



HAL
open science

Modèle pour repérer l'activité de sujets en résolution de problème

Mickael da Ronch, Michèle Gandit, Sylvain Gravier

► To cite this version:

Mickael da Ronch, Michèle Gandit, Sylvain Gravier. Modèle pour repérer l'activité de sujets en résolution de problème. Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques : la preuve, la modélisation et les technologies numériques. Actes de la XXI^e école d'été de didactique des mathématiques, Saint Marie De Ré, 18 au 24 Octobre 2021, 2, IREM de Paris, pp.69-78, 2023, 978-2-86612-404-5. hal-03416749

HAL Id: hal-03416749

<https://hal.science/hal-03416749v1>

Submitted on 5 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MODELE POUR REPERER L'ACTIVITE DE SUJETS EN RESOLUTION DE PROBLEME

Mickael Da Ronch*, Michèle Gandit**, Sylvain Gravier**

RÉSUMÉ

Dans cet article nous proposons de présenter un modèle pour repérer les traces d'activité d'un individu (ou groupe d'individus) placé en résolution de problème dans des situations adidactiques. Afin de recueillir un maximum de traces et d'avoir accès à l'intégralité des actions des individus nous utilisons une méthode de recueil basée sur des enregistrements audiovisuels. Notre modèle se présente en trois étapes. Une première au niveau du choix des observables : typologie et choix d'actions élémentaires, stratégies vues comme une concaténation ordonnée d'actions a_i réalisée sur des objets instanciés o_i caractérisant des mots et enfin l'encodage de ces actions en un format symbolique intelligible. Une deuxième au niveau du traitement du corpus de données en lien avec la retranscription et ses résumés. Cette seconde étape est dépourvue d'interprétation, elle est de fait complètement déterministe et permet lors de la lecture de rejouer chacune des actions réalisées par les sujets. Enfin, la troisième et dernière étape consiste à analyser cette retranscription, c'est-à-dire rechercher des séquences de mots $a_i o_i$ « analogues » aux stratégies identifiées dans l'analyse épistémologique du problème afin d'induire si les sujets sont entrés dans une démarche scientifique — mathématique dans notre contexte d'étude.

Mots-clefs : modèle de traitement et d'analyse ; typologie des actions, stratégie ; micro-activité, résumé.

ABSTRACT

In this article we propose to present a model for tracking the activity traces of an individual or group of individuals placed in autonomous problem solving. In order to collect as many traces as possible and to have access to all the actions of the individuals we use a collection method based on audiovisual recordings. Our model is presented in three stages. The first stage concerns the choice of observables: typology and choice of elementary actions, strategies seen as an ordered concatenation of actions a_i carried out on instantiated objects o_i characterizing words and finally the encoding of these actions in an intelligible symbolic format. A second one at the level of the processing of the corpus of data in connection with the retranscription and its summaries. This second stage is devoid of interpretation, it is in fact completely deterministic and allows the replay of each of the actions performed by the subjects. The third and final step consists in analyzing this transcript, i.e. looking for sequences of words $a_i o_i$ "analogous" to the strategies identified in the epistemological analysis of the problem in order to infer whether the subjects have entered into a scientific process and more exactly mathematics in our study context.

Keywords: processing and analysis model; typology of actions, strategy; micro-activity, summary.

INTRODUCTION

Une des parties de notre travail de recherche a consisté à élaborer une ingénierie didactique à partir d'un problème contemporain en mathématiques discrètes : *The Domino Problem* (Wang, 1961). L'objectif était de favoriser la pratique de l'activité mathématique en tant que démarche de recherche, dans des institutions spécifiques (Centres de Culture Scientifique), et ce à travers des modalités adidactiques excluant complètement la présence de médiateur. A cette occasion, nous avons eu besoin de développer un modèle permettant de traiter et d'analyser les données audiovisuelles recueillies lors d'expérimentations afin de repérer des traces d'activité permettant d'inférer si le sujet (ou groupe de sujets) est entré dans une pratique de recherche.

Le modèle que nous avons développé vise donc à repérer ces traces par rapport à nos connaissances sur la résolution du problème donné. La méthode de recueil des données est basée sur des enregistrements audiovisuels d'activité d'individu (ou groupe d'individus) placé

* Haute École Pédagogique du Valais (Suisse) ; Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-Université Grenoble Alpes (France)

** Institut Fourier, UMR 5582 CNRS-Université Grenoble Alpes (France)

en résolution de problèmes grâce à un dispositif de caméras posées sur des trépieds. On cherche à retranscrire le plus fidèlement possible les actions de sujets réalisées sur des objets¹ en vue de les analyser. Dans cet article, nous proposons de présenter ce modèle en l'illustrant par des exemples issus ou non de nos situations expérimentées (Da Ronch et al., 2020, 2021). Ce texte se situe à un niveau théorique et n'a donc pas pour vocation de décrire un récit d'expériences. Ainsi, nous faisons le choix de ne pas évoquer les conditions d'expérimentations de nos situations, mais nous prendrons tout de même appui sur des exemples simples et des données recueillies dans le cadre de nos recherches, afin de démontrer le caractère opérationnel de notre modèle.

Dans la suite du texte, nous présenterons donc ce modèle constitué de trois étapes principales : le choix des observables, la retranscription des données audiovisuelles d'expériences et enfin l'analyse de ces dernières. Nous terminerons par une discussion en pointant les forces mais aussi les limites de ce dernier et les perspectives possibles autour de l'Intelligence Artificielle.

DESCRIPTION DU MODÈLE

1. Choix des observables

Typologie et choix d'actions élémentaires

Il nous faut d'abord identifier des actions élémentaires a_i . Parmi ces actions nous conservons un sous-ensemble \mathcal{A} pour des raisons épistémologiques, c'est-à-dire des actions qui ont un lien étroit avec la résolution du problème ou bien pour des raisons didactiques. De plus, comme nous souhaitons traiter un corpus de données audiovisuelles nous imposons que l'ensemble \mathcal{A} de ces actions élémentaires soit fini.

En outre, chaque action élémentaire identifiée est réalisée dans un milieu, celui de la situation conçue à cet effet. Ces actions sont bien entendu de natures diverses et ont des fonctionnalités différentes dans la résolution d'un problème \mathcal{P} donné. Dans la littérature, on retrouve une caractérisation du milieu dans lequel le sujet (ou groupe de sujets) agit selon trois espaces : le micro-espace, le méso-espace et enfin le macro-espace (voir p.ex., Berthelot & Salin, 1992; Brousseau, 1983; Galvez, 1985). Cette caractérisation permet d'engendrer une valeur de la « taille » de l'espace dans lequel le sujet (ou groupe de sujets) entre en interaction (Berthelot et Salin, 1992, p. 98). Par exemple, le micro-espace est « l'espace d'interactions liées à la manipulation des petits objets » (*ibid.*, p. 99) et le méso-espace, selon Brousseau (1983) et repris par Berthelot et Salin (1992), est défini comme :

« L'espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue, les objets sont fixes et mesurent entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet » (D'après Brousseau 1983 cité par Berthelot et Salin, 1992, p. 99).

Bien que cette classification permette de structurer le milieu selon la valeur de la variable concernant la « taille » de l'espace, elle est, pour nos besoins, trop générale. En outre, elle ne permet pas réellement de catégoriser finement nos actions élémentaires, d'autant plus que ces espaces sont en réalité encapsulés. Ainsi, il nous semble plus pertinent de catégoriser notre milieu selon différentes zones qui dépendent de leur fonctionnalité. Ceci nous donnera l'avantage de pouvoir typer nos actions $a_i \in \mathcal{A}$ en fonction de ces zones sur lesquelles le sujet (ou groupe de sujets) va agir. De manière générale, on caractérise donc le milieu en zones

¹ Ces objets peuvent être en théorie de différentes natures : objets tangibles, objets abstraits... ou éventuellement ne pas exister notamment lorsque l'action réalisée relève par exemple du dialogue.

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.

fonctionnelles : la *zone de travail* ; la *zone d'outillage* et la *zone d'information* tout en prenant en considération, dans la situation, la sphère sociale.

Ainsi, selon cette caractérisation donnée à notre milieu dans lequel le sujet (ou groupe de sujets) va agir en vue de résoudre un problème \mathcal{P} , nous proposons une typologie des actions $a_i \in \mathcal{A}$ selon quatre types.

- Les \mathcal{T} -actions qui sont les actions de modification de la *zone de travail* ($\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$). Cette $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ est la zone principale où le sujet va agir en vue de donner des éléments de réponse au problème. Les actions sur cette zone sont donc liées aux actions de résolution du problème.
- Les \mathcal{O} -actions qui sont les actions d'interaction avec la *zone d'outillage* ($\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$). Cette $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ fournit au(x) sujet(s) des objets nécessaires à l'élaboration des \mathcal{T} -actions.
- Les \mathcal{J} -actions qui sont les actions qui permettent d'accéder à la *zone d'information* ($\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$). Cette $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$ permet de communiquer des informations sur le problème : règle du jeu, consigne, exemple, etc.
- Et enfin, les $\mathcal{S}_{\mathcal{O}}$ -actions qui sont les actions relevant des interactions sociales relatives aux échanges entre pairs voire à soi-même. Elles peuvent relever d'action dans le langage oral ou d'action monstrative qui consiste à communiquer dans un langage gestuel.

Exemple « feuille-fiche-trousse » — En classe lorsqu'un élève ou étudiant est confronté à la résolution d'un problème, on pourrait dire que sa $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ relève par exemple de la feuille sur laquelle il va écrire et/ou effacer et donc modifier $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$. Pour effectuer ces modifications il va devoir interagir avec des objets qui sont à sa disposition, ce sont les objets disponibles dans sa trousse : crayon, stylo, gomme, règle... Par ces faits, il semble donc important de distinguer les \mathcal{T} -actions qui relèvent d'une modification de $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ des \mathcal{O} -actions qui consistent à interagir avec les objets de $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ nécessaires à la réalisation d'une \mathcal{T} -action. En prenant l'exemple de la *feuille-fiche-trousse*, on se rend bien compte que l'on doit dissocier le fait que le sujet prenne un stylo dans la trousse du fait qu'il écrive avec le stylo. L'action de prendre un stylo dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$, qui ici est la trousse, est en particulier une \mathcal{O} -action nécessaire et préalable mais non suffisante pour la \mathcal{T} -action qui consiste à écrire sur la feuille, donc à modifier $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$. De plus, il pourrait également y avoir une $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$ mise à disposition de l'élève ou de l'étudiant comme une fiche mentionnant le problème, les consignes, les rappels ou les points importants... Les actions réalisées dans cette zone, qui pourraient être par exemple la lecture de la consigne ou bien l'usage d'un rappel, relèvent donc, d'après notre typologie, des \mathcal{J} -actions.

Partition des \mathcal{O} -actions en des actions de sélection ou de dépôt d'objet

Notre typologie pourrait bien entendu être affinée. En particulier, les \mathcal{O} -actions peuvent être partitionnées en des actions de sélection d'objet \mathcal{O}_s -actions et des actions de dépôt d'objet \mathcal{O}_d -actions.

En effet, le fait de sélectionner un objet dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ peut révéler des éléments de stratégies de résolution du problème.

Exemple de construction d'une médiatrice — La procédure de construction de la médiatrice d'un segment peut être influencée par le matériel sélectionné dans la zone d'outillage. En effet, le fait de sélectionner le compas, la règle et le crayon dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ peut être révélateur d'une procédure de construction différente que si l'on sélectionne l'équerre *a contrario* du compas par exemple. Ces \mathcal{O}_s -actions influent alors sur le processus de construction et semblent être pertinentes à décrire puisqu'elles jouent le rôle d'indicateurs permettant d'induire certaines stratégies.

En outre, si $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ a suffisamment d'objets alors les actions qui consistent à déposer des objets dans $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ ne devraient pas être révélatrices d'une activité de résolution de problème. En

revanche, lorsque \mathcal{Z}_O est « pauvre » cela affirme une intentionnalité didactique et alors la description des \mathcal{O}_d -actions est nécessaire.

Exemple de construction de polyèdres réguliers — On cherche à construire la sous-classe de tous les polyèdres réguliers avec comme matériel disponible uniquement douze arêtes et huit sommets. Si l'on commence par construire un tétraèdre régulier (quatre sommets et six arêtes) il est alors impossible de construire d'autres polyèdres réguliers différents. Il faut alors « casser » tout ou une partie de la structure pour déposer des objets (sommets et arêtes) afin de pouvoir en construire de nouveaux comme le cube ou l'octaèdre régulier. Le fait de travailler avec un petit nombre d'arêtes et de sommets dans \mathcal{Z}_O affirme une intentionnalité didactique dans la structuration des actions et donc des stratégies mises en œuvre. En effet, cela implique de construire un à un chacun de ces polyèdres et en quelque sorte influencer la prise de conscience du sujet (ou groupe de sujets), par le comptage, du nombre de sommets et d'arêtes de chacune de ces structures régulières. Cela permet aussi de repérer que l'individu (ou groupe d'individus) prend conscience qu'il est nécessaire de déposer des objets pour pouvoir construire de nouvelles structures, puisqu'en effet on ne peut réaliser dans ces conditions de nouveaux polyèdres réguliers que par des \mathcal{O}_s -actions et \mathcal{O}_d -actions. Il est alors évident que si le nombre d'arêtes et de sommets était en quantité suffisamment importante pour construire tous les polyèdres réguliers alors les \mathcal{O}_d -actions n'auraient pas d'intérêt à être précisées.

Stratégies de résolution du problème

Le choix de notre ensemble fini \mathcal{A} d'actions élémentaires relevant de \mathcal{T} -actions, de \mathcal{O} -actions, \mathcal{J} -actions et des \mathcal{S}_O -actions est conditionné par rapport à nos connaissances sur la résolution du problème donné. Ainsi, à ce niveau il y a clairement une part d'interprétation, puisque des choix sont effectués en fonction de notre rapport personnel au problème et en particulier à ses éléments et ses conditions de résolution qui ont été relevés comme étant épistémologiquement ou didactiquement pertinents par rapport à ce que nous voulons observer.

En outre, l'analyse épistémologique du problème nous permet d'identifier les stratégies de résolution. Cette dernière étant théoriquement « parfaite » elle nous donne accès, de manière exhaustive, à toutes les stratégies. Pour nos besoins, nous caractérisons *une stratégie* comme une concaténation ordonnée d'actions élémentaires a_i réalisées sur des objets instanciés o_j . Une stratégie est donc un *mot* qui prend la forme d'une séquence ordonnée $a_i o_j$. Dans notre modèle, les stratégies sont donc définies *en extension* car l'analyse épistémologique nous les donne toutes. En pratique, nous les définissons *en compréhension*, c'est-à-dire regroupant des ensembles d'actions sur des objets génériques.



Figure 1. – Exemples d'une tuile de Wang de quatre couleurs et d'un pavage 2 × 3 valide à bords monochromes.

Exemple de stratégies en lien avec le problème de Wang — Il s'agit d'un problème de décision visant à démontrer l'existence ou non d'un pavage sur des régions rectangulaires de \mathbb{Z}^2 à bords monochromes avec un certain type de tuiles de Wang (figure 1). Ces tuiles possèdent toutes quatre secteurs triangulaires de couleur différente et les permutations de

couleurs sont autorisées. Ainsi, il y a 24 tuiles² dans notre collection. Pour accoler deux tuiles, il faut et il suffit qu'elles aient un bord commun de la même couleur (figure 1, à droite). Les détails concernant les analyses — historique, épistémologique et didactique — de cette situation se trouvent dans Da Ronch et al. (2020, 2021).

Dans cette situation il y a plusieurs manières de démontrer, par exemple, l'existence d'un pavage valide en générant des motifs périodiques (figure 2). Ces motifs ne sont pas uniques et sont en nombres. Par exemple, on peut dans le cas d'un rectangle 4×9 démontrer l'existence d'un pavage valide en générant des motifs 2×3 périodiques (figure 2, à gauche) ou alors 2×2 puis paver les trois dernières colonnes par deux motifs 2×3 (figure 2, à droite). Bien entendu, les motifs périodiques générés ne sont pas uniques et peuvent être de taille plus grande en fonction de la surface à paver. Il est alors fastidieux de décrire ces stratégies en instanciant chacune des actions sur des objets spécifiques qui ici sont des tuiles. Ainsi, à cette étape nous définissons, *en compréhension*, la stratégie d'existence par motifs périodiques. Les motifs périodiques sont ici génériques, ce n'est qu'à l'étape suivante, au niveau de l'analyse, que nous verrons si la stratégie décrite dans la retranscription est une instanciation de la stratégie définie *en compréhension*, c'est-à-dire, un cas particulier de stratégie définissant un mot spécifique de la forme $a_i o_j$. Par exemple, si on avait la retranscription de l'exemple de la figure 2 à droite, on chercherait à repérer, dans la retranscription, deux mots qui se répètent et qui génèrent la réitération des motifs 2×2 et 2×3 dans la construction du pavage. Ainsi, il faudrait repérer à plusieurs reprises les actions d'ajout concernant les tuiles spécifiques des motifs 2×2 et 2×3 .



Figure 2. – Exemples de deux stratégies différentes pour démontrer l'existence d'un pavage 4×9 valide.

Encodage des actions élémentaires en un format symbolique

Enfin, notre première étape se clôture par l'encodage de ces actions élémentaires. Afin de rendre intelligible notre retranscription, on réalise un encodage bijectif des actions a_i de \mathcal{A} en un format symbolique intelligible pris dans un ensemble fini de symboles \mathcal{L} . Ces symboles sont construits au plus près possible de la réalité.

Exemple d'encodage en lien avec la situation du problème de Wang — Nous donnons dans le tableau 1 quelques exemples non exhaustifs d'actions élémentaires choisies comme étant pertinentes pour notre situation avec leur symbole associé qui nous serviront lors de la retranscription des données audiovisuelles.

Action élémentaire de \mathcal{A}	Symbole associé de \mathcal{L}
Poser	+
Enlever	-
Chercher	
Pointer	
Dialoguer	
...	...

² $4! = 24$.

Tableau 1. – Encodage de quelques actions élémentaires en un format symbolique.

2. Retranscription des données audiovisuelles

Cette deuxième étape est dépourvue d'interprétation, elle est complètement déterministe puisque le traitement pourrait, dans l'idéal, être réalisé de manière automatique par une machine déterministe. On cherche ici à retranscrire le plus fidèlement possible le corpus de données audiovisuelles en fonction des actions a_i de \mathcal{A} préalablement choisies, réalisées sur des objets o_j de \mathcal{O} — éventuellement inexistant³ —, par des sujets s_k de \mathcal{S} . Les actions réalisées sur des objets sont effectuées par des sujets, ceci caractérise donc l'activité locale d'un individu qui est en train d'agir. Nous définissons alors le triplet $(a_i, o_j, s_k) \in \mathcal{A} \times \mathcal{O} \times \mathcal{S}$ comme une *micro-activité* permettant de caractériser chacune des actions réalisées sur des objets par les sujets observés. En outre, chaque *micro-activité* est ordonnée par un marqueur *occurro-temporel* mentionnant l'occurrence discrétisée ($occ \in \mathbb{N}$) de cette dernière et l'instant $t \in [0, d]$ où elle est effectuée au cours de l'enregistrement audiovisuel d'une durée d .

$$\dots \xrightarrow[occ]{t} (a_i, o_j, s_k) \xrightarrow[occ+1]{t'} (a_p, o_m, s_k) \xrightarrow[occ+2]{t''} \dots$$

Entre chaque marqueur *occurro-temporel* peut se trouver une mais aussi plusieurs *micro-activités* commençant au même moment. C'est le cas notamment lorsque l'on est confronté à des facteurs contingents conduisant à un biais d'information — sujet devant l'objectif par exemple. C'est-à-dire qu'entre deux *micro-activités* clairement identifiables, il existe plusieurs *micro-activités* auxquelles nous ne sommes pas en mesure de donner un ordre, puisque nous ne savons pas, avec précision, quand elles ont été réalisées. De fait nous supposons qu'elles commencent toutes au même moment. D'ailleurs, il se peut aussi que plusieurs *micro-activités* soient situées entre deux marqueurs lorsque ces dernières sont réalisées dans un laps de temps quasi-immédiat.

$$\dots \xrightarrow[occ]{t} \overbrace{\{\text{Liste de micro-activités commençant au même moment}\}}^{\text{Phase}} \xrightarrow[occ+1]{t'} \dots$$

Il est important de mentionner ici l'hypothèse selon laquelle le temps d'exécution de ces *micro-activités* est identique, ce qui implique la fin de ces dernières dès lors qu'un nouveau marqueur apparaît explicitant de fait le début d'une « nouvelle » *micro-activité*. *A contrario*, si certaines d'entre elles ont des temps d'exécution différents, il est alors nécessaire d'avoir un marqueur de fin précisant l'occurrence et le positionnement de la *micro-activité* à laquelle ce marqueur fait référence, mais aussi son temps de fin. Nous avons donc tout intérêt au niveau des choix d'actions à conserver, dans la mesure du possible, des actions ayant des temps d'exécution « unitaires » car plus les actions choisies et donc les *micro-activités* observées ont des temps d'exécution différents plus l'écriture et la lecture de la retranscription seront complexes.

Exemple de micro-activités avec des temps d'exécution différents lors d'un entretien— Imaginons que l'on doive retranscrire finement le discours et les gestes d'un sujet lors d'un entretien en vue d'en analyser son comportement dans une situation problématique. Cet individu peut tout à fait, à un instant t , de l'entretien démarrer des actions simultanément en ayant toutes ou en partie des durées d'exécution différentes. Par exemple, le sujet s_1 observé à l'instant t prend la parole (a_1) pour répondre au problème tout en bougeant sa jambe (a_2) et en se touchant la menton (a_3). A l'instant $t' > t$ ce dernier continue toujours à s'exprimer par rapport au problème posé par son interlocuteur seulement il a arrêté d'effectuer un

³ L'objet peut ne pas exister notamment lorsque l'action réalisée est relative à un monologue ou un dialogue par exemple.

mouvement avec sa jambe et ne se touche plus le menton mais à démarrer, à cet instant t' , une nouvelle action qui consiste à croiser ses jambes (a_4)... Au niveau de l'occurrence du temps t' nous sommes contraints de préciser que les *micro-activités* du sujet s_1 relatives aux actions a_2 et a_3 sont terminées alors qu'une nouvelle commence en lien avec l'action a_4 tout en poursuivant l'action a_1 qui elle n'a pas cessé.

Exemple d'un fragment de retranscription de notre situation issue du problème de Wang — Dans cet exemple, deux sujets (bleu et rouge) agissent ensemble pour résoudre le problème de Wang dans le cas d'un rectangle avec les bords opposés, deux à deux, d'une même couleur à l'aide du matériel manipulable disponible (tuiles et réglette) à poser sur le plateau de jeu (grille). Sur la figure 3, on peut observer que le joueur bleu commence par placer la réglette afin de délimiter la taille de la surface du rectangle à paver, il construit ainsi un rectangle 4×9 . Ensuite dans la phase 1, il va chercher une tuile mais nous n'avons pas d'information sur sa structure ni sur sa localisation. Au même moment le joueur rouge pointe la première case de coordonnée $(1,1)$ ayant un environnement bleu à sa gauche et vert au sud. Dans la phase 2, le joueur bleu pose la tuile ayant la couleur rouge à gauche, verte au sud, bleue à droite et jaune au nord sur la case de coordonnée $(9,1)$. Nous laissons ensuite le lecteur ou la lectrice s'appropriier la sémantique des symboles dans la suite de la retranscription.

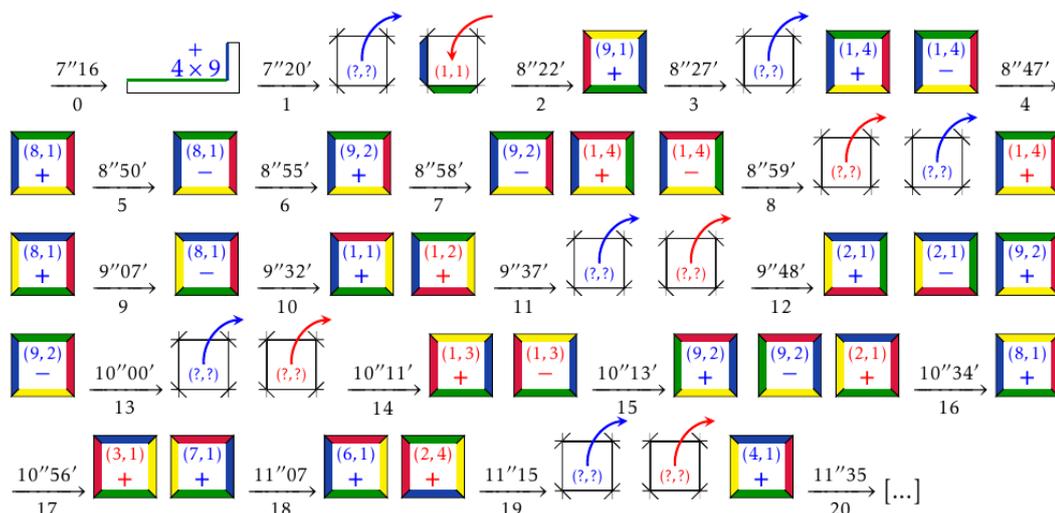


Figure 3. – Un fragment de retranscription issue de nos expérimentations.

Nous proposons ensuite d'enrichir notre retranscription par un résumé, c'est-à-dire une photographie « enrichie » à un instant donné de la zone de travail permettant d'avoir une vision statique de la situation à un moment donné. Ce résumé permet donc de retracer la réalité du sujet ou des sujets à un instant t . Il permet aussi de connaître exactement l'occurrence des \mathcal{T} -actions du sujet sachant le nombre d'occurrences des \mathcal{T} -actions des autres sujets. Ceci permet donc d'avoir le nombre de \mathcal{T} -actions réalisées entre deux \mathcal{T} -actions effectives mais aussi de connaître la distribution de ces actions, le sujet s_1 a-t-il effectué plus, moins ou autant de \mathcal{T} -actions que le sujet s_2 par exemple ? Dans ce résumé, nous ne prenons pas en compte l'occurrence des actions relevant d'autres types ($\mathcal{Z}_j, \mathcal{Z}_0, \mathcal{S}_0$) ni le temps⁴.

Exemple de résumé issu de la situation du problème de Wang — Le résumé ci-après nous donne le nombre de \mathcal{T} -actions (ajout/retrait) réalisées pour un joueur donné sachant le nombre de \mathcal{T} -actions (ajout/retrait) réalisées par l'autre joueur. Par exemple, dans la case en bas à gauche (figure 4), on observe que la tuile posée par le joueur bleu est sa dixième \mathcal{T} -actions sachant que le joueur rouge a réalisé seulement sa troisième \mathcal{T} -actions.

⁴ Se référer à la retranscription pour avoir accès à ces informations.

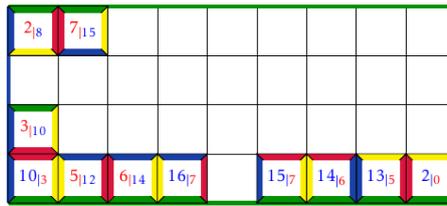


Figure 4. – Exemple d'un résumé qui permet d'avoir une vision statique de la situation en connaissant l'occurrence des \mathcal{T} -actions des deux joueurs.

Le *résumé* reproduit donc la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ dans laquelle les sujets se trouvent à un instant t ce qui s'avère être tout à fait complémentaire à la retranscription. Afin d'identifier rapidement les éléments de la retranscription qui vont apparaître dans *le résumé*, on peut faire le choix de proposer un symbole apparaissant au-dessus des lignes de retranscription afin d'identifier les actions qui vont apparaître dans le résumé de celles qui n'apparaîtront pas. Enfin, nous faisons le choix de proposer un *résumé* dès que la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ a été modifiée d'environ vingt-cinq pour cent car cela nous semble assez significatif pour apercevoir l'évolution des traces d'activité dans la résolution du problème.

En outre, nous pouvons également faire des choix paramétriques sur le *résumé*. Par exemple, au lieu de dénombrer l'occurrence de toutes les \mathcal{T} -actions sur la $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$, nous pouvons faire le choix de cibler une \mathcal{T} -action particulière et d'observer sa distribution tout au long de la partie.

Exemple de résumés ciblant uniquement l'occurrence de l'ajout « + » et la distribution de cette \mathcal{T} -action — On donne ci-après trois résumés correspondant à différents temps de la résolution du problème dans le cas où les bords sont de couleurs différentes (figure 5). On observe tout au long de la partie un déséquilibre de plus en plus prégnant dans la distribution des actions d'ajout de tuiles. Le dernier résumé (celui du bas, figure 5) montre même que les tuiles présentes à cet instant t ont été déposées uniquement par le joueur rouge. Ceci peut se révéler être un bon indicateur pour différencier les stratégies élaborées par les différents joueurs et ne pas attribuer des stratégies et raisonnements à des individus qui n'auraient en réalité été que de simples spectateurs dans la résolution du problème.

Outre ces faits, on pourrait naturellement se demander pourquoi ne pas utiliser uniquement des *résumés* en guise de retranscription. En fait ces derniers, bien qu'ils décrivent la réalité des sujets à un moment donné, nous font perdre des informations importantes concernant les autres micro-activités réalisées sur d'autres zones, les « bruits » lors d'essais-erreurs et le temps t d'exécution de toutes de ces micro-activités. Pour ces raisons, il nous semble important que ces *résumés* viennent en complément de la retranscription.

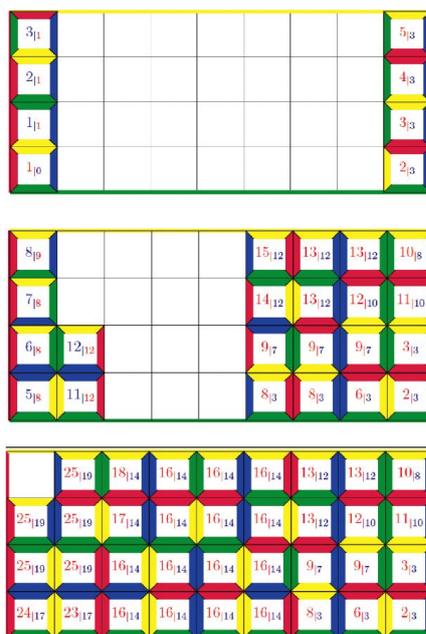


Figure 5. – Autre exemple prenant en compte uniquement l’occurrence de l’ajout « + » et distribution de cette T-action.

3. Analyse des retranscriptions

La retranscription est représentée par un mot $a_i o_j$ qui permet en plus de savoir, pour une action retranscrite, celui ou celle qui l’a effectuée. L’intégralité de ce mot ne correspond pas nécessairement à une stratégie, c’est pourquoi il nous faut repérer, lors de cette dernière étape, des sous-mots $a_i o_j$ relatifs aux stratégies identifiées dans le choix des observables. On vérifie alors que ces sous-mots sont identiques ou « proches » de ces stratégies pour inférer qu’un sujet (ou groupe de sujets) a mis en œuvre telle ou telle stratégie, menée par un certain raisonnement, rendant alors plausible l’entrée dans une démarche scientifique — mathématique dans notre contexte d’étude. De plus, comme nous avons fait le choix de définir, pour des raisons pratiques, les stratégies non pas en extension mais en compréhension, il s’agit donc de repérer au niveau de la retranscription si un sous-mot effectif est une instantiation d’une des stratégies décrites en compréhension dans l’analyse épistémologique.

Exemple d’analyse du fragment de retranscription de la figure 3 — Dans cet extrait, on observe au niveau de l’intervalle $[0, 16[$ que les deux joueurs sont dans une phase de jeu essais-erreurs, puisque la quasi-totalité des micro-activités réalisées relève de l’ajout, puis du retrait, presque immédiat, des tuiles déposées. Par ailleurs, on remarque dans l’intervalle $[10, 20[$ que les sujets tentent de paver la première ligne du pavage en construisant des motifs différents et horizontalement périodiques de taille 1×2 . Néanmoins, ce court extrait de retranscription ne permet pas de montrer le caractère périodique des sous-mots relatifs à ces motifs puisqu’ils ne sont pas répétés dans cet extrait (figure 6).



Figure 6. – Exemple de deux sous-mots extraits de la retranscription (figure 3) générant deux motifs de taille 1×2 horizontalement périodiques sans répétition dans le fragment de retranscription.

Il serait donc nécessaire d'analyser la suite de cette retranscription pour s'en rendre compte et allouer ou non la stratégie de périodicité aux deux sujets ou à un des deux selon les micro-activités effectives... En conclusion, le fragment de retranscription présenté à la figure 3 est trop court pour pouvoir statuer sur la mise en œuvre d'une quelconque stratégie autre que le jeu essais-erreurs (périodicité par exemple) et donc sur l'activité mathématique des sujets.

CONCLUSION ET DISCUSSION

Dans cet article nous avons présenté un modèle qui permet de repérer des traces de l'activité de sujets en résolution de problèmes en pointant précisément la phase de repérage et d'interprétation. Nous savons effectivement où se situe la part d'interprétation dans notre modèle. Cette dernière se situe précisément au niveau des choix des observables, le reste est complètement déterministe sauf parfois au niveau de l'analyse des retranscriptions puisque les stratégies repérées peuvent être plus ou moins « proches » de celles identifiées dans l'analyse épistémologique du problème. Cela dépend donc de la valeur que nous attribuons au vocable « proche ».

Ce modèle montre aussi sa pertinence lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes utilisant des objets tangibles, dont les actions sur ces derniers sont similaires à celles conduites sous la forme papier-crayon. Les mathématiques discrètes par exemple semblent un domaine propice puisqu'un bon nombre d'objets mathématiques, — graphes, tuiles, polyminos, jetons...—, liés à des problèmes de combinatoire, d'optimisation discrète, etc., peuvent facilement être représentés sous la forme d'artefacts tangibles.

En outre, il semble probable que de tels problèmes, représentés sous la forme d'artefacts numériques, facilitent cette retranscription mais ouvrent alors naturellement un questionnement sur une autre transposition, celle de la transposition informatique. D'ailleurs, il serait pertinent, selon les possibilités, d'envisager ce traitement sur une machine déterministe en se questionnant sur ce qu'il est envisageable de faire dans le domaine de l'Intelligence Artificielle. En effet, cela permettrait d'effectuer des fouilles de données importantes et ce pour une variété conséquente d'utilisateurs.

Par ailleurs, ce modèle permet aussi de réaliser des analyses quantitatives grâce à des fouilles de données recueillies sur une action spécifique, sur la distribution de certaines actions mais aussi sur le traitement des bruits.

Il possède aussi des limites notamment lorsque le temps d'exécution des actions est différent, ce qui complexifie la lecture et l'écriture de la retranscription. Ce modèle pose aussi question sur son opérationnalité dans le cas d'objets — mathématiques — abstraits complexes qui ne peuvent prendre un format tangible et qui rendent de fait l'encodage plus complexe.

RÉFÉRENCES

- BERTHELOT, R., & SALIN, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* [Theses, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065>
- BROUSSEAU, G. (1983). Etude de questions d'enseignement, un exemple : La géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 45, 183-226.
- DA RONCH, M., GANDIT, M., & GRAVIER, S. (2020). Du problème de Wang vers une nouvelle situation de recherche pour la classe. *Repères IREM*, 121, 77-105. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03030861>
- DA RONCH, M., GANDIT, M., & GRAVIER, S. (2021). Learning of the scientific approach at university: The case of research situations from problems of discrete mathematics. 14th International Congress on Mathematical Education. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03285073/>
- GALVEZ, G. (1985). *El aprendizaje de la orientacion en el espacio urbano: Una proposicion para la ensenanza de la geometria en la escuela primaria*. [Tesis]. Centro de Investigacion del IPN Mexico.
- WANG, H. (1961). Proving theorems by pattern recognition—II. *Bell system technical journal*, 40(1), 1-41

Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques. Volume des séminaires et posters des actes de EE21.