1+i) \cdot (1+j) - 1]}$$

trebuie să obținem aceeași valoare.

Din datele problemei $x = 1$ și $t = 11$, deci:

$$V_{tfoa} = 144.000 \frac{1}{(1,12)(1,05)} \cdot \frac{(1,12)^{10} \cdot (1,05)^{10} - 1}{(1,12)^{10} \cdot (1,05)^{10} \cdot [(1,12)(1,05) - 1]}$$

$$V_{tfoa} = 144.000 \cdot \frac{1}{1,176} \cdot \frac{3,105848 \times 1,628895 - 1}{(3,105848 \times 1,628895) \cdot (1,176 - 1)}$$

$$V_{tfoa} = 144.000 \times 0,850340 \cdot \frac{5,059100 - 1}{(5,059100) \cdot (0,176)}$$

$$V_{tfoa} = 144.000 \times 0,850340 \cdot \frac{4,059100}{0,890401}$$

$$V_{tfoa} = 144.000 \times 0,850340 \times 4,558732 = 144.000 \times 3,876472$$

$$\underline{V_{tfoa} = 558.212 \text{ lei}}$$

Trecem la raportul venituri asupra costuri si avem:

$$\frac{V_{t_{foa}}}{C_{t_{foa}}} = \frac{558.212}{850.340} = 0,656$$

Deci:

$$\frac{V_{t_{foa}}}{C_{t_{foa}}} = 0,656$$

Aceasi problemă o actualizăm la $t = n$, astfel avem :

$$C_{t_{fna}} = C_0 \cdot (1 + i)^t \cdot (1 + j)^t \quad \text{unde } t = 11$$

deoarece costurile s-au realizat începând cu primul an si numai în anul 1, având valoarea $C_0 = 1.000.000$ lei.

$$C_{t_{fna}} = 1.000.000 \cdot (1,12)^{11} \cdot (1,05)^{11}$$

$$C_{t_{fna}} = 1.000.000 \cdot (3,478550 \times 1,710339)$$

$$C_{t_{fna}} = 1.000.000 \cdot (5,949499)$$

$$\underline{C_{t_{fna}} = 5.949.499 \text{ lei}}$$

Actualizarea veniturilor:

$$V_{t_{fna}} = R_t \cdot \left[\frac{(1+i)^t (1+j)^t - 1}{(1+i)(1+j) - 1} \cdot \frac{(1+i)^x (1+j)^x - 1}{(1+i)(1+j) - 1} \right]$$

Inlocuind $t = 11$ si $x = 1$, rezultă:

$$V_{t_{fna}} = 144.000 \cdot \left[\frac{(1,12)^{11} (1,05)^{11} - 1}{(1,12)(1,05) - 1} - 1 \right]$$

$$V_{t_{fna}} = 144.000 \cdot \left[\frac{5,949499 - 1}{1,176 - 1} - 1 \right]$$

$$V_{t_{fna}} = 144.000 \cdot \left[\frac{4,949499}{0,176} - 1 \right] = 144.000 \times (28,122153 - 1)$$

$$V_{t_{fna}} = 144.000 \times (27,122153) = 3.905.590$$

$$\underline{V_{t_{f_{n_a}}} = 3.905.590 \text{ lei}}$$

Aceeași valoare trebuie obținută și dacă utilizăm relația:

$$V_{t_{f_{n_a}}} = R_t \cdot (1+i)^x \cdot (1+j)^x \cdot \frac{(1+i)^{t-x} \cdot (1+j)^{t-x} - 1}{(1+i) \cdot (1+j) - 1}$$

Pentru $t = 11$ și $x = 1$ avem:

$$V_{t_{f_{n_a}}} = 144.000 \cdot (1,12) \cdot (1,05) \cdot \frac{(1,12)^{10} \cdot (1,05)^{10} - 1}{(1,12)(1,05) - 1}$$

$$V_{t_{f_{n_a}}} = 144.000 \cdot (1,176) \cdot \frac{4,059100}{0,176}$$

$$V_{t_{f_{n_a}}} = 144.000 \cdot (1,176) \cdot 23,063068 = 144.000 \times 27,122167$$

$$\underline{V_{t_{f_{n_a}}} = 3.905.592 \text{ lei}}$$

Eroarea fiind foarte mică, am obținut aceeași valoare a venitului actualizat. Facem raportul :

$$\frac{V_{t_{f_{n_a}}}}{C_{t_{f_{n_a}}}} = \frac{3.905.590}{5.949.499} = 0,656$$

Încă o dată s-a dovedit că, indiferent la care limită a intervalului se face actualizarea, raportul celor două fluxuri financiare actualizate da aceeași valoare dacă avem fluxuri financiare normale, respectiv cu continuitate pe toată perioada analizată.

Analizând cele două valori $\frac{V_a}{C_a} = 0,81$ în cazul când nu avem

inflație și $\frac{V_{af}}{C_{af}} = 0,655$ când avem inflație, putem spune că, în ambele

cazuri, concluzia este că investiția nu este eficientă dar constatăm că în caz de inflație raportul indică un grad mai mare de neeficiență.

Acest efect al inflației, efect care da un semnal corect privind eficiența sau neeficiența, vine să întregască afirmația că, prin creșterea ratei de actualizare la valori mai mari, se poate compensa efectul ratei de inflație.

Raportul $\frac{V_{t_{f_{n_a}}}}{C_{t_{f_{n_a}}}} < \frac{V_a}{C_a}$, respectiv $0,656 < 0,81$ deoarece în cazul

aplicării factorului de inflație la aceleași fluxuri de venituri și costuri am avut pretenția să ne păstrăm rata propusă de beneficiu și să compensăm și rata inflației.

Situația este similară cu aceea în care, pentru a obține BNA negativ, trebuie să mărim rata de actualizare în condiții de stabilitate sau mai

bine zis, să impunem pretentii mai mari de acumulare, ceea ce micșorează raportul $\frac{V_a}{C_a}$.

Din cele prezentate, rezultă că și actualizarea în condiții de inflație poate constitui un factor important în calculele de fezabilitate, deoarece raportul $\frac{V_a}{C_a}$ ar putea fi mai mare ca 1 în $\frac{V_{t_{fa}}}{C_{t_{fa}}} < 1$ la același flux de valori în condiții de inflație.

4.10 ACTUALIZAREA INCROCISATA

Notiunea de actualizare încrucișată derivă de la faptul că, prin relațiile ce urmează, folosind în opoziție cei doi factori în analiza unor fluxuri financiare, se obține în același timp un factor complex care reprezintă atât actualizare la timpul $t = 0$ cât și actualizare la timpul $t = n$, depinzând de poziția celor doi factori în expresia matematică a relației astfel:

Dacă factorul $(1 + i)^t$ se găsește la numitor sau în determinarea relațiilor mai complexe acest factor se utilizează în seria crescătoare. Spunem că efectuăm actualizarea la timpul $t = n$ prin factorul de dobândă compusă, dar în același timp factorul de inflație utilizat în relație este $\frac{1}{(1 + j)^t}$ putându-se spune că în același timp se face actualizarea și la timpul $t = 0$ prin factorul de actualizare a inflației.

Inversându-se relațiile în cazul expresiei matematice a factorului complex de actualizare, se inversează și timpii de actualizare.

Pentru a putea interpreta mai ușor sensul rezultatelor obținute, atunci când utilizăm factori de dobândă compusă la care asociem și factorii de inflație, se consideră util a mai face următoarele precizări:

Factorul $(1 + i)^t$ și oricare alt factor obținut cu această grupare, exprimă valori reale ale unităților monetare, atât ca valoare cât și ca număr. Leul din timpul $t = 0$ ca valoare este egal cu leul din timpul $t = n$ în condiții de stabilitate, numărul mai mare de unități monetare de la timpul $t = n$ față de timpul $t = 0$ se datorează ratei de rentabilitate.

Factorul $(1 + j)^t$ și oricare alt factor obținut cu această grupare exprimă unități monetare devalorizate a căror valoare de la timpul $t = 0$ nu mai este egală cu cea de la timpul $t = n$ fapt ce, prin această relație, numărul mai mare de unități monetare obținut la timpul $t = n$ se datorează ratei de inflație j care scade valoarea unității monetare.

În primul caz $(1 + i)^0 < (1 + i)^n$ nu numai din punct de vedere a echivalenței valorice, dar și numeric.

În al doilea caz $(1 + j)^0 = (1 + j)^n$ numai din punct de vedere al echivalenței valorice, numeric însă egalitatea nu este valabilă.

Pentru a înțelege mai bine afirmațiile de mai sus, putem spune că ceea ce se poate cumpăra azi la timpul $t = 0$ cu un leu, mâine la timpul $t = n$ același produs cu aceeași valoare de întreținere, îl vom cumpăra cu $(1 + j)^n$ lei deci, leul de la timpul $t = n$ va avea o valoare mai mică de cumpărare decât leul de la timpul $t = 0$ în condiții de inflație căci cu $(1 + j)^0$ pot cumpăra aceeași marfă ca și cu $(1 + j)^n$ deci, valoric ele sunt egale, dar numeric nu.

În baza celor prezentate mai sus, se poate trece la definirea rezultatelor obținute cu aceste grupări utilizate în interacțiune reciprocă dar nu înainte de a menționa că cele două grupări utilizate împreună, dau valori fictive din punct de vedere a unor încasări sau plăți, însă această

valoare fictivă ne indică date despre efectul inflației asupra stării economice. De asemeni, relațiile sub această formă nu se utilizează pentru studii de fezabilitate; cu ajutorul lor putem deduce alți factori și relații complexe în condiții de inflație cum ar fi:

- Factori de atenuare a inflației
- Factori de pauperizare
- Rata reală de rentabilitate în condiții de inflație
- Rata de pauperizare sau rata falimentară

În scopul de a crea baza de înțelegere a sensului pe care-l are gruparea ce asigură actualizarea încrucișată, pornim de la grupările obisnuite.

Cu gruparea $(1+i)^t \cdot (1+j)^t$ obținem o valoare fictivă exprimată în număr de monede (unități monetare) devalorizate, unde devalorizarea este raportată la moneda din timpul $t = 0$. Cu această relație putem calcula capitalul ce ar trebui să-l obținem după timpul $t = n$ pentru a asigura în echivalentul leului de azi compensarea pierderii ca urmare a ratei inflației la o sumă depusă în bancă cu rata de rentabilitate i exprimat în valoarea unității monetare de la timpul $t = n$.

Dacă avem un capital inițial C_0 , asupra căruia acționează, în sensul relației de mai sus, factorul de dobândă i și factorul de inflație j , atunci după $t = n$ ani puterea de cumpărare a capitalului fictiv $C_{t_f} = C_0 \cdot (1+i)^t \cdot (1+j)^t$ va trebui să fie egală cu puterea de cumpărare a capitalului obținut după $t = n$ ani în condiții de stabilitate $C_t = C_0 \cdot (1+i)^t$.

Cifra obținută în relația $C_{t_f} = C_0 \cdot (1+i)^t \cdot (1+j)^t$ reprezintă numărul de unități monetare devalorizate, care sunt în valori mai mici decât unitățile monetare de la timpul $t = 0$ iar cifra obținută cu relația $C_t = C_0 \cdot (1+i)^t$ ne dă numărul real de unități monetare obținute după $t = n$ ani cu dobânda i la valoarea unității monetare de la timpul $t = 0$.

În aceste condiții, numeric $C_{t_f} > C_t$ dar valoric ele sunt egale.

Gruparea $\frac{1}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t}$ reprezintă valoarea de azi, respectiv de la timpul $t = 0$ nedevalorizată, care poate genera 1 (un) leu devalorizat după t ani, dacă i se aplică o rată de rentabilitate i și o rată de inflație j . Cu acest factor putem determina dacă stim capitalul C_{t_f} de la timpul $t = n$, a cărui valoare se măsoară în unități devalorizate din timpul $t = n$, capitalul C_0 astfel: $C_0 = C_{t_f} \cdot \frac{1}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t}$ unde C_0 este capitalul nedevalorizat, măsurat în monede cu valoarea din timpul $t = 0$ care a fost constituit inițial și care în condiții de inflație aplicându-i-se o rată de rentabilitate i , produce în t ani capitalul C_{t_f} .

În condițiile actualizării încrucișate se utilizează grupările $\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t}$ și $\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t}$ unde $\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t}$ reprezintă în condiții de aplicare a ratei de rentabilitate și în condiții de inflație valoarea fictivă ce se obține după timpul $t = n$ a unui leu măsurat cu valoarea din timpul $t = 0$.

Dacă inițial avem un capital C_0 , după $t = n$ ani, $C_t = C_0 \cdot (1+i)^t$ valoarea $C_0 \cdot (1+i)^t$ din timpul $t = n$ este constituită în lei devalorizați măsurată cu lei din timpul $t = n$ deoarece în condiții de devalorizare nu-și păstrează puterea de cumpărare. Pentru a exprima

capitalul C_t în valoarea leului de azi, respectiv în valoarea leului din timpul $t = 0$ îl actualizăm cu factorul de inflație $\frac{1}{(1+j)^t}$ și obținem o

valoare $C_{t_{fij}} = C_o \cdot \frac{(1+i)^t}{(1+j)^t}$ care reprezintă valoarea capitalului din

timpul $t = n$ măsurat în valoarea leilor din timpul $t = 0$. Factorul $\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t}$ reprezintă în condițiile tratate valoarea fictivă a unui leu de azi măsurat cu valoarea leului din timpul $t = n$.

Cu ajutorul acestei relații, cunoscând capitalul $C_o = C_t \cdot \frac{1}{(1+i)^t}$ se poate calcula ce va reprezenta acest capital măsurat în valoarea leului din timpul $t = n$ ani, în condiții de inflație deci, $C_{ofji} = C_t \cdot \frac{(1+j)^t}{(1+i)^t}$ unde C_{ofji} reprezintă valoarea de azi a capitalului măsurat în lei devalorizați.

4.10.1 Actualizări încrucișate la timpul $t = 0$ pentru factorul de rentabilitate și la $t = n$ pentru factorul de inflație

Să precizăm, că orice factor care determină majorare valorică și pozitivă de capital, determinat prin rata dobânzii, rata de eficiență, rata de rentabilitate sau orice altă rată, având caracter de progres o notăm cu i și deci, noțiunea de rentabilitate din titlul acestei expuneri să-l înțelegem în sensul celor menționate.

Pentru actualizarea la timpul $t = 0$ în sensul celor propuse, trebuie să folosim factorul de actualizare $\frac{1}{(1+i)^t}$ iar în condiții de inflație

acest factor se transformă în $\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t}$.

Presupunem, în caz mai general, că se constituie la timpul $t = x$ un eveniment economic (cheltuială, încasare sau depozitare financiară) și dorim să-l analizăm la timpul $t = 0$. Notăm valoarea acestui eveniment cu C_x , reprezentând o valoare în unități monetare măsurate la valoarea timpului $t = x$ și îl aducem în timpul de azi, notându-l cu C_{ofjia} măsurat în valoarea

monedei devalorizate din timpul $t = x$ deci:

$$C_{ofjia} = C_{tji} \cdot \frac{(1+j)^{t-x}}{(1+i)^{t-x}} \quad (4.19)$$

Dacă timpul inițial este 0, atunci $x = 0$ și $C_{xji} = C_{toj}$, relația devenind:

$$C_{ofjia} = C_{tji} \cdot \frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} \quad (4.20)$$

Din analiza mai atentă a acestui factor de actualizare, constatăm următoarele:

1. Pentru $i = j$ relația nu are sens, deoarece dovedeste că rata de rentabilitate se anulează cu rata de inflație și avem o stare economică latentă.

2. Pentru $i > j$ raportul $\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} < 1$ și dovedeste că putem obține cu o valoare inițială mai mică un avantaj economic peste $t = n$ ani sau luni, situație în care putem vorbi de factorul de atenuare a inflației și rată de profit.

3. Pentru $i < j$ raportul $\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} > 1$. Acest lucru nu este de dorit, deoarece ne spune că la început de perioadă capitalul are o valoare mai mare ca la sfârșit de perioadă, marcându-se fenomene de sărăcire sau pauperizare.

Această stare nesesizată la timp și menținută în timp, conduce la faliment. În aceste condiții, putem vorbi de factorul de pauperizare sau de faliment, sau de rata de pauperizare.

4.11 CALCULUL FACTORULUI DE ATENUARE A INFLAȚIEI, A PROFITULUI ȘI A RATEI REALE DE RENTABILITATE MĂSURAT ÎN VALORI DEVALORIZATE

Acest factor funcționează numai în condițiile în care $i > j$, în celelalte condiții nu-și are sensul, deoarece în cazul $i < j$ oricare ar fi i și j , nu există posibilitate de supraviețuire economică, iar raportul dintre cele două valori determină doar viteza cu care ne îndreptăm spre faliment.

Rămâne pentru determinarea factorului de atenuare a inflației să utilizăm gruparea $\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} < 1$.

Pentru determinarea acestui factor, plecăm de la dorința de a găsi o relație cu ajutorul căreia să putem determina care este valoarea suplimentară în cadrul capitalului actualizat, determinat de rata dobânzii în condiții de inflație, măsurat în valorile din timpul $t = n$. Pentru aceasta, presupunem că acționează numai rata de inflație j , atunci $C_f = C_0 \cdot (1+j)^t$ reprezentând valoarea numerică a unui capital din timpul $t = n$.

Deoarece noi analizăm capitalul în condiții de rentabilitate economică, trebuie să determinăm și în aceste condiții valoarea fictivă a capitalului de la timpul $t = n$ și măsurat în unități devalorizate. Această valoare este tocmai C_{t_f} pentru care se folosește relația (4.14) de actualizare la timpul $t = n$ respectiv:

$$C_{t_f} = C_0 \cdot (1+i)^t \cdot (1+j)^t$$

Acum avem la dispoziție două mărimi, una C_f care reprezintă capitalul de azi măsurat în monede devalorizate și C_{t_f} reprezentând capitalul din timpul $t = n$ măsurat în monede devalorizate.

Aceste mărimi măsurate în aceeași unitate de măsură se pretează la orice relație matematică din cele patru operațiuni de bază, rezultatul obținându-se în aceeași unitate de măsură.

Este evident că $C_{t_f} > C_f$ și atunci, diferența pozitivă dintre C_{t_f} și C_f va reprezenta numărul de unități monetare în valoare devalorizată (valoarea unității monetare din timpul $t = n$) care constituie beneficiu sau profitul fictiv.

Scriem relatia:

$$C_0 \cdot (1+i)^t \cdot (1+j)^t - C_0 \cdot (1+j)^t = P_{rf_t} \quad (4.21)$$

P_{rf_t} reprezintă profitul fictiv la timpul $t = n$ și se exprimă în monede devalorizate.

Pentru a citi profitul obținut la timpul $t = 0$ în condiții de inflație, păstrând ca unitate de măsură moneda devalorizată din timpul $t = n$. Actualizăm relația cu factorul de actualizare $\frac{1}{(1+i)^t}$ și obținem:

$$C_0 \cdot (1+j)^t - C_0 \cdot \frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} = P_{f_0} \quad (4.22)$$

În acest caz, P_{f_0} este valoarea profitului actualizat la ziua de azi, măsurat în unități monetare din timpul $t = n$:

$$P_{f_0} = C_0 \cdot \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - (1+j)^t}{(1+i)^t} = C_0 \cdot \frac{(1+j)^t \cdot [(1+i)^t - 1]}{(1+i)^t}$$

Notăm cu F_{AT} factorul de atenuare al inflației și deci rezultă:

$$F_{AT} = \frac{(1+j)^t \cdot [(1+i)^t - 1]}{(1+i)^t} \quad (4.23)$$

iar valoarea profitului actualizată la timpul $t = 0$ măsurată în unități devalorizate este:

$$P_{f_0} = C_0 \cdot \frac{(1+j)^t \cdot [(1+i)^t - 1]}{(1+i)^t} \quad (4.24)$$

unde:

P_{f_0} = profit actualizat la timpul $t = 0$ măsurat în monede devalorizate.

Se observă că dacă actualizăm și prin factorul de inflație, relația de mai sus devine:

$$P_0 = C_0 \cdot \frac{(1+j)^t \cdot [(1+i)^t - 1]}{(1+i)^t \cdot (1+j)^t} = C_0 \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t}$$

$$P_0 = C_0 \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t} \quad (4.25)$$

reprezentând profitul real actualizat la $t = 0$ în condiții de stabilitate ceea ce este similar cu situația $j = 0$.

Relația $\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t}$ poartă numele de factor real de profit și îl notăm cu:

$$F_{P_0} = \frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t} \quad (4.26)$$

4.12 FACTOR DE PAUPERIZARE SAU FACTOR DE FALIMENTARE

Nu întotdeauna această situație reprezintă un dezastru economic (care desigur este nedorit și răplăcut) dacă sesizându-se din timp tendința de micșorare a ratei reale de rentabilitate, se pregătesc soluții ca și după ce nu mai există rata de profit ci numai rata de regres, să se poată într-un timp scurt returna sensul acestei rate.

Plecând de la această introducere optimistă, să analizăm fenomenul economic în situația generatoare de aceste stări economice, respectiv

atunci când raportul $\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} > 1$ sau $i < j$.

4.12.1 Determinarea factorului de pauperizare

Pentru a determina acest factor, analizăm fenomenul economic la sfârșit de perioadă, respectiv la $t = n$ unde, în condiții de inflație, capitalul de la sfârșitul intervalului, respectiv la $t = n$ va fi mai mic decât capitalul inițial în condițiile $i < j$ măsurat în unități monetare de la timpul $t = 0$.

La timpul $t = 0$ capitalul inițial este C_0 iar la sfârșitul

intervalului capitalul final va fi $C_{t_{ij}} = C_0 \cdot \frac{(1+i)^t}{(1+j)^t}$.

Pierderea reală măsurată în valorile unităților monetare echivalent cu cele de la timpul $t = 0$ va fi:

$$P_{d_0} = C_0 - C_0 \cdot \frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} = C_0 \cdot \left(1 - \frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} \right)$$

deci:

$$P_{d_0} = C_0 \cdot \frac{(1+j)^t - (1+i)^t}{(1+j)^t} \quad (4.27)$$

iar factorul din paranteză se numește factor de pauperizare exprimat în unități monetare de la timpul $t = 0$, notat P_{d_0} deci:

$$P_{d_0} = \frac{(1+j)^t - (1+i)^t}{(1+j)^t} \quad (4.28)$$

care reprezintă valoarea ce se pierde dintr-un leu măsurat în unități monetare nedevalorizate ca urmare a inflației în condițiile în care $i < j$.

Dacă dorim acum să exprimăm pierderea și factorul de pauperizare sau factorul falimentar în unități monetare devalorizate, înmulțim relația (4.27) și relația (4.28) cu $(1+j)^t$ și obținem:

$$P_{d_n} = C_0 \cdot \left((1+j)^t - (1+i)^t \right) \quad (4.29)$$

care reprezintă pierderea totală din capital după timpul $t = n$ ca urmare a inflației în condițiile $i < j$ măsurată în unități monetare devalorizate, iar:

$$f_{p_n} = (1+j)^t - (1+i)^t \quad (4.30)$$

reprezintă factorul de pauperizare în condiții de inflație când $i < j$ reprezentând valoarea dintr-un leu ce se pierde, măsurat în unități monetare devalorizate.

Dacă în relațiile de mai sus se face $j = 0$ se obține în ambele cazuri $P_d = C_0 \cdot [1 - (1+i)^t]$ și $f_p = [1 - (1+i)^t]$ ceea ce înseamnă că obținem pierdere negativă și care devine în mod normal profit. Deci reținem că o pierdere negativă devine profit și un profit negativ devine pierdere.

4.13 RATA REALA DE RENTABILITATE IN CONDITII DE INFLATIE

Din cele prezentate, am putut deduce că inflatia are efect de micșorare a profitului și că, în condițiile în care $i > j$ și raportul $\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} > 1$ putem vorbi de progres și că acest progres este dat de o anumită rată de rentabilitate pe care o notăm cu i_r și care este mai mică decât i deci, $i_r < i$.

Pentru a determina această rată reală de rentabilitate în caz de inflație, plecăm de la faptul că se cunoaște raportul $\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t}$ și că acest raport este mai mare ca 1. Să notăm valoarea acestui raport cu p deci:

$$\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} = p \quad (4.31)$$

Punem acum condiția ca să găsim un i_r astfel încât $(1+i_r)^t = p$. Cu ajutorul tabelelor și utilizând relațiile de interpolare se determină ușor i_r .

4.14 RATA DE PAUPERIZARE SAU DE FALIMENTARE

Numai în condiții de inflație se manifestă o asemenea rată, dar este adevărat că pe termen scurt, deoarece finalul este falimentul dacă nu se intervine pentru redresarea economică.

Această rată apare atunci când $i < j$ și raportul $\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} > 1$.

Notăm valoarea acestui raport cu g , respectiv:

$$\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} = g \quad (4.32)$$

și căutăm un i_g astfel încât să satisfacă relația $(1+i_g)^t = g$.

Tot cu ajutorul tabelelor și cu relațiile de interpolare se determină și această rată de regres economic, care generează dobândă negativă.

4.14.1 Actualizări încrucișate la timpul $t = n$ pentru factorul de rentabilitate și la $t = 0$ pentru factorul de inflație

Asa cum s-a mai arătat, factorul $\frac{1}{(1+i)^t}$ care actualizează factorul $(1+j)^t$ formând gruparea $\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t}$ ne ajută să citim efectul inflației la un capital asupra căruia acționează rata de rentabilitate la timpul $t = 0$

măsurat în moneda devalorizată de la timpul $t = n$. Dorind acum să facem actualizare la timpul $t = 0$ citit în monede nevalorizate de la timpul $t = 0$, folosim factorul de actualizare prin inflație $\frac{1}{(1+j)^t}$ asupra factorului

de rentabilitate $(1+i)^t$ rezultând raportul $\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t}$.

La fel ca și la actualizarea anterioară, avem cele 3 posibilități :

1. Pentru $i = j$ orice relație are valoarea 1, marcând o activitate economică latentă cu consumuri și încasări ce se compensează, fără să se producă pierdere sau profit;

2. Pentru $i > j$ rezultă $\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} > 1$ caz în care avem profit și rata reală de rentabilitate, relație care generează un factor de atenuare citit în monede nevalorizate la timpul $t = n$.

3. Pentru $i < j$, raportul $\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} < 1$ caz în care avem pierderi, putând determina factorul de pauperizare sau de faliment.

4.15 CALCULUL FACTORULUI DE ATENUARE A INFLATIEI, A PROFITULUI SI A RATEI REALE DE RENTABILITATE MASURATE IN VALORI NEDEVALORIZATE LA TIMPUL $t = n$

4.15.1 Factorul de atenuare

Pentru a demonstra relația de calcul a acestui factor în condițiile acestei actualizări, folosim următorul raționament:

Dacă nu ar exista inflație, relația de determinare a profitului ar fi:

$$P_r = C_0 \cdot (1+i)^t - C_0 \quad (4.33)$$

relație ce se poate obține și făcând în relația (4.21) pe $j = 0$.

Deci valoarea profitului P judecat în condiții de inflație va deveni P_{f_n} la timpul $t = n$ unde $P_{r_{f_n}} > P_r$ datorită inflației.

Rezultă că $C_0 \cdot (1+i)^t$ va avea valoarea timpului $t = n$ la fel ca și C_0 care analizat în acest timp va avea valoarea unității monetare din timpul $t = n$. Numeric $C_0 \cdot (1+i)^t$, socotit în unități monetare de azi, va fi mai mic decât $C_0 \cdot (1+i)^t$ socotit în unități monetare de la timpul $t = n$, și care numeric devine $C_0 \cdot (1+i)^t \cdot (1+j)^t$. Pentru a analiza această relație la timpul $t = n$ dar cu valoarea leului din timpul $t = 0$, actualizăm relația cu $\frac{1}{(1+j)^t}$ deci,

$$P_{r_{f_n}} = \left[C_0 \cdot (1+i)^t \cdot (1+j)^t - C_0 \right] \cdot \frac{1}{(1+j)^t} = C_0 \cdot \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+j)^t}$$

$$P_{r_{f_n}} = C_0 \cdot \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+j)^t} \quad (4.34)$$

unde $P_{r_{f_n}}$ reprezintă profitul din timpul $t = n$ măsurat în unități monetare din timpul $t = 0$.

Este interesant de observat că în condițiile în care $j = 0$,
 $P_0 = \frac{1}{(1+i)^t} \cdot P_n$ și că $P_n = P_0 \cdot (1+i)^t$ ceea ce justifică

corectitudinea relațiilor căci într-adevăr $P_{r0} = C_0 \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{(1+j)^t}$ măsoară
 profitul în condiții de stabilitate la timpul $t = 0$ și
 $P_n = C_0 \cdot [(1+i)^t - 1]$ măsoară profitul în condiții de stabilitate la
 timpul $t = n$.

Factorul $\frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+j)^t}$ poartă numele de factor de atenuare al
 inflației care ajută la determinarea profitului obținut în aceste condiții,
 măsurat la timpul $t = n$ cu valoarea monedei din timpul $t = 0$ deci:

$$F_{tij} = \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+j)^t} \quad (4.35)$$

În această relație făcând pe $j = 0$ obținem:

$$F_{p_n} = (1+i)^t - 1 \quad (4.36)$$

care poartă numele de factor real de profit în condiții de stabilitate.

Cu ajutorul raportului $\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} > 1$ și $\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} = P$ se poate
 determina rata reală de profit în condiții de inflație. Factorul de
 pauperizare în acest caz, este identic cu cel dat de relația (4.28) și
 (4.30).

4.16 ACTUALIZAREA INCRUCISATA PENTRU FLUXURI CONSTANTE ANUALE DE CAPITAL

4.16.1 Actualizare la $t = 0$

În această condiție, se pretează factorul valorii anuale a unei
 anuități I_t care are relația $I_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i \cdot (1+i)}$ și care s-a determinat
 utilizând progresia geometrică descrescătoare, respectiv:

$$I_t = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Dacă fiecare factor îl actualizăm la timpul $t = n$ cu ajutorul
 factorului de dobândă $(1+j)^t$ unde $t = 1, 2, 3, \dots, n$, atunci vom obține un
 factor complex notat cu I_{tj_i} care va exprima factorul în monede

devalorizate. Mărimea acestui factor va fi dat de suma termenilor actualizati în condițiile precizate deci:

$$I_{tji} = \frac{(1+j)}{(1+i)} + \frac{(1+j)^2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{(1+j)^n}{(1+i)^n}$$

Notăm cu Z raportul $\frac{(1+j)}{(1+i)}$ și obținem :

$$I_{tji} = Z + Z^2 + \dots + Z^n$$

$$I_{tji} = Z \cdot (1 + Z^2 + \dots + Z^{n-1})$$

Știm că suma termenilor din paranteză reprezintă $\frac{1 - Z^n}{1 - Z}$ deci:

$$I_{tji} = Z \cdot \frac{1 - Z^n}{1 - Z}$$

Inlocuind , avem :

$$I_{tji} = \frac{(1+j)}{(1+i)} \cdot \frac{1 - \frac{(1+j)^n}{(1+i)^n}}{1 - \frac{(1+j)}{(1+i)}}$$

$$I_{tji} = \frac{(1+j)}{(1+i)} \cdot \frac{\frac{(1+i)^t - (1+j)^t}{(1+i)^t}}{\frac{(1+i) - (1+j)}{(1+i)}} = \frac{(1+j)}{(1+i)^t} \cdot \frac{[(1+i)^t - (1+j)^t]}{[(1+i) - (1+j)]}$$

$$I_{tji} = \frac{(1+j)}{(1+i)^t} \cdot \frac{[(1+i)^t - (1+j)^t]}{[(1+i) - (1+j)]} \quad (4.37)$$

$$C_{ofa} = R_t \cdot \frac{(1+j)}{(1+i)^t} \cdot \frac{[(1+i)^t - (1+j)^t]}{[(1+i) - (1+j)]} \quad (4.38)$$

Cu relația (4.38) se determină în valoarea monedei devalorizate capitalul inițial care se achită cu rata R_t la valoarea unității monetare din anul când se achită.

4.16.2 Actualizare la $t = n$

Factorul care se pretează la acest gen de actualizare, este factorul de compunere pentru un an B_t respectiv:

$$B_t = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

Acest factor s-a dedus cu ajutorul progresiei geometrice crescătoare, respectiv:

$$B_t = 1 + (1+i)^1 + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^n$$

Făcând actualizarea fiecărui termen cu $\frac{1}{(1+j)^t}$ unde $t = 1, 2, 3, \dots, n$, exprimăm în caz de inflație valoarea acestui factor în valoarea unității monetare de la timpul $t = 0$.

Notăm noul factor cu $B_{t_{ij}}$ deci:

$$B_{t_{ij}} = 1 + \frac{(1+i)}{(1+j)} + \frac{(1+i)^2}{(1+j)^2} + \dots + \frac{(1+i)^n}{(1+j)^n}$$

Facem substitutia $\frac{(1+i)}{(1+j)} = m$, rezultând:

$$B_{t_{ij}} = 1 + m + m^2 + \dots + m^n$$

și stim că această sumă este egală cu $\frac{1-m^{n+1}}{1-m}$ deci:

$$B_{t_{ij}} = \frac{1-m^{n+1}}{1-m} = \frac{1 - \frac{(1+i)^{n+1}}{(1+j)^{n+1}}}{1 - \frac{(1+i)}{(1+j)}}$$

$$B_{t_{ij}} = \frac{\frac{(1+j)^{n+1} - (1+i)^{n+1}}{(1+j)^{n+1}}}{\frac{(1+j) - (1+i)}{(1+j)}} = \frac{(1+j) \cdot [(1+j)^{n+1} - (1+i)^{n+1}]}{(1+j)^{n+1} \cdot [(1+j) - (1+i)]}$$

$$B_{t_{ij}} = \frac{(1+j) \cdot [(1+j)^t - (1+i)^t]}{(1+j)^t \cdot [(1+j) - (1+i)]} \quad (4.39)$$

$$C_{t_{fa}} = R_t \cdot \frac{(1+j) \cdot [(1+j)^t - (1+i)^t]}{(1+j)^t \cdot [(1+j) - (1+i)]} \quad (4.40)$$

Relatia (4.37) ne ajută să calculăm valoarea capitalului măsurat în unități monetare devalorizate, care se pot obține peste $t = n$ ani dacă în fiecare an depunem câte o sumă constantă R_t cu valoarea devalorizată din

anul respectiv. Actualizarea încrucișată a generat câteva notiuni mai puțin obișnuite sub această formă de exprimare și de determinare.

Pentru a veni în sprijinul unei înțelegeri mai ușoare a sensului acestor relații, vom urmări mărimile valorice pe care le generează un capital trecut prin diverse condiții. Stabilim de la bun început un capital inițial $C_0 = 10.000$ lei pentru situația unei singure constituiri la început de perioadă. Analizăm o perioadă de 10 luni deci $t = 10$.

Alegem o rată de rentabilitate i de 5 % pe lună și o rată de inflație j de 3 % pe lună, și invers, o rată de inflație j de 5 % și o rată de rentabilitate i de 3 %.

Presupunem că avem următoarele situații :

1. $i = 5 \%$ și $j = 3 \%$ deci $i \neq 0$ și $j \neq 0$
2. $i = 5 \%$ și $j = 5 \%$ deci $i = j$, activitate fără profit
3. $i = 5 \%$ și $j = 0 \%$ nu avem inflație
4. $i = 0 \%$ și $j = 3 \%$ depozit financiar în condiții de inflație
5. $i = 3 \%$ și $j = 5 \%$ situație falimentară

a) Considerând capitalul inițial $C_0 = 10.000$ lei care este investit într-o afacere sau depus ca acțiuni cu o rată de rentabilitate $i = 5 \%$ pe lună, să se calculeze valoarea capitalului ce se poate obține, aplicând dobânda compusă după 10 luni:

$$C_t = C_0 \cdot (1 + i)^t$$

Inlocuind avem :

$$C_t = 10.000 \cdot (1 + 0,05)^{10} = 10.000 \cdot (1,05)^{10} = 10.000 \cdot (1,628895)$$

$C_t = 16.288$ lei reprezentând valoarea reală a capitalului obținut în condiții de stabilitate.

b) Determinarea beneficiului sau a profitului în condițiile punctului "a": $P_{O_r} = C_0 \cdot [(1 + i)^t - 1]$ când $j = 0$. Deci:

$$P_{O_r} = 10.000 \cdot (1,628891 - 1) = 10.000 \cdot (0,628891)$$

$P_{O_r} = 6288$ lei reprezentând valoarea reală a profitului după t ani în condiții de stabilitate.

c) Determinarea valorii capitalului C_0 după 10 luni, afectat de rata de inflație cu $j = 3 \%$ pe lună în condiții de capital depozitat cu $i = 0$:

$$C_{t_{f_j}} = C_0 \cdot (1 + j)^t$$

$$C_{t_{f_j}} = 10.000 \cdot (1 + 0,03)^{10} = 10.000 \cdot (1,343916)$$

$$C_{t_{f_j}} = \underline{\underline{13.439 \text{ lei}}}$$

Aici $C_{t_{fj}}$ reprezintă valoarea capitalului fictiv de mâine care ar compensa ca putere de cumpărare capitalul C_0 de azi. Valoarea de 13.439 reprezintă o valoare fictivă echivalând valoarea de cumpărare a capitalului de 10.000 lei de azi după 10 luni când valoarea unui leu devine $\frac{1}{(1+j)^{10}}$.

Putem spune că 10.000 lei măsurați în valorile leilor de azi reprezintă peste 10 luni cu rată de inflație $j = 3\%$ pe lună 13.439 lei, dar măsurați în lei devalorizați din timpul respectiv.

d) Determinarea valorii capitalului C_0 în unități devalorizate obținute în condiții de inflație cu rată $j = 3\%$ după 10 luni:

$$C_{t_{j_0}} = C_0 \cdot \frac{1}{(1+j)^t}$$

$$C_{t_{j_0}} = 10.000 \cdot \frac{1}{(1+0,03)^{10}} = 10.000 \cdot (0,744094)$$

$$C_{t_{j_0}} = 7440 \text{ lei}$$

Aici $C_{t_{j_0}}$ reprezintă puterea de cumpărare a capitalului C_0 după 10 luni în condiții de inflație cu rată $j = 3\%$ pe lună măsurate în lei de azi.

Se mai poate spune că 7.440 lei reprezintă capitalul din timpul $t = 0$ (de azi) care compensează în echivalent cu 10.000 lei din timpul $t = 10$ luni (după 10 luni de inflație).

e) Neasigurând capitalul cu o rată de rentabilitate, deci $i = 0$, să se calculeze pierderea pe care o avem după 10 luni.

Folosim factorul de atenuare a inflației pentru $i = 0$, adică relația (4.35):

$$F_{t_{ij}} = \frac{(1+i)^t \cdot (1+j)^t - 1}{(1+j)^t}$$

Făcând pe $i = 0$, obținem factorul de pauperizare:

$$f_{dj} = \frac{(1+j)^t - 1}{(1+j)^t}$$

și:

$$P_{dj} = C_0 \cdot \frac{(1+j)^t - 1}{(1+j)^t}$$

unde P_{dj} reprezintă pierderea în condiții de inflație a unui capital asupra căruia nu acționează rata de profit.

$$P_{dj} = C_0 \cdot \frac{(1+0,03)^{10} - 1}{(1+0,03)^{10}} = C_0 \cdot \frac{1,343916 - 1}{1,343916}$$

$$P_{dj} = 10.000 \cdot \frac{0,343916}{1,343916} = 10.000 \times 0,255905$$

$$P_{dj} = 2559 \text{ lei}$$

Suma de 2559 lei reprezintă valoarea pierderilor prin păstrarea fără a fi investit capitalul de 10.000 lei timp de 10 luni cu $j = 3\%$ inflație.

Desigur că, numeric, 10.000 lei păstrați timp de 10 luni rămân tot 10.000 lei numai că, datorită inflației nu au aceeași valoare de întrebuințare, pierdându-se echivalent de marfă în valoare de 2559 lei. Se constată că:

$$C_{tj_0} + P_{dj} = 7440 + 2559 = 10.000 \text{ lei}$$

f) Să se determine după 10 luni capitalul fictiv în condițiile $i = 5\%$ și $j = 3\%$ pornind de la capitalul inițial, $C_0 = 10.000$ lei. Utilizăm relația (4.14):

$$C_{tf} = C_0 \cdot (1+i)^t \cdot (1+j)^t = 10.000 \cdot (1,05)^{10} \cdot (1,03)^{10}$$

$$C_{tf} = 10.000 \cdot (1,628891) \cdot (1,343916)$$

$$C_{tf} = 10.000 \times 2,189092 = 21.890 \text{ lei}$$

Termenul C_{tf} reprezintă capitalul dus la timpul $t = n$, exprimând valoarea actualizată la acest timp, în condiții de inflație și sub influența ratei de rentabilitate i .

Valoarea de 21.890 lei este o valoare fictivă exprimată în unități monetare devalorizate de la timpul $t = n$ și sugerează echivalentul valoric la acest timp a aceluiași capital inițial de 10.000 lei obținut după 10 luni cu dobânda de 5%.

Cu 21.890 lei după 10 luni în condiții de inflație cu $i = 5\%$ și $j = 3\%$ ar trebui să putem cumpăra mărfuri echivalente cu mărfurile cumpărate cu 16.288 lei, valoare determinată la punctul "a" în condiții de stabilitate.

g) Determinarea profitului fictiv P_{fn} măsurat în unități devalorizate.

Profitul este diferența dintre capitalul obținut la sfârșitul perioadei și cel de la începutul perioadei măsurate în unități monetare de la timpul $t = 10$ luni. Utilizăm relațiile (4.14) și relația (4.20):

$$C_{tf} = C_0 \cdot (1+i)^t \cdot (1+j)^t$$

adică capitalul fictiv de la sfârșit de perioadă

$$C_{of_{ij}} = C_0 \cdot \frac{(1+j)^t}{(1+i)^t}$$

adică capitalul fictiv de la început de perioadă.

$$P_{rf} = C_{tf} - C_{of_{ji}}$$

$$P_{rf} = C_0 \cdot (1+i)^t \cdot (1+j)^t - C_0 \cdot \frac{(1+j)^t}{(1+i)^t}$$

$$P_{rf} = C_0 \cdot \frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} \cdot [(1+i)^{2t} - 1] \quad (4.41)$$

Inlocuind, avem:

$$P_{rf} = 10.000 \cdot \frac{1,343916}{1,628891} \cdot [2,653298 - 1]$$

$$P_{rf} = 10.000 \cdot (0,825049) \cdot (1,653298) = 10.000 \times 1,364051$$

$$\underline{P_{rf} = 13.640 \text{ lei}}$$

unde P_{rf_n} reprezintă profitul fictiv măsurat în lei devalorizați care anihilează efectul inflației. Acest profit echivalează în unități monetare din timpul $t = n$ valoarea de 6288 lei de la punctul b) măsurată în unități monetare din timpul $t = 0$.

Valoarea de 13.640 reprezintă valoarea fictivă a profitului real după 10 luni în condiții de rentabilitate și inflație.

$$P_{rf_n} = (1 + i)^t \cdot (1 + j)^t \cdot P_{r_0} = (1,05)^{10} \cdot (1,03)^{10} \cdot 6288$$

$$P_{rf_n} = 6288 \times 2,189092 = 13.640 \text{ lei}$$

$$\underline{P_{rf_n} = 13.640 \text{ lei}}$$

h) Să se calculeze profitul P_{rf_0} în condiții de inflație la un capital aflat sub influența ratei de rentabilitate $i = 5\%$ și $j = 3\%$ măsurat în unități monetare devalorizate și actualizat la timpul de azi $t = 0$. Folosim relația (4.33):

$$P_{rf_0} = C_0 \cdot \frac{(1 + j)^t \cdot [(1 + i)^t - 1]}{(1 + i)^t} = C_0 \cdot \frac{(1,03)^{10} \cdot [(1,05)^{10} - 1]}{(1,05)^{10}}$$

$$P_{rf_0} = C_0 \cdot \frac{1,343916 \cdot [1,628891 - 1]}{1,628891} = C_0 \cdot (0,925049) \cdot (0,628891)$$

$$P_{rf_0} = 10.000 \times 0,518865 = 5188 \text{ lei}$$

Factorul $\frac{(1 + j)^t \cdot [(1 + i)^t - 1]}{(1 + i)^t} = F_{AT}$ poartă numele de factor de atenuare a inflației în condiții de rentabilitate cu $i = 5\%$ deci, $F_{AT} = 0,518865$.

Suma de 5188 lei este profitul actualizat la timpul $t = 0$ măsurat în monede devalorizate, iar F_{AT} reprezintă profitul unui leu adus din anul $t = n$ în anul $t = 0$ măsurat în unități monetare din timpul $t = n$.

$$\text{Se observă că } P_{r_0} = \frac{1}{(1 + j)} \cdot P_{rf_0} = \frac{1}{1,343916} \cdot 5188 = 3860 \text{ lei.}$$

Intr-adevăr, dacă dorim să determinăm profitul în condiții de stabilitate, folosim relația (4.26):

$$P_{r_0} = C_0 \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{(1 + i)^t}$$

care se obtine folosind actualizarea prin factorul de inflatie $\frac{1}{(1+j)^t}$ a relatiei (4.24).

$$P_{r_0} = C_0 \cdot \frac{(1,05)^{10} - 1}{(1,05)^{10}} = C_0 \cdot \frac{1,628691 - 1}{1,628691}$$

$$P_{r_0} = 10.000 \cdot \frac{0,628691}{1,628691} = 10.000 \times 0,386080$$

$$\underline{P_{r_0} = 3860 \text{ lei}}$$

Precizăm că P_{r_0} este exprimat în unități monetare nedevalorizate.

Se consideră unitate monetară nedevalorizată, unitatea monetară de la timpul de referință $t = 0$ care poate fi timpul trecut pentru actualizarea patrimoniului sau timpul prezent pentru analize de perspectivă.

Se mai observă că $P_{r_0} = \frac{1}{(1+i)^t} \cdot P_{0r}$; a se vedea punctul "b".

i) Calculul ratei reale de rentabilitate în condiții de $i > j$ și $i = 5\%$ pe lună, iar $j = 0,3\%$.

Folosim raportul $\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} = \psi$ obținem:

$$\frac{(1,05)^{10}}{(1,03)^{10}} = \frac{1,628691}{1,343916} = 1,21206$$

Căutăm acum un i_r care să îndeplinească condiția $(1+i_r)^{10} = 1,21206$. Din tabelele anexate la $t = 10$ găsim:

$$\text{la } i_M = 2\% \quad (1+i_M)^{10} = 1,218994 = \alpha_M \quad \text{și}$$

$$\text{la } i_m = 1,9\% \quad (1+i_m)^{10} = 1,218994 = \alpha_m$$

Prin interpolare avem :

$$i_r = i_m + (i_M - i_m) \cdot \frac{\alpha_m}{\alpha_M + \alpha_m}$$

$$i_r = 1,9 + 0,1 \cdot \frac{1,207096}{1,218994 + 1,207096}$$

$$\underline{i_r = 1,948\%}$$

Cu această rată de rentabilitate obținem valori reale din punct de vedere al echivalentului valoric.

j) Să se exprime valoarea capitalului obținut după 10 luni cu dobânda $i = 5\%$, măsurat în valoarea leilor din timpul $t = 0$.

De data aceasta, avem de-a face cu valoarea echivalentă la timpul $t = n$ respectiv $(1 + i)^t$, dar vrem să exprimăm în valoarea timpului $t = 0$ deoarece la timpul $t = n$ leul are o valoare mai mică, ca urmare a inflației.

$$\text{Aplicăm relația: } C_{t_{ij}} = C_0 \cdot \frac{(1 + i)^t}{(1 + j)^t}$$

$$C_{t_{ij}} = 10.000 \cdot \frac{(1,05)^{10}}{(1,03)^{10}} = 10.000 \times 1,212$$

$C_{t_{ij}} = 12120$ lei care reprezintă capitalul de la timpul $t = n$, măsurat în unități monetare nedevalorate.

Aceeași valoare o obținem și cu relația:

$$C_{t_{ij}} = C_0 \cdot (1 + i_r)^{10} = 10.000 \cdot (1,01948)^{10}$$

$$(1,01948)^{10} = 1,212 \text{ deci,}$$

$$C_{t_{ij}} = 12120 \text{ lei}$$

Valoarea de 12.120 este echivalentul în valoare a capitalului obținut după 10 luni cu rata dobânzii i , măsurat în unitățile de la $t = 0$. Înainte de a trata problema în situația $i < j$ trebuie făcută precizarea că, în această postură, orice calcul este de prisos dacă am ajuns la concluzia că într-adevăr, ne situăm în acest declin.

Singura acțiune salvatoare este în primul rând aceea de a stopa declinul respectiv de a ajunge la $i = j$ și în cel mai scurt timp au raporturi antagoniste între ele.

Calcularea factorilor de pauperizare și a pierderilor, au o importanță practică oarecare, dar le considerăm mai degrabă exerciții teoretice care desigur, împreună cu multe altele din prezenta expunere, au rolul de a sedimenta și a impune o gândire versată în utilizarea factorilor și formulelor, funcție de relațiile compuse de dobândă și inflație.

k) Să se calculeze pierderea actualizată la timpul $t = 0$ atunci când $i = 3\%$ și $j = 5\%$ pentru un capital $C_0 = 10.000$ lei și după $t = 10$ luni.

Se folosește relația:

$$P_{d_0} = C_0 \cdot \frac{(1 + j)^t - (1 + i)^t}{(1 + j)^t}$$

$$P_{d_0} = 10.000 \cdot \frac{(1,05)^{10} - (1,03)^{10}}{(1,05)^{10}} = 10.000 \cdot \frac{1,628891 - 1,343816}{1,628891}$$

$$P_{d_0} = 10.000 \cdot \frac{0,284975}{1,628891} = 10.000 \times 0,174950$$

$$P_{d_0} = 1749 \text{ lei}$$

Valoarea de 1749 lei măsurați în lei nedevalorizați, reprezintă pierderea de capital investit sau depus la o bancă. A nu se confunda cu pierderea de capital ținut în depozit (la ciorap mai popular) caz în care, pierderea este mai mare, exprimată la punctul e) în valoare de 2559 lei.

1) Să se determine rata de regres în condițiile date.

Se utilizează relația:

$$\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} = g \quad \text{respectiv} \quad \frac{(1,05)^{10}}{(1,03)^{10}} = g$$

$$\frac{1,628891}{1,343916} = 1,212$$

Căutăm un J_g care să îndeplinească condiția $(1 + J_g)^{10} = 1,212$ de unde $J_g = 1,948\%$ având sens de regres.

4.17 DOBANDA SI RATA NEGATIVA

În expunerea anterioară, a fost prezentată rata de regres J_g . Această rată apare când $i < j$ respectiv când $i - j < 0$ sau $i - j = N$ unde N reprezintă un număr negativ. În realitate, se întâlnesc asemenea situații și în mod normal ar trebui să existe și o dobândă negativă.

Rata de regres care este de fapt generatoare de dobândă negativă s-a dedus din relația $\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} > 0$ și am impus ca

$C_0 \cdot \frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} = C_0 \cdot (1+J_g)^t$ dar, un leu sau o unitate monetară sub influența ratei dobânzii i devine după timpul t , $(1+i)^t$.

Dacă urmărim să exprimăm valoarea $(1+i)^t$ din timpul t în timpul 0 știind că în perioada 0 ... t rata inflației j a fost mai mare ca rata dobânzii sau rata de rentabilitate i , facem actualizarea cu $\frac{1}{(1+j)^t}$.

În aceste condiții $(1+i)^t$ actualizat la timpul $t = 0$ devine $\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t}$ și exprimă valoarea unui leu nedevalorizat obținut sub influența dobânzii i și a inflației j . Dacă înmulțim această relație cu valoarea capitalului C_0 obținem valoarea capitalului în monede nedevalorizate C_n

deci $C_n = C_0 \cdot \frac{(1+i)^t}{(1+j)^t}$. Se observă că:

$$\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} = \frac{1}{\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t}} \quad \text{dar} \quad \frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} = (1+J_g)^t \quad \text{atunci:}$$

$$\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} = \frac{1}{(1+J_g)^t} \quad \text{si} \quad C_n = C_o \cdot \frac{1}{(1+J_g)^t}$$

Pentru a determina valoarea dobânzii acumulate la un capital C_o pe o durată de timp $0 \dots t$ scădem din capitalul final C_n capitalul initial C_o deci:

$$d_N = C_n - C_o = C_o \cdot \frac{1}{(1+J_g)^t} - C_o$$

$$d_N = C_o \cdot \left[\frac{1}{(1+J_g)^t} - 1 \right] \quad (4.42)$$

Valoarea $\frac{1}{(1+J_g)^t} - 1 = \frac{1 - (1+J_g)^t}{(1+J_g)^t} < 0$ poartă numele de factor de dobândă negativă deoarece este mai mic decât 0 și reprezintă o pierdere din capitalul de 1 leu.

$$D_N = \frac{1 - (1+J_g)^t}{(1+J_g)^t} \quad (4.43)$$

unde :

J_g = rată de regres

D_N = factor de dobândă negativă iar

d_N = din relatia (4.42) poartă numele de dobândă negativă și reprezintă valoarea pierderii din capitalul initial C_o .

Dacă reluăm exemplul anterior și cerem ca la capitalul $C_o = 10000$ lei să calculăm valoarea dobânzii negative d_N în condițiile când $i = 3\%$ și $J = 5\%$ iar $t = 10$ luni, vom obține, folosind relatia (4.42):

$$d_N = C_o \cdot \left[\frac{1}{(1+J_g)^t} - 1 \right] = C_o \cdot \left[\frac{1}{(1+0,01948)^{10}} - 1 \right]$$

$$d_N = 10000 \cdot \left[\frac{1}{1,212} - 1 \right] = -\frac{2120}{1,212} = -1749 \text{ lei}$$

$$\underline{d_N = -1749 \text{ lei}}$$

Această valoare numită dobândă negativă reprezintă o pierdere de capital care a fost obținută la punctul k) al exemplului amintit, folosind relatia (2.27) la determinarea pierderii reale P_{d_o} .

În condițiile în care raportul $\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} < 1$, respectiv $j > i$, putem ajunge la concluzia că avem și rata de dobândă sau rata de rentabilitate negativă.

Pentru a demonstra acest lucru, punem condiția:

$$\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} = (1+J'_g)^t \quad \text{dar} \quad (1+J'_g)^t < 1 \quad \text{relație care este}$$

valabilă numai dacă $J'_g < 0$ și aceasta înseamnă că rata are valoare negativă.

Înlocuind pe J'_g cu semnul corespunzător celor de mai sus, avem:

$$\frac{(1+j)^t}{(1+i)^t} = \frac{1}{(1+J_g)^{10}} = [1 + (-J'_g)]^{10} \quad \text{unde } J_g \neq J'_g$$

Din exemplul de mai sus, dacă se cere ca să determinăm rata negativă în condițiile de inflație $i = 3\%$ și $J = 5\%$ folosim relația:

$$\frac{(1+i)}{(1+J)} = (1+J'_g) \quad \text{sau} \quad \frac{1,03}{1,05} = 1+J_g$$

$$1+J'_g = 0,980952 \quad J'_g = 0,980952 - 1$$

$$J'_g = -0,019048$$

Rata negativă este de $J'_g = -1,9048\%$.

Folosind în calcul rata negativă, să determinăm valoarea dobânzii negative în condițiile problemei de mai înainte. Datele problemei sunt :

- $C_0 = 10.000$ lei
- $J'_g = -1,9048\%$ pe lună
- $J = 5\%$ pe lună
- $i = 3\%$ pe lună
- $t = 10$ luni

Relația de calcul va fi :

$$d_N = C_0 \cdot [(1+J'_g)^{10} - 1]$$

$$d_N = 10.000 \cdot [(1 - 0,019048)^{10} - 1]$$

$$d_N = 10.000 \cdot [(0,980952)^{10} - 1] = 10.000 \cdot (0,825044 - 1)$$

$$d_N = 10.000 \cdot (-0,1749) = -1749$$

$$d_N = -1749$$

Din cele de mai sus, se pot trage următoarele concluzii:

Agentii economici nu pot supraviețui decât în condițiile în care, rata profitului este mai mare decât rata inflației.

Băncile de credit, în schimb, pot supraviețui în condiții de dobândă negativă în situația în care beneficiul obținut din diferența dintre rata dobânzii percepută de bancă de la debitori, este suficient de mare față de rata dobânzii ce se acordă la creditor, respectiv banca acordă o dobândă mai mică la cei ce depun bani în bancă și pretind o dobândă mai mare celor ce împrumută.

În aceste condiții, chiar dacă rata inflației este mai mare decât dobânda pretinsă de bancă, aceasta între anumite limite poate supraviețui.

4.17.1 Rata negativă a inflației

În toate expunerile de până acum, am considerat rata inflației j ca având un rol de creștere numerică în timp a unei unități monetare, creștere care desigur, nu este în concordanță, ci în discordanță cu creșterea valorică a unității monetare.

Urmărind evaluarea unor depozite bănești în diferite momente în comparație cu un moment de referință considerat moment "0" fără să luăm în calcul rata de dobândă sau de rentabilitate respectiv, neinteresându-ne de modul cum s-a creat depozitul financiar (capitalul), apreciem că este mai ușor de interpretat rezultatele calculelor, folosindu-ne de rata negativă de inflație pe care o s-o notăm cu J' .

Pornind de la raționamentul cunoscut la determinarea ratei negative a dobânzii unde $\frac{(1+i)^t}{(1+j)^t} = (1+J'_g)^t$. În această relație făcându-l pe $i =$

0 , J'_g devine J' , rezultând $\frac{1}{(1+J)^t} = (1+J')^t$, dar $J > 0$ atunci

$$\frac{1}{(1+J)^t} < 1 \text{ și } (1+J')^t < 1.$$

Din relația $(1+J')^t < 1$ se observă că J' nu poate avea decât valoare negativă.

Pentru a calcula această valoare plecăm de la relația $\frac{1}{(1+j)} = a$ atunci $(1+J') = a$ cum $(1+J') < 1$ rezultă că $a < 1$ și că $J' = a - 1 < 0$. J' poartă numele de rată negativă de inflație.

Să analizăm modul de utilizare a acestei rate. Apelând din nou la exemplul anterior, să admitem că avem un capital de 10.000 lei și că din momentul $t = 0$ până în momentul analizării capitalului au trecut 10 luni, deci $t = 10$ luni.

În acest timp, rata inflației a fost $J = 5\%$ pe lună. Se cere să se calculeze ce valoare are capitalul de 10.000 lei devalorizat după 10 luni, luând ca etalon valoarea leului din timpul $t = 0$.

Să calculăm rata negativă de inflație:

$$\frac{1}{1+0,05} \cdot (1+J') = 0,952380 \text{ de unde :}$$

$$J' = 0,952380 - 1 = -0,047620$$

$$J' = -0,047620 \text{ deci } J' = \underline{\underline{-4,762\%}}$$

$$C_n = C_0 (1+J')^{10} = C_0 \cdot (1 - 0,047620)^{10} = C_0 \cdot (0,9538)^{10}$$

$$C_n = 10.000 \cdot (0,6231) = 6231$$

$$\underline{C_n = 6231 \text{ lei}}$$

Si în acest exemplu se constată că în valori absolute $J \neq J'$ respectiv $J = 5 \%$, iar $J' = -4,762 \%$.

În fluxurile financiare, rata inflației acționează ca o rată de dobândă negativă și întotdeauna când există produce dobândă negativă. În acest caz, dobânda negativă este:

$$d_N = C_0 \cdot [(1 + J')^t - 1] = 10.000 \cdot [(1 - 0,04762)^{10} - 1]$$

$$d_N = 10.000 \cdot [(0,9538)^{10} - 1] = 10.000 \cdot (-0,3769)$$

$$d_N = 10.000 \cdot (-0,3769) = -3769 \text{ lei}$$

$$\underline{d_N = -3769 \text{ lei}}$$

Pe baza acestor calcule, luând leul de la timpul $t = 0$ ca leu de referință și că timpul $t = 10$ a fost acum 10 luni, putem face următoarea afirmație în condițiile problemei de mai sus:

$$1 \text{ leu} = (1 + J')^{10} = (1 - 0,04762)^{10} = 0,6231$$

respectiv 1 leu = 62,31 bani. Deci, un leu de acum 10 luni valorează azi numai 62,31 bani.

4.17.2 Cursul de schimb al leului

Admitând că în convertirea valutei în lei se face strict pe baza devalorizării leului, relațiile de mai sus se pot utiliza în determinarea cursului valutar ca urmare a influenței ratei de inflație.

Se consideră că inflația acționează numai asupra leului iar unitățile valutare își păstrează valoarea în timp. Factorul de convertire a valutei în lei reprezintă relația $(1 + J)^t$ unde J este rata de inflație a leului.

Pentru această convertire se pleacă de la un curs al leului față de unitatea valutară cunoscut la un moment dat. Acest moment îl socotim moment de referință și îl notăm cu $t = 0$. Presupunem că la $t = 0$ o unitate valutară are valoarea M lei. După t zile, luni sau ani, cu o rată de inflație a leului egală cu $J \%$ pe zi, lună sau an, o unitate valutară (s-o considerăm 1 dolar) va deveni:

$$1 \$ = M \cdot (1 + J)^t \quad (4.44)$$

sau dacă folosim rata negativă de inflație:

$$1 \$ = M \cdot \frac{1}{(1 + J')^t} \quad (4.45)$$

Exemplificând utilizarea acestor relații, plecăm de la faptul că acum 4 luni un dolar (1 \$) valora $M = 530$ lei. Să se calculeze valoarea dolarului de azi, știind că rata de inflație a leului este în această perioadă de $J = 2,5 \%$.

$$1 \$ = M \cdot (1 + J)^t = 530 \cdot (1 + 0,025)^4 = 530 \cdot (1,025)^4$$

$$1 \$ = 530 \cdot (1,10381) = 585,02$$

$$\underline{1 \$ = 585,02 \text{ lei}}$$

Dacă am folosi rata negativă am obține același rezultat. Rata negativă are valoarea:

$$\frac{1}{(1 + J)} = (1 + J') \quad \text{sau} \quad \frac{1}{(1 + 0,025)} = (1 + J')$$

$$(1 + J') = 0,975609$$

$$J' = 0,975609 - 1 = -0,02391$$

deci:

$$\underline{J' = -2,4391 \%}$$

$$1 \$ = M \cdot \frac{1}{(1 + J')^t} = 530 \cdot \frac{1}{(1 - 0,024391)^4}$$

$$1 \$ = 530 \cdot (1,10381) = 585,02 \text{ lei}$$

$$\underline{1 \$ = 585,02 \text{ lei}}$$

În realitate, complexe fenomene economice naționale și mondiale determină ca și unitățile valutare să sufere în timp modificări ale propriei valori atât în sens de regres cât și în sens pozitiv de aceea, la stabilirea cursului de schimb al leului trebuie luată în calcul și această instabilitate.

Putem întâlni două situații :

a) Când unitatea valutară își mărește valoarea față de momentul inițial cu rata ρ , caz în care valoarea inițială M devine $M' = M \cdot (1 + \rho)^t$ iar cursul de schimb al leului devine:

$$1 \$ = M' \cdot (1 + J)^t = M \cdot (1 + \rho)^t \cdot (1 + J)^t$$

$$1 \$ = M \cdot (1 + \rho)^t \cdot (1 + J)^t \quad (4.46)$$

Dacă utilizăm rata negativă a inflației, obținem:

$$1 \$ = M \cdot (1 + \rho)^t \cdot \frac{1}{(1 + J')^t} \quad (4.47)$$

b) Când unitatea valutară își micșorează valoarea cu rata de inflație δ' , sau cu rata negativă a inflației, în acest caz unitatea valutară în lei din timpul $t = 0$, M va deveni $M' = M \cdot \frac{1}{(1 + \delta')^t}$ sau $M' = M \cdot (1 + \delta')^{-t}$.

Cursul de schimb al leului în acest caz devine:

$$\begin{aligned}
 \text{b.1.} \quad 1 \$ &= M' \cdot (1 + J)^t = M \cdot \frac{(1 + J)^t}{(1 + \delta)^t} \\
 1 \$ &= M \cdot \frac{(1 + J)^t}{(1 + \delta)^t} \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b.2.} \quad 1 \$ &= M' \cdot \frac{1}{(1 + J')^t} = M \cdot \frac{1}{(1 + \delta)^t} \cdot \frac{1}{(1 + J')^t} \\
 1 \$ &= M \cdot \frac{1}{(1 + \delta)^t \cdot (1 + J')^t} \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b.3.} \quad 1 \$ &= M' \cdot (1 + J)^t = M \cdot (1 + J)^t \cdot (1 + \delta')^t \\
 1 \$ &= M \cdot (1 + J)^t \cdot (1 + \delta')^t \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b.4.} \quad 1 \$ &= M' \cdot \frac{1}{(1 + J')^t} = M \cdot (1 + \delta')^t \cdot \frac{1}{(1 + J')^t} \\
 1 \$ &= M \cdot \frac{(1 + \delta')^t}{(1 + J')^t} \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

unde:

M = Valoarea unității monetare în lei la timpul $t = 0$

M' = Valoarea reală a unității monetare influențată de rata de creștere a valutei de schimb sau de devalorizare a acesteia la timpul $t = n$.

ρ = rată de creștere a valutei de schimb

δ = rată de devalorizare sau inflație valutară

δ' = rată negativă de devalorizare valutară

Să exemplificăm relațiile de mai sus, urmărind să calculăm schimbul valutar în lei a unui dolar în două variante la timpul $t = 10$ luni.

a) Dolarul crește în valoare cu o rată = 1 % pe lună timp de 10 luni, socotind drept referință dolarul de la timpul $t = 0$ care are valoarea $M = 530$ lei.

Rata de inflație a leului $J = 2,5$ % pe lună iar rata negativă a inflației $J' = -2,4391$ %.

Pentru rezolvare folosim relațiile (4.46) și (4.47). Folosind relația (4.46) avem:

$$1 \quad \$ \quad = \quad M \cdot (1 + \rho)^t \cdot (1 + J)^t \quad = \\
 530 \cdot (1 + 0,01)^{10} \cdot (1 + 0,025)^{10}$$

$$1 \$ = 530 \cdot (1,104622) \cdot (1,280084) = 530 \cdot (1,414008)$$

$$1 \$ = 749,42 \text{ lei}$$

Folosind relația (4.47) avem :

$$1 \text{ \$} = M \cdot (1 + \rho)^t \cdot \frac{1}{(1 + J')^t}$$

$$530 \cdot (1 + 0,01)^{10} \cdot \frac{1}{(1 - 0,024391)^{10}}$$

$$1 \text{ \$} = 530 \cdot (1,104622) \cdot (1,280095) = 530 \cdot (1,414021)$$

$$\underline{1 \text{ \$} = 749,43 \text{ lei}}$$

b) Păstrând restul datelor, presupunem acum că dolarul își micșorează valoarea cu o rată de inflație de $\delta = 1 \%$. Rata negativă de devalorizare a dolarului va fi:

$$\delta' = \frac{1}{(1 + 0,01)} - 1 = (0,990099 - 1)$$

$$\delta' = - 0,0099 \text{ deci:}$$

$$\underline{\delta' = - 0,99 \%}$$

Utilizăm cele patru relații (4.48) , (4.49) , (4.50) și (4.51).

$$\text{Relația (4.49)} \quad 1 \text{ \$} = M \cdot \frac{1}{(1 + \delta)^t \cdot (1 + J')^t}$$

$$1 \text{ \$} = M \cdot \frac{1}{(1 + 0,01)^{10} \cdot (1 - 0,024391)^{10}}$$

$$1 \text{ \$} = 530 \cdot (1,104622) \cdot (1,280084) = 530 \cdot (1,158841)$$

$$\underline{1 \text{ \$} = 614,18 \text{ lei}}$$

$$\text{Relația (4.48)} \quad 1 \text{ \$} = M \cdot \frac{(1 + J)^t}{(1 + \delta)^t} = 530 \cdot \frac{(1 + 0,025)^{10}}{(1 + 0,010)^{10}}$$

$$1 \text{ \$} = 530 \cdot \frac{1,280084}{1,104622} = 530 \cdot (1,158843)$$

$$\underline{1 \text{ \$} = 614,18 \text{ lei}}$$

$$\text{Relația (4.50)} \quad 1 \text{ \$} = M \cdot (1 + J)^t \cdot (1 + \delta')^t$$

$$1 \text{ \$} = 530 \cdot (1 + 0,025)^{10} \cdot (1 - 0,0099)^{10}$$

$$1 \text{ \$} = 530 \cdot (1,280084) \cdot (0,905296) = 530 \cdot (1,158854)$$

$$\underline{1 \text{ \$} = 614,19 \text{ lei}}$$

$$\text{Relatia (4.51)} \quad 1 \$ = M \cdot \frac{(1 + \delta')^t}{(1 + J')^t}$$

$$1 \$ = 530 \cdot \frac{(1 + 0,0099)^{10}}{(1 - 0,024391)^{10}} = 530 \cdot \frac{0,905296}{0,781192}$$

$$1 \$ = 530 \cdot (1,158864) = 614,19$$

$$\underline{1 \$ = 614,19 \text{ lei}}$$

Cea mai dificilă problemă în aceste determinări nu este calculul matematic, ci culegerea datelor informationale ce determină ratele de regres sau de progres, mai ales atunci când aceste calcule vizează o acțiune de perspectivă.

În acțiunea de urmărire a ratelor de devalorizare a unităților monetare sau de creștere, ratele pot avea valoarea "0" pentru o lungă perioadă dar, în momentul producerii saltului de creștere sau de regres trebuie procedat la corecturile cursurilor de schimb. În această situație, indiferent care este durata între două schimburi a valorii monetare, timpul t din relație poate fi egal cu 1, $t = 1$ ca în exemplul următor:

Timp de 4 luni, dolarul își păstrează valoarea față de leu dar, în momentul de față se semnalează scăderea valorii leului, deci se produce un salt în creșterea medie a preturilor de 10 %.

Fără să ne intereseze rata lunară zilnică sau anuală, folosim relația: $1 \$ = M (1 + j)$ unde $M = 530$ lei pe dolar (valoarea dolarului în lei înainte de salt). Deoarece valoarea dolarului a fost de exemplu de 530 lei pe toată perioada de 4 luni, am putea socoti că $t_1 = 4$ și atunci ar

trebui să determinăm rata lunară în relația $(1 + j)^t = (1 + j_1)^4$, unde $t = 1$. Această perioadă este o perioadă de stabilitate egală cu 4 luni pentru care $j = 10$ %.

Făcându-l pe $j = 10$ % și pe $t = 1$ obținem același rezultat ca și determinându-l pe J_1 cu relația de mai sus, respectiv $(1 + J_1)^4 = 1,10$ obținându-se $J_1 = 2,41$ % pe lună. Deci:

$$1 \$ = 530 \cdot (1 + 0,10)^1 = 530 \times 1,10$$

$$\underline{1 \$ = 583 \text{ lei}}$$

De asemenea:

$$1 \$ = 530 \cdot (1 + 0,0241)^4 = 530 \times 1,10$$

$$\underline{1 \$ = 583 \text{ lei}}$$

Desigur că pot fi situații când leul prosperă și unitatea valutară este în dificultate sau prosperă ambele. În această situație relațiile (4.48), (4.49), (4.50) și (4.51) se modifică corespunzător.

CONCLUZII

Intelegând corect sensul acestor relatii tratate în prezenta lucrare, se pot determina cu usurintà multe alte efecte economice, functie de ratele de dezvoltare sau regres.

Prin cele expuse, s-a încercat să se prezinte în mod mai explicit cititorilor, un material care se pare, a scăpat din sfera de preocupare a specialistilor privind popularizarea acestui gen de literatură economică.

Această omisiune presupusă este explicabilă, deoarece în perioada unei economii centralizate și mai ales, în condiții de relații socialiste, plusvaloarea deși existentă în orice sistem economic dezvoltat, a fost considerată ca un indicator caracteristic relațiilor capitaliste și deci, nu s-a bucurat de o atenție deosebită, mai mult, a fost chiar desconsiderată, socotită fiind ca un efect al exploatării.

În condițiile de piață liberă, această plusvaloare constituie elementul principal care hotărăște în majoritatea cazurilor progresul sau regresul economic, deoarece viața a dovedit că plusvaloarea distribuită aproape integral ca protecție socială majorității, conduce la un ritm mai scăzut al dezvoltării tehnico - economice față de situația în care acest surplus este distribuit în baza legii concurenței, condiții în care plusvaloarea produce un efect de cointeresare care are proprietatea de a dinamiza inițiativele valoroase și de a imprima întreprinzătorilor un extraordinar curaj în acțiunile economice de risc.

ANEXA

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	0 %	0,1 %	0,2 %	0,3 %	0.4 %
1	1.000000	1.001000	1.002000	1.003000	1.004000
2	1.000000	1.002001	1.004004	1.006009	1.008016
3	1.000000	1.003003	1.006012	1.009027	1.012048
4	1.000000	1.004006	1.008024	1.012054	1.016096
5	1.000000	1.005010	1.010040	1.015090	1.020161
6	1.000000	1.006015	1.012060	1.018136	1.024241
7	1.000000	1.007021	1.014084	1.021190	1.028338
8	1.000000	1.008028	1.016112	1.024254	1.032452
9	1.000000	1.009036	1.018145	1.027326	1.036581
10	1.000000	1.010045	1.020181	1.030408	1.040728
11	1.000000	1.011055	1.022221	1.033499	1.044891
12	1.000000	1.012066	1.024266	1.036600	1.049070
13	1.000000	1.013078	1.026314	1.039710	1.053266
14	1.000000	1.014091	1.028367	1.042829	1.057480
15	1.000000	1.015105	1.030424	1.045957	1.061709
16	1.000000	1.016121	1.032485	1.049095	1.065956
17	1.000000	1.017137	1.034549	1.052243	1.070220
18	1.000000	1.018154	1.036619	1.055399	1.074501
19	1.000000	1.019172	1.038692	1.058565	1.078799
20	1.000000	1.020191	1.040769	1.061741	1.083114
21	1.000000	1.021211	1.042851	1.064926	1.087447
22	1.000000	1.022233	1.044936	1.068121	1.091796
23	1.000000	1.023255	1.047026	1.071326	1.096164
24	1.000000	1.024278	1.049120	1.074540	1.100548
25	1.000000	1.025302	1.051219	1.077763	1.104950
26	1.000000	1.026328	1.053321	1.080996	1.109370
27	1.000000	1.027354	1.055428	1.084239	1.113808
28	1.000000	1.028381	1.057539	1.087492	1.118263
29	1.000000	1.029410	1.059654	1.090755	1.122736
30	1.000000	1.030439	1.061773	1.094027	1.127227
31	1.000000	1.031470	1.063896	1.097309	1.131736
32	1.000000	1.032501	1.066024	1.100601	1.136263
33	1.000000	1.033533	1.068156	1.103903	1.140808
34	1.000000	1.034567	1.070293	1.107214	1.145371
35	1.000000	1.035602	1.072433	1.110536	1.149953
36	1.000000	1.036637	1.074578	1.113868	1.154552
37	1.000000	1.037674	1.076727	1.117209	1.159171
38	1.000000	1.038712	1.078881	1.120561	1.163807
39	1.000000	1.039750	1.081038	1.123923	1.168463
40	1.000000	1.040790	1.083201	1.127294	1.173136
41	1.000000	1.041831	1.085367	1.130676	1.177829
42	1.000000	1.042873	1.087538	1.134068	1.182540
43	1.000000	1.043915	1.089713	1.137470	1.187270
44	1.000000	1.044959	1.091892	1.140883	1.192020
45	1.000000	1.046004	1.094076	1.144306	1.196788
46	1.000000	1.047050	1.096264	1.147738	1.201575
47	1.000000	1.048097	1.098457	1.151182	1.206381
48	1.000000	1.049145	1.100654	1.154635	1.211207
49	1.000000	1.050195	1.102855	1.158099	1.216051
50	1.000000	1.051245	1.105061	1.161573	1.220916

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	1 %	0.6 %	0.7 %	0.8 %	0.9 %
1	1.005000	1.006000	1.007000	1.008000	1.009000
2	1.010025	1.012036	1.014049	1.016064	1.018081
3	1.015075	1.018108	1.021147	1.024193	1.027244
4	1.020151	1.024217	1.028295	1.032386	1.036489
5	1.025251	1.030362	1.035493	1.040645	1.045817
6	1.030378	1.036544	1.042742	1.048970	1.055230
7	1.035529	1.042764	1.050041	1.057362	1.064727
8	1.040707	1.049020	1.057391	1.065821	1.074309
9	1.045911	1.055314	1.064793	1.074348	1.083978
10	1.051140	1.061646	1.072247	1.082942	1.093734
11	1.056396	1.068016	1.079752	1.091606	1.103577
12	1.061678	1.074424	1.087311	1.100339	1.113510
13	1.066986	1.080871	1.094922	1.109141	1.123531
14	1.072321	1.087356	1.102586	1.118015	1.133643
15	1.077683	1.093880	1.110304	1.126959	1.143846
16	1.083071	1.100443	1.118077	1.135974	1.154140
17	1.088487	1.107046	1.125903	1.145062	1.164528
18	1.093929	1.113688	1.133784	1.154223	1.175008
19	1.099399	1.120370	1.141721	1.163456	1.185584
20	1.104896	1.127093	1.149713	1.172764	1.196254
21	1.110420	1.133855	1.157761	1.182146	1.207020
22	1.115972	1.140658	1.165865	1.191603	1.217883
23	1.121552	1.147502	1.174026	1.201136	1.228844
24	1.127160	1.154387	1.182244	1.210745	1.239904
25	1.132796	1.161314	1.190520	1.220431	1.251063
26	1.138460	1.168281	1.198854	1.230195	1.262322
27	1.144152	1.175291	1.207246	1.240036	1.273683
28	1.149873	1.182343	1.215697	1.249956	1.285147
29	1.155622	1.189437	1.224206	1.259956	1.296713
30	1.161400	1.196574	1.232776	1.270036	1.308383
31	1.167207	1.203753	1.241405	1.280196	1.320159
32	1.173043	1.210976	1.250095	1.290438	1.332040
33	1.178908	1.218241	1.258846	1.300761	1.344029
34	1.184803	1.225551	1.267658	1.311167	1.356125
35	1.190727	1.232904	1.276531	1.321657	1.368330
36	1.196681	1.240302	1.285467	1.332230	1.380645
37	1.202664	1.247743	1.294465	1.342888	1.393071
38	1.208677	1.255230	1.303527	1.353631	1.405608
39	1.214721	1.262761	1.312651	1.364460	1.418259
40	1.220794	1.270338	1.321840	1.375376	1.431023
41	1.226898	1.277960	1.331093	1.386379	1.443902
42	1.233033	1.285628	1.340410	1.397470	1.456897
43	1.239198	1.293341	1.349793	1.408649	1.470010
44	1.245394	1.301101	1.359242	1.419918	1.483240
45	1.251621	1.308908	1.368756	1.431278	1.496589
46	1.257879	1.316761	1.378338	1.442728	1.510058
47	1.264168	1.324662	1.387986	1.454270	1.523649
48	1.270489	1.332610	1.397702	1.465904	1.537361
49	1.276842	1.340606	1.407486	1.477631	1.551198
50	1.283226	1.348649	1.417338	1.489452	1.565158

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	1.0 %	1.1 %	1.2 %	1.3 %	1.4 %
1	1.010000	1.011000	1.012000	1.013000	1.014000
2	1.020100	1.022121	1.024144	1.026169	1.028196
3	1.030301	1.033364	1.036434	1.039509	1.042591
4	1.040604	1.044731	1.048871	1.053023	1.057187
5	1.051010	1.056223	1.061457	1.066712	1.071988
6	1.061520	1.067842	1.074195	1.080579	1.086995
7	1.072135	1.079588	1.087085	1.094627	1.102213
8	1.082857	1.091464	1.100130	1.108857	1.117644
9	1.093685	1.103470	1.113332	1.123272	1.133291
10	1.104622	1.115608	1.126692	1.137875	1.149157
11	1.115668	1.127880	1.140212	1.152667	1.165246
12	1.126825	1.140286	1.153895	1.167652	1.181559
13	1.138093	1.152829	1.167741	1.182831	1.198101
14	1.149474	1.165510	1.181754	1.198208	1.214874
15	1.160969	1.178331	1.195935	1.213785	1.231883
16	1.172579	1.191293	1.210287	1.229564	1.249129
17	1.184304	1.204397	1.224810	1.245548	1.266617
18	1.196147	1.217645	1.239508	1.261740	1.284349
19	1.208109	1.231039	1.254382	1.278143	1.302330
20	1.220190	1.244581	1.269434	1.294759	1.320563
21	1.232392	1.258271	1.284668	1.311591	1.339051
22	1.244716	1.272112	1.300084	1.328641	1.357798
23	1.257163	1.286105	1.315685	1.345914	1.376807
24	1.269735	1.300253	1.331473	1.363411	1.396082
25	1.282432	1.314555	1.347450	1.381135	1.415627
26	1.295256	1.329015	1.363620	1.399090	1.435446
27	1.308209	1.343635	1.379983	1.417278	1.455542
28	1.321291	1.358415	1.396543	1.435703	1.475920
29	1.334504	1.373357	1.413302	1.454367	1.496583
30	1.347849	1.388464	1.430261	1.473273	1.517535
31	1.361327	1.403737	1.447424	1.492426	1.538780
32	1.374941	1.419178	1.464793	1.511828	1.560323
33	1.388690	1.434789	1.482371	1.531481	1.582168
34	1.402577	1.450572	1.500159	1.551391	1.604318
35	1.416603	1.466528	1.518161	1.571559	1.626779
36	1.430769	1.482660	1.536379	1.591989	1.649553
37	1.445076	1.498969	1.554816	1.612685	1.672647
38	1.459527	1.515458	1.573474	1.633650	1.696064
39	1.474123	1.532128	1.592355	1.654887	1.719809
40	1.488864	1.548981	1.611464	1.676401	1.743886
41	1.503752	1.566020	1.630801	1.698194	1.768301
42	1.518790	1.583246	1.650371	1.720270	1.793057
43	1.533978	1.600662	1.670175	1.742634	1.818160
44	1.549318	1.618269	1.690217	1.765288	1.843614
45	1.564811	1.636070	1.710500	1.788237	1.869425
46	1.580459	1.654067	1.731026	1.811484	1.895597
47	1.596263	1.672262	1.751798	1.835033	1.922135
48	1.612226	1.690657	1.772820	1.858889	1.949045
49	1.628348	1.709254	1.794094	1.883054	1.976332
50	1.644632	1.728056	1.815623	1.907534	2.004000

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	1.5 %	1.6 %	1.7 %	1.8 %	1.9 %
1	1.015000	1.016000	1.017000	1.018000	1.019000
2	1.030225	1.032256	1.034289	1.036324	1.038361
3	1.045678	1.048772	1.051872	1.054978	1.058090
4	1.061364	1.065552	1.069754	1.073967	1.078194
5	1.077284	1.082601	1.087940	1.093299	1.098679
6	1.093443	1.099923	1.106435	1.112978	1.119554
7	1.109845	1.117522	1.125244	1.133012	1.140826
8	1.126493	1.135402	1.144373	1.153406	1.162501
9	1.143390	1.153568	1.163827	1.174167	1.184589
10	1.160541	1.172026	1.183612	1.195302	1.207096
11	1.177949	1.190778	1.203734	1.216818	1.230031
12	1.195618	1.209830	1.224197	1.238721	1.253401
13	1.213552	1.229188	1.245009	1.261018	1.277216
14	1.231756	1.248855	1.266174	1.283716	1.301483
15	1.250232	1.268836	1.287699	1.306823	1.326211
16	1.268986	1.289138	1.309590	1.330346	1.351409
17	1.288020	1.309764	1.331853	1.354292	1.377086
18	1.307341	1.330720	1.354494	1.378669	1.403251
19	1.326951	1.352012	1.377521	1.403485	1.429913
20	1.346855	1.373644	1.400938	1.428748	1.457081
21	1.367058	1.395622	1.424754	1.454465	1.484765
22	1.387564	1.417952	1.448975	1.480646	1.512976
23	1.408377	1.440639	1.473608	1.507297	1.541723
24	1.429503	1.463690	1.498659	1.534429	1.571015
25	1.450945	1.487109	1.524136	1.562048	1.600865
26	1.472710	1.510902	1.550047	1.590165	1.631281
27	1.494800	1.535077	1.576397	1.618788	1.662275
28	1.517222	1.559638	1.603196	1.647926	1.693859
29	1.539981	1.584592	1.630451	1.677589	1.726042
30	1.563080	1.609946	1.658168	1.707786	1.758837
31	1.586526	1.635705	1.686357	1.738526	1.792255
32	1.610324	1.661876	1.715025	1.769819	1.826307
33	1.634479	1.688466	1.744181	1.801676	1.861007
34	1.658996	1.715482	1.773832	1.834106	1.896366
35	1.683881	1.742929	1.803987	1.867120	1.932397
36	1.709140	1.770816	1.834655	1.900728	1.969113
37	1.734777	1.799149	1.865844	1.934941	2.006526
38	1.760798	1.827936	1.897563	1.969770	2.044650
39	1.787210	1.857183	1.929822	2.005226	2.083498
40	1.814018	1.886898	1.962629	2.041320	2.123085
41	1.841229	1.917088	1.995993	2.078064	2.163424
42	1.868847	1.947761	2.029925	2.115469	2.204529
43	1.896880	1.978925	2.064434	2.153547	2.246415
44	1.925333	2.010588	2.099529	2.192311	2.289096
45	1.954213	2.042758	2.135221	2.231773	2.332589
46	1.983526	2.075442	2.171520	2.271945	2.376909
47	2.013279	2.108649	2.208436	2.312840	2.422070
48	2.043478	2.142387	2.245979	2.354471	2.468089
49	2.074130	2.176665	2.284161	2.396851	2.514983
50	2.105242	2.211492	2.322992	2.439995	2.562767

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	2.0 %	2.1 %	2.2 %	2.3 %	2.4 %
1	1.020000	1.021000	1.022000	1.023000	1.024000
2	1.040400	1.042441	1.044484	1.046529	1.048576
3	1.061208	1.064332	1.067463	1.070599	1.073742
4	1.082432	1.086683	1.090947	1.095223	1.099512
5	1.104081	1.109504	1.114948	1.120413	1.125900
6	1.126162	1.132803	1.139477	1.146183	1.152922
7	1.148686	1.156592	1.164545	1.172545	1.180592
8	1.171659	1.180880	1.190165	1.199513	1.208926
9	1.195093	1.205679	1.216349	1.227102	1.237940
10	1.218994	1.230998	1.243108	1.255325	1.267651
11	1.243374	1.256849	1.270457	1.284198	1.298074
12	1.268242	1.283243	1.298407	1.313734	1.329228
13	1.293607	1.310191	1.326972	1.343950	1.361129
14	1.319479	1.337705	1.356165	1.374861	1.393797
15	1.345868	1.365797	1.386001	1.406483	1.427248
16	1.372786	1.394479	1.416493	1.438832	1.461502
17	1.400241	1.423763	1.447656	1.471925	1.496578
18	1.428246	1.453662	1.479504	1.505780	1.532496
19	1.456811	1.484189	1.512053	1.540413	1.569275
20	1.485947	1.515357	1.545318	1.575842	1.606938
21	1.515666	1.547179	1.579315	1.612086	1.645505
22	1.545980	1.579670	1.614060	1.649164	1.684997
23	1.576899	1.612843	1.649569	1.687095	1.725437
24	1.608437	1.646713	1.685860	1.725898	1.766847
25	1.640606	1.681294	1.722949	1.765594	1.809251
26	1.673418	1.716601	1.760854	1.806203	1.852673
27	1.706886	1.752649	1.799593	1.847745	1.897138
28	1.741024	1.789455	1.839184	1.890243	1.942669
29	1.775845	1.827034	1.879646	1.933719	1.989293
30	1.811362	1.865401	1.920998	1.978195	2.037036
31	1.847589	1.904575	1.963260	2.023693	2.085925
32	1.884541	1.944571	2.006451	2.070238	2.135987
33	1.922231	1.985407	2.050593	2.117853	2.187251
34	1.960676	2.027100	2.095706	2.166564	2.239745
35	1.999890	2.069669	2.141812	2.216395	2.293499
36	2.039887	2.113132	2.188932	2.267372	2.348543
37	2.080685	2.157508	2.237088	2.319522	2.404908
38	2.122299	2.202816	2.286304	2.372871	2.462625
39	2.164745	2.249075	2.336603	2.427447	2.521728
40	2.208040	2.296306	2.388008	2.483278	2.582250
41	2.252200	2.344528	2.440544	2.540393	2.644224
42	2.297244	2.393763	2.494236	2.598822	2.707685
43	2.343189	2.444032	2.549110	2.658595	2.772670
44	2.390053	2.495357	2.605190	2.719743	2.839214
45	2.437854	2.547759	2.662504	2.782297	2.907355
46	2.486611	2.601262	2.721079	2.846290	2.977131
47	2.536344	2.655889	2.780943	2.911755	3.048583
48	2.587070	2.711662	2.842124	2.978725	3.121749
49	2.638812	2.768607	2.904651	3.047236	3.196671
50	2.691588	2.826748	2.968553	3.117322	3.273391

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$(1 + i)^t$

t	2.5 %	2.6 %	2.7 %	2.8 %	2.9 %
1	1.025000	1.026000	1.027000	1.028000	1.029000
2	1.050625	1.052676	1.054729	1.056784	1.058841
3	1.076891	1.080046	1.083207	1.086374	1.089547
4	1.103813	1.108127	1.112453	1.116792	1.121144
5	1.131408	1.136938	1.142490	1.148063	1.153657
6	1.159693	1.166498	1.173337	1.180208	1.187114
7	1.188686	1.196827	1.205017	1.213254	1.221540
8	1.218403	1.227945	1.237552	1.247225	1.256964
9	1.248863	1.259871	1.270966	1.282148	1.293416
10	1.280085	1.292628	1.305282	1.318048	1.330926
11	1.312087	1.326236	1.340525	1.354953	1.369522
12	1.344889	1.360719	1.376719	1.392892	1.409238
13	1.378511	1.396097	1.413890	1.431893	1.450106
14	1.412974	1.432396	1.452066	1.471986	1.492159
15	1.448298	1.469638	1.491271	1.513201	1.535432
16	1.484506	1.507849	1.531536	1.555571	1.579960
17	1.521618	1.547053	1.572887	1.599127	1.625778
18	1.559659	1.587276	1.615355	1.643903	1.672926
19	1.598650	1.628545	1.658970	1.689932	1.721441
20	1.638616	1.670888	1.703762	1.737250	1.771363
21	1.679582	1.714331	1.749763	1.785893	1.822732
22	1.721571	1.758903	1.797007	1.835898	1.875591
23	1.764611	1.804635	1.845526	1.887303	1.929984
24	1.808726	1.851555	1.895355	1.940148	1.985953
25	1.853944	1.899696	1.946530	1.994472	2.043546
26	1.900293	1.949088	1.999086	2.050317	2.102809
27	1.947800	1.999764	2.053062	2.107726	2.163790
28	1.996495	2.051758	2.108494	2.166742	2.226540
29	2.046407	2.105104	2.165424	2.227411	2.291110
30	2.097568	2.159836	2.223890	2.289778	2.357552
31	2.150007	2.215992	2.283935	2.353892	2.425921
32	2.203757	2.273608	2.345601	2.419801	2.496273
33	2.258851	2.332722	2.408933	2.487556	2.568664
34	2.315322	2.393372	2.473974	2.557207	2.643156
35	2.373205	2.455600	2.540771	2.628809	2.719807
36	2.432535	2.519446	2.609372	2.702416	2.798682
37	2.493349	2.584951	2.679825	2.778083	2.879843
38	2.555682	2.652160	2.752180	2.855869	2.963359
39	2.619574	2.721116	2.826489	2.935834	3.049296
40	2.685064	2.791865	2.902804	3.018037	3.137726
41	2.752190	2.864454	2.981180	3.102542	3.228720
42	2.820995	2.938929	3.061672	3.189413	3.322353
43	2.891520	3.015342	3.144337	3.278717	3.418701
44	2.963808	3.093740	3.229234	3.370521	3.517843
45	3.037903	3.174178	3.316423	3.464896	3.619861
46	3.113851	3.256706	3.405967	3.561913	3.724837
47	3.191697	3.341381	3.497928	3.661646	3.832857
48	3.271490	3.428257	3.592372	3.764172	3.944010
49	3.353277	3.517391	3.689366	3.869569	4.058386
50	3.437109	3.608843	3.788979	3.977917	4.176079

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	3.0 %	3.1 %	3.2 %	3.3 %	3.4 %
1	1.030000	1.031000	1.032000	1.033000	1.034000
2	1.060900	1.062961	1.065024	1.067089	1.069156
3	1.092727	1.095913	1.099105	1.102303	1.105507
4	1.125509	1.129886	1.134276	1.138679	1.143095
5	1.159274	1.164913	1.170573	1.176255	1.181960
6	1.194052	1.201025	1.208031	1.215072	1.222146
7	1.229874	1.238257	1.246688	1.255169	1.263699
8	1.266770	1.276643	1.286582	1.296590	1.306665
9	1.304773	1.316218	1.327753	1.339377	1.351092
10	1.343916	1.357021	1.370241	1.383577	1.397029
11	1.384234	1.399089	1.414089	1.429235	1.444528
12	1.425761	1.442461	1.459340	1.476399	1.493642
13	1.468534	1.487177	1.506038	1.525121	1.544426
14	1.512590	1.533279	1.554232	1.575450	1.596936
15	1.557967	1.580811	1.603967	1.627439	1.651232
16	1.604706	1.629816	1.655294	1.681145	1.707374
17	1.652848	1.680341	1.708263	1.736623	1.765425
18	1.702433	1.732431	1.762928	1.793931	1.825449
19	1.753506	1.786136	1.819342	1.853131	1.887514
20	1.806111	1.841507	1.877561	1.914284	1.951690
21	1.860295	1.898593	1.937642	1.977456	2.018047
22	1.916103	1.957450	1.999647	2.042712	2.086661
23	1.973587	2.018131	2.063636	2.110121	2.157607
24	2.032794	2.080693	2.129672	2.179755	2.230966
25	2.093778	2.145194	2.197822	2.251687	2.306819
26	2.156591	2.211695	2.268152	2.325993	2.385251
27	2.221289	2.280258	2.340733	2.402751	2.466349
28	2.287928	2.350946	2.415636	2.482041	2.550205
29	2.356566	2.423825	2.492937	2.563949	2.636912
30	2.427262	2.498964	2.572710	2.648559	2.726567
31	2.500080	2.576432	2.655037	2.735961	2.819270
32	2.575083	2.656301	2.739998	2.826248	2.915125
33	2.652335	2.738646	2.827678	2.919514	3.014240
34	2.731905	2.823544	2.918164	3.015858	3.116724
35	2.813862	2.911074	3.011545	3.115382	3.222692
36	2.898278	3.001318	3.107915	3.218189	3.332264
37	2.985227	3.094358	3.207368	3.324389	3.445561
38	3.074783	3.190284	3.310004	3.434094	3.562710
39	3.167027	3.289182	3.415924	3.547419	3.683842
40	3.262038	3.391147	3.525234	3.664484	3.809093
41	3.359899	3.496273	3.638041	3.785412	3.938602
42	3.460696	3.604657	3.754458	3.910331	4.072514
43	3.564517	3.716401	3.874601	4.039372	4.210980
44	3.671452	3.831610	3.998588	4.172671	4.354153
45	3.781596	3.950390	4.126543	4.310369	4.502194
46	3.895044	4.072852	4.258592	4.452611	4.655269
47	4.011895	4.199110	4.394867	4.599548	4.813548
48	4.132252	4.329283	4.535503	4.751333	4.977209
49	4.256219	4.463490	4.680639	4.908127	5.146434
50	4.383906	4.601859	4.830420	5.070095	5.321413

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	3.5 %	3.6 %	3.7 %	3.8 %	3.9 %
1	1.035000	1.036000	1.037000	1.038000	1.039000
2	1.071225	1.073296	1.075369	1.077444	1.079521
3	1.108718	1.111935	1.115158	1.118387	1.121622
4	1.147523	1.151964	1.156418	1.160886	1.165366
5	1.187686	1.193435	1.199206	1.204999	1.210815
6	1.229255	1.236399	1.243577	1.250789	1.258037
7	1.272279	1.280909	1.289589	1.298319	1.307100
8	1.316809	1.327022	1.337304	1.347655	1.358077
9	1.362897	1.374795	1.386784	1.398866	1.411042
10	1.410599	1.424287	1.438095	1.452023	1.466073
11	1.459970	1.475561	1.491304	1.507200	1.523249
12	1.511069	1.528682	1.546483	1.564474	1.582656
13	1.563956	1.583714	1.603703	1.623924	1.644380
14	1.618695	1.640728	1.663040	1.685633	1.708511
15	1.675349	1.699794	1.724572	1.749687	1.775142
16	1.733986	1.760987	1.788381	1.816175	1.844373
17	1.794676	1.824382	1.854551	1.885189	1.916304
18	1.857489	1.890060	1.923170	1.956827	1.991039
19	1.922501	1.958102	1.994327	2.031186	2.068690
20	1.989789	2.028594	2.068117	2.108371	2.149369
21	2.059431	2.101623	2.144637	2.188489	2.233194
22	2.131512	2.177282	2.223989	2.271652	2.320289
23	2.206114	2.255664	2.306277	2.357975	2.410780
24	2.283328	2.336868	2.391609	2.447578	2.504801
25	2.363245	2.420995	2.480098	2.540586	2.602488
26	2.445959	2.508151	2.571862	2.637128	2.703985
27	2.531567	2.598444	2.667021	2.737339	2.809440
28	2.620172	2.691988	2.765701	2.841358	2.919008
29	2.711878	2.788900	2.868032	2.949329	3.032850
30	2.806794	2.889300	2.974149	3.061404	3.151131
31	2.905031	2.993315	3.084192	3.177737	3.274025
32	3.006708	3.101074	3.198307	3.298491	3.401712
33	3.111942	3.212713	3.316645	3.423834	3.534379
34	3.220860	3.328371	3.439361	3.553939	3.672219
35	3.333590	3.448192	3.566617	3.688989	3.815436
36	3.450266	3.572327	3.698582	3.829171	3.964238
37	3.571025	3.700931	3.835429	3.974679	4.118843
38	3.696011	3.834164	3.977340	4.125717	4.279478
39	3.825372	3.972194	4.124502	4.282494	4.446378
40	3.959260	4.115193	4.277108	4.445229	4.619786
41	4.097834	4.263340	4.435361	4.614148	4.799958
42	4.241258	4.416820	4.599470	4.789485	4.987157
43	4.389702	4.575826	4.769650	4.971486	5.181656
44	4.543342	4.740556	4.946127	5.160402	5.383740
45	4.702359	4.911216	5.129134	5.356498	5.593706
46	4.866941	5.088019	5.318912	5.560044	5.811861
47	5.037284	5.271188	5.515712	5.771326	6.038523
48	5.213589	5.460951	5.719793	5.990637	6.274026
49	5.396065	5.657545	5.931425	6.218281	6.518713
50	5.584927	5.861217	6.150888	6.454575	6.772942

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	4.0 %	4.1 %	4.2 %	4.3 %	4.4 %
1	1.040000	1.041000	1.042000	1.043000	1.044000
2	1.081600	1.083681	1.085764	1.087849	1.089936
3	1.124864	1.128112	1.131366	1.134627	1.137893
4	1.169859	1.174365	1.178883	1.183415	1.187960
5	1.216653	1.222513	1.228397	1.234302	1.240231
6	1.265319	1.272637	1.279989	1.287377	1.294801
7	1.315932	1.324815	1.333749	1.342735	1.351772
8	1.368569	1.379132	1.389766	1.400472	1.411250
9	1.423312	1.435676	1.448136	1.460692	1.473345
10	1.480244	1.494539	1.508958	1.523502	1.538172
11	1.539454	1.555815	1.572334	1.589013	1.605852
12	1.601032	1.619604	1.638372	1.657340	1.676509
13	1.665074	1.686007	1.707184	1.728606	1.750276
14	1.731676	1.755134	1.778886	1.802936	1.827288
15	1.800944	1.827094	1.853599	1.880462	1.907689
16	1.872981	1.902005	1.931450	1.961322	1.991627
17	1.947900	1.979987	2.012571	2.045659	2.079258
18	2.025817	2.061167	2.097099	2.133622	2.170746
19	2.106849	2.145675	2.185177	2.225368	2.266259
20	2.191123	2.233647	2.276955	2.321059	2.365974
21	2.278768	2.325227	2.372587	2.420864	2.470077
22	2.369919	2.420561	2.472235	2.524962	2.578760
23	2.464716	2.519804	2.576069	2.633535	2.692226
24	2.563304	2.623116	2.684264	2.746777	2.810684
25	2.665836	2.730664	2.797003	2.864888	2.934354
26	2.772470	2.842621	2.914477	2.988079	3.063465
27	2.883369	2.959169	3.036885	3.116566	3.198258
28	2.998703	3.080494	3.164435	3.250578	3.338981
29	3.118651	3.206795	3.297341	3.390353	3.485896
30	3.243398	3.338273	3.435829	3.536138	3.639276
31	3.373133	3.475142	3.580134	3.688192	3.799404
32	3.508059	3.617623	3.730500	3.846785	3.966578
33	3.648381	3.765946	3.887181	4.012196	4.141107
34	3.794316	3.920350	4.050442	4.184721	4.323316
35	3.946089	4.081084	4.220561	4.364664	4.513542
36	4.103933	4.248408	4.397824	4.552344	4.712137
37	4.268090	4.422593	4.582533	4.748095	4.919472
38	4.438813	4.603920	4.774999	4.952263	5.135928
39	4.616366	4.792680	4.975549	5.165211	5.361909
40	4.801021	4.989180	5.184522	5.387315	5.597833
41	4.993061	5.193736	5.402272	5.618969	5.844138
42	5.192784	5.406680	5.629168	5.860585	6.101280
43	5.400495	5.628354	5.865593	6.112590	6.369736
44	5.616515	5.859116	6.111948	6.375431	6.650005
45	5.841176	6.099340	6.368650	6.649575	6.942605
46	6.074823	6.349413	6.636133	6.935507	7.248079
47	6.317816	6.609739	6.914850	7.233733	7.566995
48	6.570528	6.880738	7.205274	7.544784	7.899943
49	6.833349	7.162848	7.507896	7.869210	8.247540
50	7.106683	7.456525	7.823227	8.207586	8.610432

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	4.5 %	4.6 %	4.7 %	4.8 %	4.9 %
1	1.045000	1.046000	1.047000	1.048000	1.049000
2	1.092025	1.094116	1.096209	1.098304	1.100401
3	1.141166	1.144445	1.147731	1.151023	1.154321
4	1.192519	1.197090	1.201674	1.206272	1.210882
5	1.246182	1.252156	1.258153	1.264173	1.270216
6	1.302260	1.309755	1.317286	1.324853	1.332456
7	1.360862	1.370004	1.379198	1.388446	1.397747
8	1.422101	1.433024	1.444021	1.455091	1.466236
9	1.486095	1.498943	1.511890	1.524936	1.538082
10	1.552969	1.567895	1.582949	1.598133	1.613448
11	1.622853	1.640018	1.657347	1.674843	1.692507
12	1.695881	1.715458	1.735243	1.755235	1.775439
13	1.772196	1.794370	1.816799	1.839487	1.862436
14	1.851945	1.876911	1.902188	1.927782	1.953695
15	1.935282	1.963248	1.991591	2.020316	2.049426
16	2.022370	2.053558	2.085196	2.117291	2.149848
17	2.113377	2.148022	2.183200	2.218921	2.255191
18	2.208479	2.246831	2.285811	2.325429	2.365695
19	2.307860	2.350185	2.393244	2.437050	2.481614
20	2.411714	2.458293	2.505726	2.554028	2.603213
21	2.520241	2.571375	2.623495	2.676621	2.730771
22	2.633652	2.689658	2.746800	2.805099	2.864579
23	2.752166	2.813382	2.875899	2.939744	3.004943
24	2.876014	2.942798	3.011067	3.080852	3.152185
25	3.005434	3.078167	3.152587	3.228733	3.306642
26	3.140679	3.219762	3.300758	3.383712	3.468668
27	3.282010	3.367871	3.455894	3.546130	3.638632
28	3.429700	3.522793	3.618321	3.716344	3.816925
29	3.584036	3.684842	3.788382	3.894729	4.003955
30	3.745318	3.854345	3.966436	4.081676	4.200149
31	3.913857	4.031644	4.152858	4.277596	4.405956
32	4.089981	4.217100	4.348043	4.482921	4.621848
33	4.274030	4.411087	4.552401	4.698101	4.848318
34	4.466362	4.613997	4.766364	4.923610	5.085886
35	4.667348	4.826240	4.990383	5.159943	5.335094
36	4.877378	5.048248	5.224931	5.407620	5.596514
37	5.096860	5.280467	5.470503	5.667186	5.870743
38	5.326219	5.523368	5.727616	5.939211	6.158409
39	5.565899	5.777443	5.996814	6.224293	6.460171
40	5.816365	6.043206	6.278664	6.523059	6.776720
41	6.078101	6.321193	6.573762	6.836166	7.108779
42	6.351615	6.611968	6.882728	7.164302	7.457109
43	6.637438	6.916119	7.206217	7.508188	7.822508
44	6.936123	7.234260	7.544909	7.868581	8.205810
45	7.248248	7.567036	7.899520	8.246273	8.607895
46	7.574420	7.915120	8.270797	8.642094	9.029682
47	7.915268	8.279215	8.659524	9.056915	9.472136
48	8.271456	8.660059	9.066522	9.491647	9.936271
49	8.643671	9.058422	9.492649	9.947246	10.423148
50	9.032636	9.475109	9.938803	10.424714	10.933883

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	5.0 %	5.1 %	5.2 %	5.3 %	5.4 %
1	1.050000	1.051000	1.052000	1.053000	1.054000
2	1.102500	1.104601	1.106704	1.108809	1.110916
3	1.157625	1.160936	1.164253	1.167576	1.170905
4	1.215506	1.220143	1.224794	1.229457	1.234134
5	1.276282	1.282371	1.288483	1.294619	1.300778
6	1.340096	1.347772	1.355484	1.363233	1.371020
7	1.407100	1.416508	1.425969	1.435485	1.445055
8	1.477455	1.488750	1.500120	1.511565	1.523088
9	1.551328	1.564676	1.578126	1.591678	1.605334
10	1.628895	1.644475	1.660188	1.676037	1.692022
11	1.710339	1.728343	1.746518	1.764867	1.783392
12	1.795856	1.816488	1.837337	1.858405	1.879695
13	1.885649	1.909129	1.932879	1.956901	1.981198
14	1.979932	2.006495	2.033388	2.060617	2.088183
15	2.078928	2.108826	2.139125	2.169829	2.200945
16	2.182875	2.216376	2.250359	2.284830	2.319796
17	2.292018	2.329411	2.367378	2.405926	2.445065
18	2.406619	2.448211	2.490481	2.533440	2.577098
19	2.526950	2.573070	2.619987	2.667713	2.716262
20	2.653298	2.704297	2.756226	2.809101	2.862940
21	2.785963	2.842216	2.899550	2.957984	3.017539
22	2.925261	2.987169	3.050326	3.114757	3.180486
23	3.071524	3.139514	3.208943	3.279839	3.352232
24	3.225100	3.299630	3.375808	3.453671	3.533252
25	3.386355	3.467911	3.551350	3.636715	3.724048
26	3.555673	3.644774	3.736020	3.829461	3.925147
27	3.733456	3.830658	3.930293	4.032422	4.137105
28	3.920129	4.026021	4.134669	4.246141	4.360508
29	4.116136	4.231348	4.349671	4.471186	4.595976
30	4.321942	4.447147	4.575854	4.708159	4.844158
31	4.538039	4.673951	4.813799	4.957692	5.105743
32	4.764941	4.912323	5.064116	5.220449	5.381453
33	5.003189	5.162851	5.327450	5.497133	5.672051
34	5.253348	5.426157	5.604478	5.788481	5.978342
35	5.516015	5.702891	5.895911	6.095271	6.301173
36	5.791816	5.993738	6.202498	6.418320	6.641436
37	6.081407	6.299419	6.525028	6.758491	7.000074
38	6.385477	6.620689	6.864329	7.116691	7.378078
39	6.704751	6.958344	7.221274	7.493876	7.776494
40	7.039989	7.313220	7.596781	7.891051	8.196424
41	7.391988	7.686194	7.991813	8.309277	8.639031
42	7.761588	8.078190	8.407388	8.749668	9.105539
43	8.149667	8.490178	8.844572	9.213401	9.597238
44	8.557150	8.923177	9.304490	9.701711	10.115489
45	8.985008	9.378259	9.788323	10.215902	10.661725
46	9.434258	9.856550	10.297316	10.757344	11.237458
47	9.905971	10.359234	10.832776	11.327484	11.844281
48	10.401270	10.887555	11.396081	11.927840	12.483872
49	10.921333	11.442821	11.988677	12.560016	13.158002
50	11.467400	12.026404	12.612088	13.225697	13.868534

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	5.5 %	5.6 %	5.7 %	5.8 %	5.9 %
1	1.055000	1.056000	1.057000	1.058000	1.059000
2	1.113025	1.115136	1.117249	1.119364	1.121481
3	1.174241	1.177584	1.180932	1.184287	1.187648
4	1.238825	1.243528	1.248245	1.252976	1.257720
5	1.306960	1.313166	1.319395	1.325648	1.331925
6	1.378843	1.386703	1.394601	1.402536	1.410509
7	1.454679	1.464359	1.474093	1.483883	1.493729
8	1.534687	1.546363	1.558116	1.569948	1.581859
9	1.619094	1.632959	1.646929	1.661005	1.675188
10	1.708144	1.724405	1.740804	1.757344	1.774024
11	1.802092	1.820971	1.840030	1.859269	1.878692
12	1.901207	1.922946	1.944912	1.967107	1.989535
13	2.005774	2.030631	2.055771	2.081199	2.106917
14	2.116091	2.144346	2.172950	2.201909	2.231225
15	2.232476	2.264429	2.296809	2.329620	2.362868
16	2.355263	2.391237	2.427727	2.464738	2.502277
17	2.484802	2.525147	2.566107	2.607692	2.649911
18	2.621466	2.666555	2.712375	2.758938	2.806256
19	2.765647	2.815882	2.866981	2.918957	2.971825
20	2.917757	2.973571	3.030399	3.088256	3.147163
21	3.078234	3.140091	3.203131	3.267375	3.332845
22	3.247537	3.315936	3.385710	3.456883	3.529483
23	3.426152	3.501629	3.578695	3.657382	3.737723
24	3.614590	3.697720	3.782681	3.869510	3.958248
25	3.813392	3.904792	3.998294	4.093942	4.191785
26	4.023129	4.123461	4.226196	4.331391	4.439100
27	4.244401	4.354375	4.467090	4.582611	4.701007
28	4.477843	4.598220	4.721714	4.848403	4.978367
29	4.724124	4.855720	4.990851	5.129610	5.272090
30	4.983951	5.127640	5.275330	5.427128	5.583144
31	5.258069	5.414788	5.576024	5.741901	5.912549
32	5.547262	5.718016	5.893857	6.074931	6.261390
33	5.852362	6.038225	6.229807	6.427277	6.630812
34	6.174242	6.376366	6.584906	6.800059	7.022029
35	6.513825	6.733442	6.960245	7.194463	7.436329
36	6.872085	7.110515	7.356979	7.611742	7.875073
37	7.250050	7.508704	7.776327	8.053223	8.339702
38	7.648803	7.929191	8.219578	8.520310	8.831744
39	8.069487	8.373226	8.688094	9.014487	9.352817
40	8.513309	8.842127	9.183315	9.537328	9.904633
41	8.981541	9.337286	9.706764	10.090493	10.489007
42	9.475525	9.860174	10.260050	10.675741	11.107858
43	9.996679	10.412343	10.844873	11.294934	11.763222
44	10.546497	10.995435	11.463030	11.950041	12.457252
45	11.126554	11.611179	12.116423	12.643143	13.192230
46	11.738515	12.261405	12.807059	13.376445	13.970571
47	12.384133	12.948044	13.537062	14.152279	14.794835
48	13.065260	13.673134	14.308674	14.973111	15.667730
49	13.783849	14.438830	15.124268	15.841552	16.592126
50	14.541961	15.247404	15.986352	16.760362	17.571062

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	6.0 %	6.1 %	6.2 %	6.3 %	6.4 %
1	1.060000	1.061000	1.062000	1.063000	1.064000
2	1.123600	1.125721	1.127844	1.129969	1.132096
3	1.191016	1.194390	1.197770	1.201157	1.204550
4	1.262477	1.267248	1.272032	1.276830	1.281641
5	1.338226	1.344550	1.350898	1.357270	1.363666
6	1.418519	1.426567	1.434654	1.442778	1.450941
7	1.503630	1.513588	1.523602	1.533673	1.543801
8	1.593848	1.605917	1.618066	1.630295	1.642605
9	1.689479	1.703878	1.718386	1.733003	1.747731
10	1.790848	1.807814	1.824926	1.842182	1.859586
11	1.898299	1.918091	1.938071	1.958240	1.978600
12	2.012196	2.035095	2.058231	2.081609	2.105230
13	2.132928	2.159235	2.185842	2.212750	2.239965
14	2.260904	2.290949	2.321364	2.352154	2.383322
15	2.396558	2.430697	2.465289	2.500339	2.535855
16	2.540352	2.578969	2.618136	2.657861	2.698150
17	2.692773	2.736286	2.780461	2.825306	2.870831
18	2.854339	2.903200	2.952849	3.003300	3.054565
19	3.025600	3.080295	3.135926	3.192508	3.250057
20	3.207135	3.268193	3.330354	3.393636	3.458060
21	3.399564	3.467553	3.536835	3.607435	3.679376
22	3.603537	3.679073	3.756119	3.834704	3.914856
23	3.819750	3.903497	3.988999	4.076290	4.165407
24	4.048935	4.141610	4.236317	4.333096	4.431993
25	4.291871	4.394248	4.498968	4.606081	4.715641
26	4.549383	4.662297	4.777904	4.896265	5.017442
27	4.822346	4.946698	5.074134	5.204729	5.338558
28	5.111687	5.248446	5.388731	5.532627	5.680226
29	5.418388	5.568601	5.722832	5.881183	6.043760
30	5.743491	5.908286	6.077647	6.251697	6.430561
31	6.088101	6.268692	6.454462	6.645554	6.842117
32	6.453387	6.651082	6.854638	7.064224	7.280012
33	6.840590	7.056798	7.279626	7.509270	7.745933
34	7.251025	7.487262	7.730963	7.982354	8.241672
35	7.686087	7.943985	8.210282	8.485242	8.769139
36	8.147252	8.428568	8.719320	9.019813	9.330364
37	8.636087	8.942711	9.259918	9.588061	9.927508
38	9.154252	9.488217	9.834032	10.192109	10.562868
39	9.703507	10.066998	10.443742	10.834212	11.238892
40	10.285718	10.681085	11.091254	11.516767	11.958181
41	10.902861	11.332631	11.778912	12.242323	12.723504
42	11.557033	12.023921	12.509205	13.013590	13.537809
43	12.250455	12.757380	13.284776	13.833446	14.404229
44	12.985482	13.535581	14.108432	14.704953	15.326099
45	13.764611	14.361251	14.983154	15.631365	16.306969
46	14.590487	15.237287	15.912110	16.616141	17.350616
47	15.465917	16.166762	16.898661	17.662958	18.461055
48	16.393872	17.152934	17.946378	18.775724	19.642562
49	17.377504	18.199263	19.059053	19.958595	20.899686
50	18.420154	19.309418	20.240714	21.215986	22.237266

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$(1 + i)^t$

t	6.5 %	6.6 %	6.7 %	6.8 %	6.9 %
1	1.065000	1.066000	1.067000	1.068000	1.069000
2	1.134225	1.136356	1.138489	1.140624	1.142761
3	1.207950	1.211355	1.214768	1.218186	1.221612
4	1.286466	1.291305	1.296157	1.301023	1.305903
5	1.370087	1.376531	1.383000	1.389493	1.396010
6	1.459142	1.467382	1.475661	1.483978	1.492335
7	1.553987	1.564229	1.574530	1.584889	1.595306
8	1.654996	1.667468	1.680023	1.692661	1.705382
9	1.762570	1.777521	1.792585	1.807762	1.823053
10	1.877137	1.894838	1.912688	1.930690	1.948844
11	1.999151	2.019897	2.040838	2.061977	2.083314
12	2.129096	2.153210	2.177575	2.202191	2.227063
13	2.267487	2.295322	2.323472	2.351940	2.380730
14	2.414874	2.446813	2.479145	2.511872	2.545001
15	2.571841	2.608303	2.645247	2.682679	2.720606
16	2.739011	2.780451	2.822479	2.865102	2.908327
17	2.917046	2.963961	3.011585	3.059929	3.109002
18	3.106654	3.159582	3.213361	3.268004	3.323523
19	3.308587	3.368115	3.428656	3.490228	3.552846
20	3.523645	3.590410	3.658376	3.727564	3.797993
21	3.752682	3.827377	3.903488	3.981038	4.060054
22	3.996606	4.079984	4.165021	4.251748	4.340198
23	4.256386	4.349263	4.444078	4.540867	4.639671
24	4.533051	4.636315	4.741831	4.849646	4.959809
25	4.827699	4.942312	5.059534	5.179422	5.302035
26	5.141500	5.268504	5.398522	5.531623	5.667876
27	5.475697	5.616225	5.760223	5.907773	6.058959
28	5.831617	5.986896	6.146158	6.309502	6.477028
29	6.210672	6.382031	6.557951	6.738548	6.923942
30	6.614366	6.803245	6.997334	7.196769	7.401695
31	7.044300	7.252260	7.466155	7.686150	7.912411
32	7.502179	7.730909	7.966387	8.208808	8.458368
33	7.989821	8.241149	8.500135	8.767007	9.041995
34	8.509159	8.785065	9.069644	9.363163	9.665893
35	9.062255	9.364879	9.677311	9.999858	10.332839
36	9.651301	9.982961	10.325690	10.679849	11.045805
37	10.278636	10.641836	11.017512	11.406078	11.807966
38	10.946747	11.344197	11.755685	12.181692	12.622716
39	11.658286	12.092915	12.543316	13.010047	13.493683
40	12.416075	12.891047	13.383718	13.894730	14.424747
41	13.223119	13.741856	14.280427	14.839571	15.420055
42	14.082622	14.648818	15.237216	15.848662	16.484038
43	14.997993	15.615640	16.258109	16.926371	17.621437
44	15.972862	16.646273	17.347402	18.077365	18.837316
45	17.011098	17.744927	18.509678	19.306625	20.137091
46	18.116820	18.916092	19.749827	20.619476	21.526550
47	19.294413	20.164554	21.073065	22.021600	23.011882
48	20.548550	21.495415	22.484961	23.519069	24.599702
49	21.884205	22.914112	23.991453	25.118366	26.297082
50	23.306679	24.426443	25.598880	26.826415	28.111580

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	7.0 %	7.1 %	7.2 %	7.3 %	7.4 %
1	1.070000	1.071000	1.072000	1.073000	1.074000
2	1.144900	1.147041	1.149184	1.151329	1.153476
3	1.225043	1.228481	1.231925	1.235376	1.238833
4	1.310796	1.315703	1.320624	1.325558	1.330507
5	1.402552	1.409118	1.415709	1.422324	1.428964
6	1.500730	1.509165	1.517640	1.526154	1.534708
7	1.605781	1.616316	1.626910	1.637563	1.648276
8	1.718186	1.731075	1.744047	1.757105	1.770249
9	1.838459	1.853981	1.869619	1.885374	1.901247
10	1.967151	1.985613	2.004231	2.023006	2.041939
11	2.104852	2.126592	2.148536	2.170686	2.193043
12	2.252192	2.277580	2.303231	2.329146	2.355328
13	2.409845	2.439288	2.469063	2.499173	2.529622
14	2.578534	2.612478	2.646836	2.681613	2.716814
15	2.759032	2.797964	2.837408	2.877371	2.917858
16	2.952164	2.996619	3.041701	3.087419	3.133780
17	3.158815	3.209379	3.260704	3.312800	3.365680
18	3.379932	3.437245	3.495474	3.554635	3.614740
19	3.616528	3.681289	3.747149	3.814123	3.882231
20	3.869684	3.942661	4.016943	4.092554	4.169516
21	4.140562	4.222590	4.306163	4.391311	4.478060
22	4.430402	4.522394	4.616207	4.711876	4.809436
23	4.740530	4.843484	4.948574	5.055843	5.165335
24	5.072367	5.187371	5.304871	5.424920	5.547570
25	5.427433	5.555674	5.686822	5.820939	5.958090
26	5.807353	5.950127	6.096273	6.245868	6.398988
27	6.213868	6.372586	6.535205	6.701816	6.872513
28	6.648838	6.825040	7.005740	7.191048	7.381079
29	7.114257	7.309618	7.510153	7.715995	7.927279
30	7.612255	7.828600	8.050884	8.279263	8.513898
31	8.145113	8.384431	8.630547	8.883649	9.143926
32	8.715271	8.979726	9.251947	9.532155	9.820577
33	9.325340	9.617286	9.918087	10.228002	10.547300
34	9.978114	10.300113	10.632189	10.974647	11.327800
35	10.676581	11.031422	11.397707	11.775796	12.166057
36	11.423942	11.814652	12.218342	12.635429	13.066345
37	12.223618	12.653493	13.098062	13.557815	14.033255
38	13.079271	13.551891	14.041123	14.547536	15.071716
39	13.994820	14.514075	15.052084	15.609506	16.187023
40	14.974458	15.544574	16.135834	16.749000	17.384862
41	16.022670	16.648239	17.297614	17.971677	18.671342
42	17.144257	17.830264	18.543042	19.283609	20.053021
43	18.344355	19.096213	19.878141	20.691313	21.536945
44	19.628460	20.452044	21.309367	22.201779	23.130679
45	21.002452	21.904139	22.843642	23.822508	24.842349
46	22.472623	23.459333	24.488384	25.561551	26.680683
47	24.045707	25.124946	26.251548	27.427545	28.655054
48	25.728907	26.908817	28.141659	29.429756	30.775527
49	27.529930	28.819343	30.167859	31.578128	33.052917
50	29.457025	30.865516	32.339944	33.883331	35.498832

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	7.5 %	7.6 %	7.7 %	7.8 %	7.9 %
1	1.075000	1.076000	1.077000	1.078000	1.079000
2	1.155625	1.157776	1.159929	1.162084	1.164241
3	1.242297	1.245767	1.249244	1.252727	1.256216
4	1.335469	1.340445	1.345435	1.350439	1.355457
5	1.435629	1.442319	1.449034	1.455773	1.462538
6	1.543302	1.551935	1.560609	1.569324	1.578079
7	1.659049	1.669882	1.680776	1.691731	1.702747
8	1.783478	1.796794	1.810196	1.823686	1.837264
9	1.917239	1.933350	1.949581	1.965934	1.982408
10	2.061032	2.080284	2.099699	2.119276	2.139018
11	2.215609	2.238386	2.261376	2.284580	2.308000
12	2.381780	2.408503	2.435502	2.462777	2.490332
13	2.560413	2.591550	2.623035	2.654874	2.687069
14	2.752444	2.788507	2.825009	2.861954	2.899347
15	2.958877	3.000434	3.042535	3.085186	3.128396
16	3.180793	3.228467	3.276810	3.325831	3.375539
17	3.419353	3.473830	3.529124	3.585246	3.642206
18	3.675804	3.737842	3.800867	3.864895	3.929941
19	3.951489	4.021917	4.093534	4.166357	4.240406
20	4.247851	4.327583	4.408736	4.491333	4.575398
21	4.566440	4.656480	4.748208	4.841657	4.936855
22	4.908923	5.010372	5.113820	5.219306	5.326866
23	5.277092	5.391160	5.507585	5.626412	5.747689
24	5.672874	5.800888	5.931669	6.065272	6.201756
25	6.098340	6.241756	6.388407	6.538363	6.691695
26	6.555715	6.716129	6.880314	7.048355	7.220339
27	7.047394	7.226555	7.410099	7.598127	7.790745
28	7.575948	7.775773	7.980676	8.190781	8.406214
29	8.144144	8.366732	8.595188	8.829662	9.070305
30	8.754955	9.002604	9.257018	9.518375	9.786859
31	9.411577	9.686802	9.969808	10.260809	10.560021
32	10.117445	10.422999	10.737483	11.061152	11.394263
33	10.876253	11.215147	11.564270	11.923921	12.294410
34	11.691972	12.067498	12.454718	12.853987	13.265668
35	12.568870	12.984628	13.413732	13.856598	14.313656
36	13.511536	13.971459	14.446589	14.937413	15.444434
37	14.524901	15.033290	15.558976	16.102531	16.664545
38	15.614268	16.175820	16.757018	17.358529	17.981044
39	16.785339	17.405183	18.047308	18.712494	19.401546
40	18.044239	18.727976	19.436951	20.172068	20.934268
41	19.397557	20.151303	20.933596	21.745490	22.588076
42	20.852374	21.682802	22.545483	23.441638	24.372534
43	22.416302	23.330695	24.281485	25.270086	26.297964
44	24.097524	25.103827	26.151159	27.241152	28.375503
45	25.904839	27.011718	28.164798	29.365962	30.617168
46	27.847702	29.064609	30.333488	31.656507	33.035924
47	29.936279	31.273519	32.669167	34.125715	35.645762
48	32.181500	33.650306	35.184692	36.787521	38.461777
49	34.595113	36.207730	37.893914	39.656947	41.500257
50	37.189746	38.959517	40.811745	42.750189	44.778778

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	8.0 %	8.1 %	8.2 %	8.3 %	8.4 %
1	1.080000	1.081000	1.082000	1.083000	1.084000
2	1.166400	1.168561	1.170724	1.172889	1.175056
3	1.259712	1.263214	1.266723	1.270239	1.273761
4	1.360489	1.365535	1.370595	1.375669	1.380757
5	1.469328	1.476143	1.482983	1.489849	1.496740
6	1.586874	1.595711	1.604588	1.613507	1.622466
7	1.713824	1.724963	1.736164	1.747428	1.758754
8	1.850930	1.864685	1.878530	1.892464	1.906489
9	1.999005	2.015725	2.032569	2.049539	2.066634
10	2.158925	2.178999	2.199240	2.219650	2.240231
11	2.331639	2.355497	2.379578	2.403881	2.428411
12	2.518170	2.546293	2.574703	2.603403	2.632397
13	2.719624	2.752542	2.785829	2.819486	2.853518
14	2.937194	2.975498	3.014267	3.053503	3.093214
15	3.172169	3.216514	3.261436	3.306944	3.353044
16	3.425943	3.477051	3.528874	3.581420	3.634700
17	3.700018	3.758692	3.818242	3.878678	3.940014
18	3.996019	4.063147	4.131338	4.200609	4.270975
19	4.315701	4.392261	4.470107	4.549259	4.629737
20	4.660957	4.748035	4.836656	4.926848	5.018635
21	5.033834	5.132625	5.233262	5.335776	5.440201
22	5.436540	5.548368	5.662389	5.778645	5.897178
23	5.871464	5.997786	6.126705	6.258273	6.392541
24	6.341181	6.483607	6.629095	6.777710	6.929514
25	6.848475	7.008779	7.172681	7.340260	7.511593
26	7.396353	7.576490	7.760841	7.949501	8.142567
27	7.988061	8.190185	8.397230	8.609310	8.826543
28	8.627106	8.853590	9.085803	9.323882	9.567972
29	9.317275	9.570731	9.830839	10.097765	10.371682
30	10.062657	10.345961	10.636967	10.935879	11.242903
31	10.867669	11.183983	11.509199	11.843557	12.187307
32	11.737083	12.089886	12.452953	12.826572	13.211041
33	12.676050	13.069167	13.474095	13.891178	14.320768
34	13.690134	14.127769	14.578971	15.044146	15.523713
35	14.785344	15.272119	15.774446	16.292810	16.827705
36	15.968172	16.509160	17.067951	17.645113	18.241232
37	17.245626	17.846402	18.467523	19.109657	19.773495
38	18.625276	19.291961	19.981860	20.695759	21.434469
39	20.115298	20.854610	21.620372	22.413507	23.234964
40	21.724521	22.543833	23.393243	24.273828	25.186701
41	23.462483	24.369883	25.311489	26.288555	27.302384
42	25.339482	26.343844	27.387031	28.470506	29.595784
43	27.366640	28.477695	29.632767	30.833557	32.081830
44	29.555972	30.784389	32.062654	33.392743	34.776704
45	31.920449	33.277924	34.691792	36.164340	37.697947
46	34.474085	35.973436	37.536519	39.165981	40.864575
47	37.232012	38.887284	40.614514	42.416757	44.297199
48	40.210573	42.037154	43.944904	45.937348	48.018163
49	43.427419	45.442164	47.548386	49.750148	52.051689
50	46.901613	49.122979	51.447353	53.879410	56.424031

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	8.5 %	8.6 %	8.7 %	8.8 %	8.9 %
1	1.085000	1.086000	1.087000	1.088000	1.089000
2	1.177225	1.179396	1.181569	1.183744	1.185921
3	1.277289	1.280824	1.284366	1.287913	1.291468
4	1.385859	1.390975	1.396105	1.401250	1.406409
5	1.503657	1.510599	1.517566	1.524560	1.531579
6	1.631468	1.640510	1.649595	1.658721	1.667890
7	1.770142	1.781594	1.793109	1.804689	1.816332
8	1.920604	1.934811	1.949110	1.963501	1.977985
9	2.083856	2.101205	2.118683	2.136289	2.154026
10	2.260983	2.281909	2.303008	2.324283	2.345734
11	2.453167	2.478153	2.503370	2.528820	2.554505
12	2.661686	2.691274	2.721163	2.751356	2.781855
13	2.887930	2.922723	2.957904	2.993475	3.029441
14	3.133404	3.174078	3.215242	3.256901	3.299061
15	3.399743	3.447048	3.494968	3.543508	3.592677
16	3.688721	3.743495	3.799030	3.855337	3.912425
17	4.002262	4.065435	4.129545	4.194606	4.260631
18	4.342455	4.415062	4.488816	4.563732	4.639828
19	4.711563	4.794758	4.879343	4.965340	5.052772
20	5.112046	5.207107	5.303846	5.402290	5.502469
21	5.546570	5.654918	5.765280	5.877692	5.992189
22	6.018028	6.141241	6.266860	6.394929	6.525493
23	6.529561	6.669388	6.812076	6.957682	7.106262
24	7.084574	7.242955	7.404727	7.569958	7.738720
25	7.686762	7.865849	8.048938	8.236115	8.427466
26	8.340137	8.542313	8.749196	8.960893	9.177510
27	9.049049	9.276951	9.510376	9.749451	9.994309
28	9.818218	10.074769	10.337779	10.607403	10.883802
29	10.652766	10.941199	11.237166	11.540854	11.852460
30	11.558252	11.882143	12.214799	12.556450	12.907329
31	12.540703	12.904007	13.277486	13.661417	14.056082
32	13.606663	14.013751	14.432628	14.863622	15.307073
33	14.763229	15.218934	15.688266	16.171621	16.669402
34	16.018104	16.527762	17.053146	17.594723	18.152979
35	17.379642	17.949150	18.536769	19.143059	19.768594
36	18.856912	19.492777	20.149468	20.827648	21.527999
37	20.459750	21.169156	21.902472	22.660481	23.443991
38	22.198828	22.989703	23.807987	24.654604	25.530506
39	24.085729	24.966817	25.879282	26.824209	27.802722
40	26.133016	27.113964	28.130779	29.184739	30.277164
41	28.354322	29.445765	30.578157	31.752996	32.971831
42	30.764439	31.978100	33.238457	34.547260	35.906324
43	33.379417	34.728217	36.130203	37.587419	39.101987
44	36.216667	37.714844	39.273530	40.895111	42.582064
45	39.295084	40.958320	42.690327	44.493881	46.371868
46	42.635166	44.480736	46.404386	48.409343	50.498964
47	46.259155	48.306079	50.441567	52.669365	54.993372
48	50.191183	52.460402	54.829984	57.304269	59.887782
49	54.457434	56.971996	59.600192	62.347045	65.217795
50	59.086316	61.871588	64.785409	67.833585	71.022178

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	9.0 %	9.1 %	9.2 %	9.3 %	9.4 %
1	1.090000	1.091000	1.092000	1.093000	1.094000
2	1.188100	1.190281	1.192464	1.194649	1.196836
3	1.295029	1.298597	1.302171	1.305751	1.309339
4	1.411582	1.416769	1.421970	1.427186	1.432416
5	1.538624	1.545695	1.552792	1.559915	1.567064
6	1.677100	1.686353	1.695649	1.704987	1.714368
7	1.828039	1.839811	1.851648	1.863550	1.875518
8	1.992563	2.007234	2.022000	2.036861	2.051817
9	2.171893	2.189892	2.208024	2.226289	2.244688
10	2.367364	2.389172	2.411162	2.433333	2.455688
11	2.580426	2.606587	2.632989	2.659633	2.686523
12	2.812665	2.843787	2.875224	2.906979	2.939056
13	3.065805	3.102571	3.139744	3.177328	3.215327
14	3.341727	3.384905	3.428601	3.472820	3.517568
15	3.642482	3.692932	3.744032	3.795792	3.848219
16	3.970306	4.028988	4.088483	4.148801	4.209952
17	4.327633	4.395626	4.464624	4.534639	4.605688
18	4.717120	4.795628	4.875369	4.956361	5.038622
19	5.141661	5.232030	5.323903	5.417302	5.512253
20	5.604411	5.708145	5.813702	5.921111	6.030404
21	6.108808	6.227586	6.348563	6.471775	6.597262
22	6.658600	6.794297	6.932630	7.073650	7.217405
23	7.257874	7.412578	7.570432	7.731499	7.895841
24	7.911083	8.087122	8.266912	8.450529	8.638050
25	8.623081	8.823050	9.027468	9.236428	9.450027
26	9.399158	9.625948	9.857995	10.095416	10.338330
27	10.245082	10.501909	10.764931	11.034289	11.310133
28	11.167140	11.457583	11.755304	12.060478	12.373285
29	12.172182	12.500223	12.836792	13.182103	13.536374
30	13.267678	13.637743	14.017777	14.408038	14.808793
31	14.461770	14.878778	15.307413	15.747986	16.200819
32	15.763329	16.232747	16.715695	17.212549	17.723696
33	17.182028	17.709927	18.253539	18.813316	19.389724
34	18.728411	19.321530	19.932864	20.562954	21.212358
35	20.413968	21.079790	21.766688	22.475309	23.206320
36	22.251225	22.998050	23.769223	24.565513	25.387714
37	24.253835	25.090873	25.955991	26.850105	27.774159
38	26.436680	27.374142	28.343942	29.347165	30.384930
39	28.815982	29.865189	30.951585	32.076451	33.241113
40	31.409420	32.582922	33.799131	35.059561	36.365778
41	34.236268	35.547967	36.908651	38.320101	39.784161
42	37.317532	38.782833	40.304247	41.883870	43.523872
43	40.676110	42.312070	44.012238	45.779070	47.615116
44	44.336960	46.162469	48.061364	50.036523	52.090937
45	48.327286	50.363253	52.483009	54.689920	56.987485
46	52.676742	54.946309	57.311446	59.776083	62.344308
47	57.417649	59.946424	62.584099	65.335258	68.204673
48	62.585237	65.401548	68.341836	71.411437	74.615913
49	68.217908	71.353089	74.629285	78.052701	81.629809
50	74.357520	77.846220	81.495179	85.311602	89.303011

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	9.5 %	9.6 %	9.7 %	9.8 %	9.9 %
1	1.095000	1.096000	1.097000	1.098000	1.099000
2	1.199025	1.201216	1.203409	1.205604	1.207801
3	1.312932	1.316533	1.320140	1.323753	1.327373
4	1.437661	1.442920	1.448193	1.453481	1.458783
5	1.574239	1.581440	1.588668	1.595922	1.603203
6	1.723791	1.733258	1.742769	1.752323	1.761920
7	1.887552	1.899651	1.911817	1.924050	1.936350
8	2.066869	2.082018	2.097264	2.112607	2.128049
9	2.263222	2.281891	2.300698	2.319643	2.338725
10	2.478228	2.500953	2.523866	2.546967	2.570259
11	2.713659	2.741045	2.768681	2.796570	2.824715
12	2.971457	3.004185	3.037243	3.070634	3.104362
13	3.253745	3.292587	3.331856	3.371556	3.411693
14	3.562851	3.608675	3.655045	3.701969	3.749451
15	3.901322	3.955108	4.009585	4.064762	4.120647
16	4.271948	4.334798	4.398515	4.463108	4.528591
17	4.677783	4.750939	4.825171	4.900493	4.976921
18	5.122172	5.207029	5.293212	5.380741	5.469636
19	5.608778	5.706903	5.806654	5.908054	6.011130
20	6.141612	6.254766	6.369899	6.487043	6.606232
21	6.725065	6.855224	6.987779	7.122774	7.260249
22	7.363946	7.513325	7.665594	7.820805	7.979014
23	8.063521	8.234605	8.409156	8.587244	8.768937
24	8.829556	9.025127	9.224845	9.428794	9.637061
25	9.668364	9.891539	10.119655	10.352816	10.591130
26	10.586858	10.841126	11.101261	11.367392	11.639652
27	11.592610	11.881875	12.178083	12.481397	12.791978
28	12.693908	13.022534	13.359358	13.704573	14.058384
29	13.899829	14.272698	14.655215	15.047622	15.450164
30	15.220313	15.642877	16.076771	16.522289	16.979730
31	16.666242	17.144593	17.636218	18.141473	18.660723
32	18.249535	18.790474	19.346931	19.919337	20.508135
33	19.983241	20.594359	21.223583	21.871432	22.538440
34	21.881649	22.571418	23.282271	24.014833	24.769745
35	23.960406	24.738274	25.540651	26.368286	27.221950
36	26.236644	27.113148	28.018094	28.952378	29.916923
37	28.729126	29.716011	30.735849	31.789711	32.878699
38	31.458393	32.568748	33.717227	34.905103	36.133690
39	34.446940	35.695347	36.987798	38.325803	39.710925
40	37.719399	39.122101	40.575614	42.081732	43.642307
41	41.302742	42.877822	44.511449	46.205742	47.962895
42	45.226503	46.994093	48.829059	50.733904	52.711222
43	49.523020	51.505526	53.565478	55.705827	57.929633
44	54.227707	56.450057	58.761329	61.164998	63.664666
45	59.379340	61.869262	64.461178	67.159168	69.967468
46	65.020377	67.808711	70.713913	73.740766	76.894248
47	71.197313	74.318348	77.573162	80.967361	84.506778
48	77.961057	81.452909	85.097759	88.902163	92.872949
49	85.367358	89.272388	93.352242	97.614575	102.067371
50	93.477257	97.842538	102.407409	107.180803	112.172041

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	10.0 %	10.1 %	10.2 %	10.3 %	10.4 %
1	1.100000	1.101000	1.102000	1.103000	1.104000
2	1.210000	1.212201	1.214404	1.216609	1.218816
3	1.331000	1.334633	1.338273	1.341920	1.345573
4	1.464100	1.469431	1.474777	1.480137	1.485512
5	1.610510	1.617844	1.625204	1.632592	1.640006
6	1.771561	1.781246	1.790975	1.800749	1.810566
7	1.948717	1.961152	1.973655	1.986226	1.998865
8	2.143589	2.159228	2.174967	2.190807	2.206747
9	2.357948	2.377310	2.396814	2.416460	2.436249
10	2.593742	2.617419	2.641289	2.665355	2.689619
11	2.853117	2.881778	2.910701	2.939887	2.969339
12	3.138428	3.172837	3.207592	3.242695	3.278150
13	3.452271	3.493294	3.534766	3.576693	3.619078
14	3.797498	3.846117	3.895313	3.945092	3.995462
15	4.177248	4.234575	4.292635	4.351437	4.410990
16	4.594973	4.662267	4.730483	4.799635	4.869733
17	5.054470	5.133156	5.212993	5.293997	5.376186
18	5.559917	5.651604	5.744718	5.839279	5.935309
19	6.115909	6.222416	6.330679	6.440725	6.552581
20	6.727500	6.850880	6.976408	7.104119	7.234049
21	7.400250	7.542819	7.688002	7.835844	7.986390
22	8.140275	8.304644	8.472178	8.642936	8.816975
23	8.954302	9.143413	9.336340	9.533158	9.733941
24	9.849733	10.066898	10.288647	10.515073	10.746270
25	10.834706	11.083654	11.338089	11.598126	11.863882
26	11.918177	12.203103	12.494574	12.792733	13.097726
27	13.109994	13.435617	13.769021	14.110384	14.459890
28	14.420994	14.792614	15.173461	15.563754	15.963718
29	15.863093	16.286668	16.721154	17.166820	17.623945
30	17.449402	17.931622	18.426711	18.935003	19.456835
31	19.194342	19.742716	20.306236	20.885308	21.480346
32	21.113777	21.736730	22.377472	23.036495	23.714302
33	23.225154	23.932140	24.659974	25.409254	26.180590
34	25.547670	26.349286	27.175292	28.026407	28.903371
35	28.102437	29.010563	29.947171	30.913127	31.909321
36	30.912681	31.940630	33.001783	34.097179	35.227891
37	34.003949	35.166634	36.367965	37.609188	38.891592
38	37.404343	38.718464	40.077497	41.482935	42.936317
39	41.144778	42.629029	44.165402	45.755677	47.401694
40	45.259256	46.934561	48.670273	50.468512	52.331470
41	49.785181	51.674952	53.634641	55.666768	57.773943
42	54.763699	56.894122	59.105374	61.400446	63.782433
43	60.240069	62.640428	65.134122	67.724691	70.415806
44	66.264076	68.967111	71.777803	74.700335	77.739050
45	72.890484	75.932789	79.099138	82.394469	85.823911
46	80.179532	83.602001	87.167251	90.881099	94.749598
47	88.197485	92.045803	96.058310	100.241853	104.603556
48	97.017234	101.342429	105.856258	110.566763	115.482326
49	106.718957	111.578015	116.653596	121.955140	127.492488
50	117.390853	122.847394	128.552263	134.516520	140.751707

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$(1 + i)^t$

t	10.0 %	10.1 %	10.2 %	10.3 %	10.4 %
1	1.100000	1.101000	1.102000	1.103000	1.104000
2	1.210000	1.212201	1.214404	1.216609	1.218816
3	1.331000	1.334633	1.338273	1.341920	1.345573
4	1.464100	1.469431	1.474777	1.480137	1.485512
5	1.610510	1.617844	1.625204	1.632592	1.640006
6	1.771561	1.781246	1.790975	1.800749	1.810566
7	1.948717	1.961152	1.973655	1.986226	1.998865
8	2.143589	2.159228	2.174967	2.190807	2.206747
9	2.357948	2.377310	2.396814	2.416460	2.436249
10	2.593742	2.617419	2.641289	2.665355	2.689619
11	2.853117	2.881778	2.910701	2.939887	2.969339
12	3.138428	3.172837	3.207592	3.242695	3.278150
13	3.452271	3.493294	3.534766	3.576693	3.619078
14	3.797498	3.846117	3.895313	3.945092	3.995462
15	4.177248	4.234575	4.292635	4.351437	4.410990
16	4.594973	4.662267	4.730483	4.799635	4.869733
17	5.054470	5.133156	5.212993	5.293997	5.376186
18	5.559917	5.651604	5.744718	5.839279	5.935309
19	6.115909	6.222416	6.330679	6.440725	6.552581
20	6.727500	6.850880	6.976408	7.104119	7.234049
21	7.400250	7.542819	7.688002	7.835844	7.986390
22	8.140275	8.304644	8.472178	8.642936	8.816975
23	8.954302	9.143413	9.336340	9.533158	9.733941
24	9.849733	10.066898	10.288647	10.515073	10.746270
25	10.834706	11.083654	11.338089	11.598126	11.863882
26	11.918177	12.203103	12.494574	12.792733	13.097726
27	13.109994	13.435617	13.769021	14.110384	14.459890
28	14.420994	14.792614	15.173461	15.563754	15.963718
29	15.863093	16.286668	16.721154	17.166820	17.623945
30	17.449402	17.931622	18.426711	18.935003	19.456835
31	19.194342	19.742716	20.306236	20.885308	21.480346
32	21.113777	21.736730	22.377472	23.036495	23.714302
33	23.225154	23.932140	24.659974	25.409254	26.180590
34	25.547670	26.349286	27.175292	28.026407	28.903371
35	28.102437	29.010563	29.947171	30.913127	31.909321
36	30.912681	31.940630	33.001783	34.097179	35.227891
37	34.003949	35.166634	36.367965	37.609188	38.891592
38	37.404343	38.718464	40.077497	41.482935	42.936317
39	41.144778	42.629029	44.165402	45.755677	47.401694
40	45.259256	46.934561	48.670273	50.468512	52.331470
41	49.785181	51.674952	53.634641	55.666768	57.773943
42	54.763699	56.894122	59.105374	61.400446	63.782433
43	60.240069	62.640428	65.134122	67.724691	70.415806
44	66.264076	68.967111	71.777803	74.700335	77.739050
45	72.890484	75.932789	79.099138	82.394469	85.823911
46	80.179532	83.602001	87.167251	90.881099	94.749598
47	88.197485	92.045803	96.058310	100.241853	104.603556
48	97.017234	101.342429	105.856258	110.566763	115.482326
49	106.718957	111.578015	116.653596	121.955140	127.492488
50	117.390853	122.847394	128.552263	134.516520	140.751707

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	10.5 %	10.6 %	10.7 %	10.8 %	10.9 %
1	1.105000	1.106000	1.107000	1.108000	1.109000
2	1.221025	1.223236	1.225449	1.227664	1.229881
3	1.349233	1.352899	1.356572	1.360252	1.363938
4	1.490902	1.496306	1.501725	1.507159	1.512607
5	1.647447	1.654915	1.662410	1.669932	1.677481
6	1.820429	1.830336	1.840288	1.850285	1.860327
7	2.011574	2.024351	2.037198	2.050115	2.063103
8	2.222789	2.238933	2.255179	2.271528	2.287981
9	2.456182	2.476259	2.496483	2.516853	2.537371
10	2.714081	2.738743	2.763607	2.788673	2.813944
11	2.999059	3.029050	3.059312	3.089850	3.120664
12	3.313961	3.350129	3.386659	3.423554	3.460816
13	3.661926	3.705243	3.749031	3.793297	3.838045
14	4.046429	4.097998	4.150178	4.202973	4.256392
15	4.471304	4.532386	4.594247	4.656895	4.720339
16	4.940791	5.012819	5.085831	5.159839	5.234856
17	5.459574	5.544178	5.630015	5.717102	5.805455
18	6.032829	6.131861	6.232427	6.334549	6.438250
19	6.666276	6.781838	6.899296	7.018680	7.140019
20	7.366235	7.500713	7.637521	7.776698	7.918281
21	8.139690	8.295788	8.454736	8.616581	8.781374
22	8.994357	9.175142	9.359392	9.547172	9.738544
23	9.938764	10.147707	10.360847	10.578266	10.800045
24	10.982335	11.223364	11.469458	11.720719	11.977250
25	12.135480	12.413041	12.696690	12.986557	13.282770
26	13.409705	13.728823	14.055236	14.389105	14.730592
27	14.817724	15.184078	15.559146	15.943128	16.336226
28	16.373585	16.793590	17.223975	17.664986	18.116875
29	18.092812	18.573711	19.066940	19.572804	20.091615
30	19.992557	20.542524	21.107103	21.686667	22.281601
31	22.091775	22.720032	23.365563	24.028827	24.710295
32	24.411412	25.128355	25.865678	26.623940	27.403717
33	26.974610	27.791961	28.633306	29.499326	30.390722
34	29.806944	30.737909	31.697069	32.685253	33.703311
35	32.936673	33.996127	35.088656	36.215261	37.376972
36	36.395024	37.599717	38.843142	40.126509	41.451062
37	40.216501	41.585286	42.999358	44.460172	45.969228
38	44.439234	45.993327	47.600289	49.261870	50.979874
39	49.105354	50.868620	52.693520	54.582152	56.536680
40	54.261416	56.260693	58.331727	60.477025	62.699178
41	59.958864	62.224327	64.573222	67.008543	69.533388
42	66.254545	68.820105	71.482557	74.245466	77.112528
43	73.211272	76.115036	79.131190	82.263976	85.517793
44	80.898456	84.183230	87.598228	91.148486	94.839232
45	89.392794	93.106653	96.971238	100.992522	105.176709
46	98.779037	102.975958	107.347160	111.899714	116.640970
47	109.150836	113.891409	118.833306	123.984884	129.354836
48	120.611674	125.963899	131.548470	137.375251	143.454513
49	133.275900	139.316072	145.624157	152.211778	159.091055
50	147.269869	154.083576	161.205941	168.650650	176.431980

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	11 %	12 %	13 %	14 %	15 %
1	1.110000	1.120000	1.130000	1.140000	1.150000
2	1.232100	1.254400	1.276900	1.299600	1.322500
3	1.367631	1.404928	1.442897	1.481544	1.520875
4	1.518070	1.573519	1.630474	1.688960	1.749006
5	1.685058	1.762342	1.842435	1.925415	2.011357
6	1.870415	1.973823	2.081952	2.194973	2.313061
7	2.076160	2.210681	2.352605	2.502269	2.660020
8	2.304538	2.475963	2.658444	2.852586	3.059023
9	2.558037	2.773079	3.004042	3.251949	3.517876
10	2.839421	3.105848	3.394567	3.707221	4.045558
11	3.151757	3.478550	3.835861	4.226232	4.652391
12	3.498451	3.895976	4.334523	4.817905	5.350250
13	3.883280	4.363493	4.898011	5.492411	6.152788
14	4.310441	4.887112	5.534753	6.261349	7.075706
15	4.784589	5.473566	6.254270	7.137938	8.137062
16	5.310894	6.130394	7.067326	8.137249	9.357621
17	5.895093	6.866041	7.986078	9.276464	10.761264
18	6.543553	7.689966	9.024268	10.575169	12.375454
19	7.263344	8.612762	10.197423	12.055693	14.231772
20	8.062312	9.646293	11.523088	13.743490	16.366537
21	8.949166	10.803848	13.021089	15.667578	18.821518
22	9.933574	12.100310	14.713831	17.861039	21.644746
23	11.026267	13.552347	16.626629	20.361585	24.891458
24	12.239157	15.178629	18.788091	23.212207	28.625176
25	13.585464	17.000064	21.230542	26.461916	32.918953
26	15.079865	19.040072	23.990513	30.166584	37.856796
27	16.738650	21.324881	27.109279	34.389906	43.535315
28	18.579901	23.883866	30.633486	39.204493	50.065612
29	20.623691	26.749930	34.615839	44.693122	57.575454
30	22.892297	29.959922	39.115898	50.950159	66.211772
31	25.410449	33.555113	44.200965	58.083181	76.143538
32	28.205599	37.581726	49.947090	66.214826	87.565068
33	31.308214	42.091533	56.440212	75.484902	100.699829
34	34.752118	47.142517	63.777439	86.052788	115.804803
35	38.574851	52.799620	72.068506	98.100178	133.175523
36	42.818085	59.135574	81.437412	111.834203	153.151852
37	47.528074	66.231843	92.024276	127.490992	176.124630
38	52.756162	74.179664	103.987432	145.339731	202.543324
39	58.559340	83.081224	117.505798	165.687293	232.924823
40	65.000867	93.050970	132.781552	188.883514	267.863546
41	72.150963	104.217087	150.043153	215.327206	308.043078
42	80.087569	116.723137	169.548763	245.473015	354.249540
43	88.897201	130.729914	191.590103	279.839237	407.386971
44	98.675893	146.417503	216.496816	319.016730	468.495017
45	109.530242	163.987604	244.641402	363.679072	538.769269
46	121.578568	183.666116	276.444784	414.594142	619.584659
47	134.952211	205.706050	312.382606	472.637322	712.522358
48	149.796954	230.390776	352.992345	538.806547	819.400712
49	166.274619	258.037669	398.881350	614.239464	942.310819
50	184.564827	289.002190	450.735925	700.232988	1083.657442

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	16 %	17 %	18 %
1	1.160000	1.170000	1.180000
2	1.345600	1.368900	1.392400
3	1.560896	1.601613	1.643032
4	1.810639	1.873887	1.938778
5	2.100342	2.192448	2.287758
6	2.436396	2.565164	2.699554
7	2.826220	3.001242	3.185474
8	3.278415	3.511453	3.758859
9	3.802961	4.108400	4.435454
10	4.411435	4.806828	5.233836
11	5.117265	5.623989	6.175926
12	5.936027	6.580067	7.287593
13	6.885791	7.698679	8.599359
14	7.987518	9.007454	10.147244
15	9.265521	10.538721	11.973748
16	10.748004	12.330304	14.129023
17	12.467685	14.426456	16.672247
18	14.462514	16.878953	19.673251
19	16.776517	19.748375	23.214436
20	19.460759	23.105599	27.393035
21	22.574481	27.033551	32.323781
22	26.186398	31.629255	38.142061
23	30.376222	37.006228	45.007632
24	35.236417	43.297287	53.109006
25	40.874244	50.657826	62.668627
26	47.414123	59.269656	73.948980
27	55.000382	69.345497	87.259797
28	63.800444	81.134232	102.966560
29	74.008515	94.927051	121.500541
30	85.849877	111.064650	143.370638
31	99.585857	129.945641	169.177353
32	115.519594	152.036399	199.629277
33	134.002729	177.882587	235.562547
34	155.443166	208.122627	277.963805
35	180.314073	243.503474	327.997290
36	209.164324	284.899064	387.036802
37	242.630616	333.331905	456.703427
38	281.451515	389.998329	538.910044
39	326.483757	456.298045	635.913852
40	378.721158	533.868713	750.378345
41	439.316544	624.626394	885.446447
42	509.607191	730.812881	1044.826807
43	591.144341	855.051071	1232.895633
44	685.727436	1000.409753	1454.816847
45	795.443826	1170.479411	1716.683879
46	922.714838	1369.460910	2025.686977
47	1070.349212	1602.269265	2390.310633
48	1241.605086	1874.655040	2820.566547
49	1440.261900	2193.346397	3328.268525
50	1670.703804	2566.215284	3927.356860

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	19 %	20 %	21 %
1	1.190000	1.200000	1.210000
2	1.416100	1.440000	1.464100
3	1.685159	1.728000	1.771561
4	2.005339	2.073600	2.143589
5	2.386354	2.488320	2.593742
6	2.839761	2.985984	3.138428
7	3.379315	3.583181	3.797498
8	4.021385	4.299817	4.594973
9	4.785449	5.159780	5.559917
10	5.694684	6.191736	6.727500
11	6.776674	7.430084	8.140275
12	8.064242	8.916100	9.849733
13	9.596448	10.699321	11.918177
14	11.419773	12.839185	14.420994
15	13.589530	15.407022	17.449402
16	16.171540	18.488426	21.113777
17	19.244133	22.186111	25.547670
18	22.900518	26.623333	30.912681
19	27.251616	31.948000	37.404343
20	32.429423	38.337600	45.259256
21	38.591014	46.005120	54.763699
22	45.923307	55.206144	66.264076
23	54.648735	66.247373	80.179532
24	65.031994	79.496847	97.017234
25	77.388073	95.396217	117.390853
26	92.091807	114.475460	142.042932
27	109.589251	137.370552	171.871948
28	130.411208	164.844662	207.965057
29	155.189338	197.813595	251.637719
30	184.675312	237.376314	304.481640
31	219.763621	284.851577	368.422784
32	261.518710	341.821892	445.791568
33	311.207264	410.186270	539.407798
34	370.336645	492.223524	652.683435
35	440.700607	590.668229	789.746957
36	524.433722	708.801875	955.593818
37	624.076130	850.562250	1156.268519
38	742.650594	1020.674700	1399.084909
39	883.754207	1224.809640	1692.892739
40	1051.667507	1469.771568	2048.400215
41	1251.484333	1763.725882	2478.564260
42	1489.266356	2116.471058	2999.062754
43	1772.226964	2539.765269	3628.865933
44	2108.950087	3047.718323	4390.927778
45	2509.650603	3657.261988	5313.022612
46	2986.484218	4388.714386	6428.757360
47	3553.916219	5266.457263	7778.796406
48	4229.160301	6319.748715	9412.343651
49	5032.700758	7583.698458	11388.935818
50	5988.913902	9100.438150	13780.612340

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	22 %	23 %	24 %
1	1.220000	1.230000	1.240000
2	1.488400	1.512900	1.537600
3	1.815848	1.860867	1.906624
4	2.215335	2.288866	2.364214
5	2.702708	2.815306	2.931625
6	3.297304	3.462826	3.635215
7	4.022711	4.259276	4.507667
8	4.907707	5.238909	5.589507
9	5.987403	6.443859	6.930988
10	7.304631	7.925946	8.594426
11	8.911650	9.748914	10.657088
12	10.872213	11.991164	13.214789
13	13.264100	14.749132	16.386338
14	16.182202	18.141432	20.319059
15	19.742287	22.313961	25.195633
16	24.085590	27.446172	31.242585
17	29.384420	33.758792	38.740806
18	35.848992	41.523314	48.038599
19	43.735771	51.073676	59.567863
20	53.357640	62.820622	73.864150
21	65.096321	77.269364	91.591546
22	79.417512	95.041318	113.573517
23	96.889364	116.900822	140.831161
24	118.205024	143.788010	174.630639
25	144.210130	176.859253	216.541993
26	175.936358	217.536881	268.512071
27	214.642357	267.570364	332.954968
28	261.863675	329.111547	412.864160
29	319.473684	404.807203	511.951559
30	389.757894	497.912860	634.819933
31	475.504631	612.432818	787.176717
32	580.115650	753.292366	976.099129
33	707.741093	926.549610	1210.362920
34	863.444133	1139.656020	1500.850021
35	1053.401842	1401.776905	1861.054026
36	1285.150248	1724.185593	2307.706992
37	1567.883302	2120.748279	2861.556670
38	1912.817629	2608.520383	3548.330270
39	2333.637507	3208.480071	4399.929535
40	2847.037759	3946.430488	5455.912624
41	3473.386066	4854.109500	6765.331653
42	4237.531000	5970.554685	8389.011250
43	5169.787820	7343.782263	10402.373950
44	6307.141140	9032.852183	12898.943698
45	7694.712191	11110.408185	15994.690186
46	9387.548873	13665.802068	19833.415831
47	11452.809626	16808.936543	24593.435630
48	13972.427743	20674.991948	30495.860181
49	17046.361847	25430.240096	37814.866624
50	20796.561453	31279.195318	46890.434614

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	25 %	26 %	27 %
1	1.250000	1.260000	1.270000
2	1.562500	1.587600	1.612900
3	1.953125	2.000376	2.048383
4	2.441406	2.520474	2.601446
5	3.051758	3.175797	3.303837
6	3.814697	4.001504	4.195873
7	4.768372	5.041895	5.328759
8	5.960464	6.352788	6.767523
9	7.450581	8.004513	8.594755
10	9.313226	10.085686	10.915339
11	11.641532	12.707965	13.862480
12	14.551915	16.012035	17.605350
13	18.189894	20.175165	22.358794
14	22.737368	25.420707	28.395668
15	28.421709	32.030091	36.062499
16	35.527137	40.357915	45.799373
17	44.408921	50.850973	58.165204
18	55.511151	64.072226	73.869809
19	69.388939	80.731005	93.814658
20	86.736174	101.721066	119.144615
21	108.420217	128.168543	151.313661
22	135.525272	161.492364	192.168350
23	169.406589	203.480379	244.053804
24	211.758237	256.385277	309.948332
25	264.697796	323.045450	393.634381
26	330.872245	407.037266	499.915664
27	413.590306	512.866956	634.892893
28	516.987883	646.212364	806.313974
29	646.234854	814.227579	1024.018748
30	807.793567	1025.926749	1300.503809
31	1009.741959	1292.667704	1651.639838
32	1262.177448	1628.761307	2097.582594
33	1577.721810	2052.239247	2663.929895
34	1972.152263	2585.821452	3383.190966
35	2465.190329	3258.135029	4296.652527
36	3081.487911	4105.250137	5456.748710
37	3851.859889	5172.615172	6930.070861
38	4814.824861	6517.495117	8801.189994
39	6018.531076	8212.043848	11177.511292
40	7523.163845	10347.175248	14195.439341
41	9403.954807	13037.440812	18028.207963
42	11754.943508	16427.175424	22895.824113
43	14693.679385	20698.241034	29077.696623
44	18367.099232	26079.783702	36928.674712
45	22958.874039	32860.527465	46899.416884
46	28698.592549	41404.264606	59562.259442
47	35873.240687	52169.373404	75644.069492
48	44841.550858	65733.410489	96067.968254
49	56051.938573	82824.097216	122006.319683
50	70064.923216	104358.362492	154948.025997

FACTOR DE CALCUL A DOBANZII COMPUSE

$$(1 + i)^t$$

t	28 %	29 %	30 %
1	1.280000	1.290000	1.300000
2	1.638400	1.664100	1.690000
3	2.097152	2.146689	2.197000
4	2.684355	2.769229	2.856100
5	3.435974	3.572305	3.712930
6	4.398047	4.608274	4.826809
7	5.629500	5.944673	6.274852
8	7.205759	7.668628	8.157307
9	9.223372	9.892530	10.604499
10	11.805916	12.761364	13.785849
11	15.111573	16.462160	17.921604
12	19.342813	21.236186	23.298085
13	24.758801	27.394680	30.287511
14	31.691265	35.339137	39.373764
15	40.564819	45.587487	51.185893
16	51.922969	58.807859	66.541661
17	66.461400	75.862137	86.504159
18	85.070592	97.862157	112.455407
19	108.890357	126.242183	146.192029
20	139.379657	162.852416	190.049638
21	178.405962	210.079617	247.064529
22	228.359631	271.002705	321.183888
23	292.300327	349.593490	417.539054
24	374.144419	450.975602	542.800770
25	478.904857	581.758527	705.641001
26	612.998216	750.468500	917.333302
27	784.637717	968.104365	1192.533293
28	1004.336278	1248.854630	1550.293280
29	1285.550435	1611.022473	2015.381264
30	1645.504557	2078.218990	2619.995644
31	2106.245833	2680.902497	3405.994337
32	2695.994667	3458.364222	4427.792638
33	3450.873173	4461.289846	5756.130429
34	4417.117662	5755.063901	7482.969558
35	5653.910607	7424.032433	9727.860425
36	7237.005577	9577.001838	12646.218553
37	9263.367139	12354.332371	16440.084119
38	11857.109938	15937.088759	21372.109354
39	15177.100721	20558.844499	27783.742160
40	19426.688922	26520.909403	36118.864808
41	24866.161820	34211.973130	46954.524251
42	31828.687130	44133.445338	61040.881526
43	40740.719527	56932.144486	79353.145984
44	52148.120994	73442.466387	103159.089779
45	66749.594873	94740.781640	134106.816713
46	85439.481437	122215.608315	174338.861727
47	109362.536239	157658.134727	226640.520245
48	139984.046386	203378.993798	294632.676319
49	179179.579374	262358.901999	383022.479215
50	229349.861599	338442.983579	497929.222979

ERATĂ

1. Titlurile din tabla de materii nu indică corect paginația, sunt decalări de până la 4 pagini
2. În tabla de materii poziția 2 în loc de Actualizări Bancare se citește ACTUALIZĂRI
3. Pagina 2 aliniatul 3 în loc de minicalculatorului se citește CALCULATORUL
4. Pagina 11 aliniatul 3 în loc de:

$$\frac{i_0}{12} + \frac{30}{12} = 2,5 \text{ se citește}$$

$$\frac{i_1}{12} = \frac{30}{12} = 2,5$$

5. Pagina 27 aliniatul 2 se înlocuiește cu:

$$B_t = I_t(1+i)^t = \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} (1+i)^t = \frac{(1+i)^t - 1}{i}$$

6. Pagina 34 în loc de actualizări bancare se va citi ACTUALIZĂRI
7. Pagina 54 ultimul aliniat din exemplul 2.7 în loc de 3957,1 se citește 3947,1.
8. Pagina 77 în loc de două tabele se consideră că este unul singur cu datele de la 1 la 18
9. Pagina 86 din primul aliniat Ca_0 are rol de Va .

