HAL open science

Du local au global en géométrie d'Arakelov

Gerard Freixas Montplet, Gerard Freixas, I Montplet

To cite this version:

Gerard Freixas Montplet, Gerard Freixas, I Montplet. Du local au global en géométrie d'Arakelov. Gazette des Mathématiciens, 2021. hal-03414439

HAL Id: hal-03414439

https://hal.science/hal-03414439v1

Submitted on 4 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DU LOCAL AU GLOBAL EN GÉOMÉTRIE D'ARAKELOV

GERARD FREIXAS I MONTPLET
CNRS – INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU - PARIS RIVE GAUCHE

Table des matières

Introduction 1
1. Du local au global en géométrie différentielle 1
1.1. Théorème de Gauss–Bonnet 1
1.2. Formule de Riemann–Roch 3
2. Du local au global en géométrie des nombres 5
3. Formule de Riemann–Roch arithmétique 7
4. Exemples 8
4.1. Fonction zêta de Selberg et formule analytique du nombre de classes 8
4.2. Volumes des espaces de formes modulaires 10
Références 12

Introduction

La théorie d'Arakelov est un formalisme motivé par l'étude des équations diophantiennes. Remontant aux idées d'Arakelov [1] dans les années 70, elle a été largement développée par Faltings, Gillet–Soulé et leurs collaborateurs dans les années 80 et 90. Dans sa forme actuelle, la géométrie d'Arakelov exploite plusieurs compatibilitiés entre la géométrie algébrique de Grothendieck et la géométrie différentielle des fibrés hermitiens. Ce texte a pour but d'initier le lecteur à ce cercle d'idées, tout en prenant le point de vue des formules locales/globales. On partira du théorème de Gauss–Bonnet en géométrie différentielle, et de Minkowski en géométrie des nombres, où l'on y rencontre déjà quelques-uns des aspects analytiques et arithmétiques mariés ensuite dans la formule de Riemann–Roch en géométrie d'Arakelov. Plutôt que de rentrer dans les détails de cette théorie sophistiquée, on en présentera des exemples d'application particulièrement parlants.

L'optique adoptée ici n'offre qu'une vision partielle du sujet, et ne reflète pas la riche évolution palpable dans les contributions de nombreux collègues : problèmes diophantiens sur les points rationnels, sur les courbes elliptiques, questions d'algébrisation, liens avec la géométrie non-archimédienne, etc. J'espère qu'ils sauront m'excuser d'avoir omis leurs mathématiques.

1. Du local au global en géométrie différentielle

1.1. **Théorème de Gauss–Bonnet.** Soit M une surface topologique, compacte, connexe, orientable et sans bord. À homéomorphisme près, M est classifiée par un invariant entier $g \geq 0$, le genre de M. Lorsque $g = 0$, M est homéomorphe à

une sphère. Lorsque $g \geq 1$, M est homéomorphe à une somme connexe de g tores. Le genre détermine un autre invariant fondamental : la caractéristique d'Euler–Poincaré $\chi(M)$. D'après Descartes, Euler et Legendre d'abord, et Poincaré ensuite, étant donnée une triangulation de M à S sommets, A arêtes et F faces, on a

$$S - A + F = 2 - 2g. \tag{1}$$

Le cas historique des polyhèdes correspond à $g = 0$. Avec l'incursion d'Emmy Noether et l'invention des groupes d'homologie et cohomologie, ces relations trouvèrent une explication conceptuelle. À M on peut associer des groupes d'homologie $H_p(M, \mathbb{Z})$, $p = 0, 1, 2$, qui formalisent la notion intuitive de p-connexité, due à Riemann et Betti : $H_p(M, \mathbb{Z})$ mesure l'obstruction à connecter continument deux sous-espaces fermés de M de dimension p. Ainsi, le groupe $H_0(M, \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ du fait que M est connexe par arcs. Le groupe $H_1(M, \mathbb{Z})$ s'identifie à l'abélianisé du groupe fondamental de M, d'après un théorème de Hurewicz. Il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}^{2g}$. Le groupe $H_2(M, \mathbb{Z})$ est aussi isomorphe à $\mathbb{Z}$. En tensorisant par $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on obtient des espaces vectoriels $H_p(M, \mathbb{R})$ ou $H_p(M, \mathbb{C})$. Leurs duaux sont les espaces de cohomologie $H^p(M, \mathbb{R})$ ou $H^p(M, \mathbb{C})$. La caractéristique d'Euler–Poincaré est l'entier défini par

$$\chi(M) := \sum_{p=0}^{2} (-1)^p \dim H^p(M, \mathbb{R}) = 2 - 2g. \tag{2}$$

L'équation (1) en découle alors par un calcul de l'homologie à partir d'une triangulation de M. Les groupes de cohomologie, et donc la caractéristique d'Euler–Poincaré, sont des invariants de nature globale : leur calcul nécessite de la compréhension de tout l'espace.

Lorsque M est munie d'une structure de surface différentielle, les espaces de cohomologie possèdent une incarnation analytique. D'après la thèse de de Rham, on les obtient à l'aide des formes différentielles, sur lesquelles agit l'opérateur d dit différentielle extérieure : $H^p(M, \mathbb{R})$ est isomorphe à l'espace des p-formes fermées ($\ker d$), modulo le sous-espace des formes exactes ($\operatorname{Im} d$). On peut se demander si (2) admet une explication géométrique différentielle. La formule de Gauss–Bonnet, datant avant l'arrivée des outils cohomologiques, en donne une piste. Fixons une métrique riemannienne sur M. On lui associe une 2-forme de volume dA (élément d'aire) et la courbure de Gauss $K \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Ce sont des objets de nature locale : on les calcule sur des ouverts coordonnés de M. En coordonnées locales, K mesure la déviation entre la métrique riemannienne et la métrique euclidienne, à l'ordre deux. Le théorème de Gauss–Bonnet s'énonce ainsi :

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K dA = \chi(M). \tag{3}$$

La formule de Gauss–Bonnet est une formule de type *local/global*. C'est-à-dire, elle relie un objet de nature locale tel que KdA, à un objet de nature globale tel que $\chi(M)$.

Le théorème de Gauss–Bonnet est un cas particulier de la formule d'indice d'Atiyah–Singer pour les opérateurs de Dirac. Sur une variété riemanienne orientable compacte, on associe un opérateur de Dirac à la différentielle extérieure. Son indice est $\chi(M)$. La formule d'indice l'exprime comme l'intégrale d'un polynôme universel dans des tenseurs de courbure associés à l'opérateur de Dirac et à la métrique riemannienne. Dans l'exemple de la surface, elle est réduite à KdA. Ces outils constituent une partie essentielle des aspects analytiques de la géométrie

d'Arakelov, et ils sont amplement présentées dans le livre de Berline–Getzler–Vergne [2].

1.2. **Formule de Riemann–Roch.** Soit X une surface de Riemann compacte et connexe. Il s'agit d'une surface différentielle munie d'un système de cartes locales à valeurs dans $\mathbb{C}$, dont les changements sont holomorphes. C'est donc une variété complexe de dimension 1. Dans ce cadre, on peut espérer des variantes de la formule de Gauss–Bonnet qui tiennent compte de la structure de variété complexe. La formule de Riemann–Roch est un avatar de (3), pour la caractéristique d'Euler–Poincaré des fibrés holomorphes.

Un fibré holomorphe de rang r sur X est une famille $E = \{E_x\}_{x\in X}$ d'espaces vectoriels complexes de dimension r, avec une dépendance holomorphe en $x \in X$. Un premier exemple est le fibré trivial de fibre $\mathbb{C}$. C'est le fibré des fonctions holomorphes, noté $\mathcal{O}_X$ (voir paragraphe *infra*). D'autres exemples plus riches sont le fibré tangent holomorphe T_X et le fibré cotangent holomorphe Ω_X, aussi noté K_X et appelé fibré canonique. On les construit de manière analogue aux fibrés tangent et cotangent d'une variété $\mathcal{C}^\infty$. Observons que les fibrés holomorphes sont en particulier des fibrés $\mathcal{C}^\infty$, par "oubli de structure".

Plusieurs notions liées aux fibrés sur les variétés différentielles ont des versions holomorphes. On mentionne ici les sections holomorphes locales (définies sur des ouverts) ou globales (définies sur toute la variété). Par exemple, les sections locales de $\mathcal{O}_X$ sur un ouvert U sont les fonctions holomorphes sur U. Elles constituent un anneau, noté $\mathcal{O}_X(U)$. Pour un fibré holomorphe E de rang r, l'ensemble des sections sur U possède une structure naturelle de module sur $\mathcal{O}_X(U)$, et même de module libre de rang r pour U assez petit. On a des opérations de restriction à des ouverts plus petits, et de recollement de paires de sections locales qui coïncident sur l'intersection de leurs domaines, et cela de manière compatible à la structure de module. On dit que les sections locales de E constituent un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules, localement libre de rang r. Cette vision faisceautique est la clé de voûte de l'approche algébrique aux variétés complexes.

Les sections holomorphes globales d'un fibré holomorphe E sur X sont notées $H^0(X, E)$. La compacité de X assure que $H^0(X, E)$ est un $\mathbb{C}$-vectoriel de dimension finie. Par exemple, les fonctions holomorphes globales sont constantes : $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$. Plus généralement, il existe des $\mathbb{C}$-vectoriels de cohomologie $H^p(X, E)$, de dimension finie. De manière similaire à la cohomologie de de Rham, on les obtient à l'aide de formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ à coefficients dans E. L'analogue de la différentielle extérieure est ici induite par l'opérateur de Dolbeault $\overline{\partial}_E$ de E. Cet opérateur généralise l'opérateur $\partial/\partial\overline{z}$ sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$, et détermine la structure holomorphe de E : les sections holomorphes de E (locales ou globales) sont les sections $\mathcal{C}^\infty$ annulées par $\overline{\partial}_E$. La caractéristique d'Euler–Poincaré holomorphe de E est donnée par

$$\chi(X, E) = \dim H^0(X, E) - \dim H^1(X, E).$$

Un théorème de dualité de Serre fournit un isomorphisme canonique

$$H^1(X, E) \simeq H^0(X, E^\vee \otimes K_X)^\vee,$$

où $E^\vee$ est le dual de E. Ainsi, on a une compréhension plus simple de $\chi(X, E)$ en termes de sections globales :

$$\chi(X, E) = \dim H^0(X, E) - \dim H^0(X, E^\vee \otimes K_X). \tag{4}$$

Soit L un fibré en droites (holomorphe) sur X. On peut parler de sections méromorphes de L. Une section méromorphe s est d'abord une section holomorphe sur le complémentaire d'un nombre fini de points $V = X \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$. Dans un petit voisinage coordonné (U, z) centré en p_i, L possède une base holomorphe ℓ, c'est-à-dire une section locale holomorphe partout non-nulle. On écrit $s = f(z)\ell$, avec f holomorphe pour $z \neq 0$. Que s soit méromorphe en p_i revient à ce que f soit méromorphe en 0. Un fait non-trivial est qu'il existe des sections méromorphes non-identiquement nulles. Pour une telle section s, l'ordre du zéro ou pôle en $p \in X$ est un entier bien défini, noté $\operatorname{ord}_p s \in \mathbb{Z}$. Dans l'écriture précédente, l'ordre de s en p_i est l'ordre de f en 0. Le diviseur de s est la somme formelle finie de points de X, à coefficients entiers, donnée par

$$\operatorname{div} s = \sum_p (\operatorname{ord}_p s) p, \tag{5}$$

et son degré

$$\deg \operatorname{div} s = \sum_p \operatorname{ord}_p s \in \mathbb{Z}.$$

Du fait que deux sections méromorphes s et s', non-identiquement nulles, diffèrent (multiplicativement) d'une fonction méromorphe, et par le théorème des résidus, l'entier $\deg \operatorname{div} s$ ne dépend que de L, et on le note $\deg L$. Il s'agit d'un invariant local, dans ce sens que le diviseur d'une section méromorphe s est constitué des quantités $\operatorname{ord}_p s$, calculées localement sur X.

Pour récapituler, à un fibré en droites L sur X nous avons associé deux invariants : *i)* la caractéristique d'Euler–Poincaré holomorphe $\chi(X, L)$ (invariant global) et *ii)* le degré $\deg L$ (invariant local). La formule de Riemann–Roch relie ces deux quantités par l'identité

$$\chi(X, L) = \deg L + 1 - g, \tag{6}$$

où g est le genre topologique de X. Par des arguments cohomologiques généraux, la preuve se réduit à $L = \mathcal{O}_X$. Dans ce cas, compte tenu de (4) et $H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$, on est amené à démontrer $\dim H^0(X, K_X) = g$. C'est-à-dire, que le genre topologique coïncide avec la dimension de l'espace des formes holomorphes globales – rappelons que K_X est le fibré des formes holomorphes. Cette relation entre topologie et géométrie complexe est typique de la théorie de Hodge. Celle-ci fournit un isomorphisme canonique

$$H^1(X, \mathbb{C}) \simeq H^0(X, K_X) \oplus H^1(X, \mathcal{O}_X). \tag{7}$$

En outre, pour l'action de la conjugaison complexe induite par l'écriture $H^1(X, \mathbb{C}) = H^1(X, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$, les espaces $H^0(X, K_X)$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ sont conjugués. La décomposition (7) traduit le fait que toute forme $\mathcal{C}^\infty$ fermée sur X est cohomologue à une forme harmonique, dans ce cas tout simplement somme d'une forme holomorphe et d'une forme anti-holomorphe. Puisque $\dim H^1(X, \mathbb{C}) = 2g$, on conclut donc $\dim H^0(X, K_X) = g$. Enfin, notons de ce qui précède que $\deg K_X = 2g - 2$ et que (6) se récrit

$$\chi(X, L) = \deg L - \frac{1}{2} \deg K_X. \tag{8}$$

Lorsque T_X et L sont équipés de métriques hermitiennes $\mathcal{C}^\infty$ (notion analogue à celle de métrique riemannienne), la formule de Riemann–Roch (6) peut être reformulée en termes d'intégration de formes de courbure associées à T_X et à L, à rapprocher de (3). La formule de Riemann–Roch est un autre cas particulier de

la formule d'indice. C'est aussi un cas particulier de la formule de Grothendieck–Riemann–Roch en géométrie algébrique. Il s'agit donc d'un énoncé qui a des manifestations en géométrie différentielle complexe et en géométrie algébrique. La théorie d'Arakelov tire partie de ce type de compatibilités entre géométrie différentielle et géométrie algébrique.

Pour des textes de géométrie complexe qui couvrent largement les thèmes ci-dessus, on pourra consulter les beaux ouvrages de Griffiths–Harris [15] et Voisin [22].

2. Du local au global en géométrie des nombres

Les formules de Gauss–Bonnet et Riemann–Roch ont une ressemblance, qui n'est pas anecdotique, avec une identité en géométrie des nombres due à Minkowski. La géométrie des nombres propose une étude diophantienne des corps de nombres, dont elle exploite tant les aspects algébriques comme les aspects analytiques. Il s'agit du niveau zéro de la géométrie d'Arakelov.

Un corps de nombres est un corps K, extension finie de $\mathbb{Q}$. Ainsi, on a une inclusion de corps $\mathbb{Q} \subseteq K$, qui fait de K un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie. Cette dimension est le degré de K, noté $[K\colon \mathbb{Q}]$. Les corps de nombres se construisent à partir de $\mathbb{Q}$ par adjonction de racines de polynômes à coefficients rationnels. Un corps de nombres K contient un sous-anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$, généralisation de $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Les éléments $x \in \mathcal{O}_K$, dits entiers de K, sont les éléments de K satisfaisant à une équation

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0 = 0, \quad a_j \in \mathbb{Z} \quad \text{pour tout } j. \tag{9}$$

L'anneau $\mathcal{O}_K$ est un sous-$\mathbb{Z}$-module libre de type fini de K, de rang $[K\colon \mathbb{Q}]$. Les idéaux de $\mathcal{O}_K$ sont appelés idéaux entiers. L'ensemble des idéaux entiers possède une structure multiplicative. De même qu'un nombre entier non-nul a un inverse dans $\mathbb{Q}$, tout idéal entier non-nul peut être inversé dans K. Ce qui donne naissance au concept d'idéal fractionnaire de K. Les idéaux fractionnaires sont des $\mathcal{O}_K$-modules projectifs de rang 1.

Les idéaux fractionnaires sont pour $\mathcal{O}_K$ ce que les fibrés en droites sont pour les surfaces de Riemann. Le produit d'idéaux correspond au produit tensoriel de fibrés, et l'inversion correspond à la dualité. En fait, du point de vue de la théorie des schémas de Grothendieck, il s'agit du même type de structure. En effet, nous avons mentionné dans la section précédente l'interprétation faisceautique des fibrés holomorphes. On peut aussi voir les idéaux fractionnaires comme des faisceaux localement libres de rang 1 sur un courbe schématique. Cette courbe est, ensemblistement, la familles des idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$, notée $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$.

Par un théorème de Dedekind, tout idéal entier admet une décomposition, essentiellement unique, en produit fini d'idéaux premiers, avec certaines multiplicités. Dans un sens, ces multiplicités sont déterminées par la structure locale de l'idéal. Cette décomposition est à comparer au diviseur d'une section méromorphe (5). La réalisation faisceautique ci-dessus permet de les comprendre de manière unifiée.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal entier non-nul. On lui associe deux invariants :

(i) *la norme de* $\mathfrak{a}$. On démontre que le quotient $\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$ est fini, et on définit la norme de $\mathfrak{a}$ par $N(\mathfrak{a}) = \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})$. Cette opération est multiplicative en $\mathfrak{a}$. Compte tenu de la décompostion d'un idéal en produit de facteurs premiers, on pense à $N(\mathfrak{a})$ comme un invariant local. Il est plus commode

de travailler avec une variante additive, appellée *degré arithmétique* :

$$\widehat{\deg}\,\mathfrak{a} = -\log N(\mathfrak{a}).$$

(ii) *le covolume de* $\mathfrak{a}$. Il s'agit d'un invariant global. Considérons le $\mathbb{C}$-espace hermitien

$$K_{\mathbb{C}} = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}}^{\perp} (\mathbb{C}, |\cdot|),$$

où σ parcourt les $[K\colon \mathbb{Q}]$ plongements de corps de K dans $\mathbb{C}$, et chaque copie de $\mathbb{C}$ est munie de la structure hermitienne standard $|\ \cdot\ |$. La conjugaison complexe agit sur $K_{\mathbb{C}}$, et le sous-$\mathbb{R}$-vectoriel des éléments invariants, avec la structure euclidienne induite, est noté $K_{\mathbb{R}}$. L'idéal $\mathfrak{a}$ se plonge diagonalement dans $K_{\mathbb{R}}$, ce qui en fait un réseau : le quotient $K_{\mathbb{R}}/\mathfrak{a}$ est un tore réel. Il est muni de la structure riemannienne quotient, de volume $\mathrm{vol}(K_{\mathbb{R}}/\mathfrak{a})$. Autrement dit, il s'agit du covolume du réseau $\mathfrak{a}$ dans l'espace euclidien $K_{\mathbb{R}}$. On introduit la quantité équivalente

$$\chi(\mathfrak{a}) = -\log \mathrm{vol}(K_{\mathbb{R}}/\mathfrak{a}).$$

Le théorème de Minkwoski compare la norme et le covolume :

$$\mathrm{vol}(K_{\mathbb{R}}/\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{a})\sqrt{|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|}, \tag{10}$$

où $\Delta_{K/\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}$ est le discriminant du corps de nombres. Nous n'en dirons pas grande chose, seulement qu'il est une mesure locale de la "mauvaise réduction" de l'anneau $\mathcal{O}_K$. Par exemple, un premier p divise $\Delta_{K/\mathbb{Q}}$ lorsque $\mathcal{O}_K \otimes \mathbb{F}_p$ contient des éléments nilpotents. L'équation (10) se reformule trivialement en

$$\chi(\mathfrak{a}) = \widehat{\deg}\,\mathfrak{a} - \frac{1}{2}\log|\Delta_{K/\mathbb{Q}}|. \tag{11}$$

Ainsi écrite (11) est analogue à Riemann–Roch (8). [1] Les preuves des formules de Minkowksi et de Riemann–Roch suivent des étapes parallèles. La description du discriminant d'un corps de nombres en termes du covolume de l'anneau d'entiers $\mathcal{O}_K$ est l'argument correspondant à la décomposition de Hodge.

La formule de Minkowski est un point clé de la preuve de la finitude du nombre de classes de K. Il s'agit d'un invariant fondamental, défini comme le cardinal du groupe constituté des idéaux fractionnaires modulo ceux de la forme $a\mathcal{O}_K$, avec $a \in K \setminus \{0\}$. Depuis une perspective moderne, l'argument de Minkowski est le prototype des preuves de finitude en géométrie d'Arakelov. C'est dans ce sens que la géométrie des nombres est une étude diophantienne des corps de nombres.

Pour conclure cette section, nous attirons l'attention du lecteur sur le fait suivant. Dans les formules de Gauss–Bonnet et de Riemann–Roch, la compacitié est essentielle afin de produire des invariants numériques. Dans le cas des corps de nombres, les propriétés purement algébriques ne suffisent pas, et on a eu recours à des aspects quantitatifs. Par exemple, nous avons introduit l'espace euclidien $K_{\mathbb{R}}$ pour mesurer la taille de $\mathfrak{a}$. En géométrie d'Arakelov, on pense à l'ensemble des idéaux premiers $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$, avec tous les plongements complexes $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$, comme étant l'analogue arithmétique d'une surface de Riemann compacte.

Les lecteurs désireux d'en apprendre davantage pourront se reporter à Samuel [20] et Neukirch [19].

1. Pour les connaisseurs des surfaces de Riemann, des schémas et de la théorie de la ramification : (11) est plutôt l'analogue de la formule de Riemann–Hurwitz.

3. Formule de Riemann–Roch arithmétique

La géométrie d'Arakelov unifie sous un même chapeau les théorèmes de Riemann–Roch (8) et de Minkowski (11). Ses objets d'étude sont les variétés arithmétiques. Comme première approximation, on y pensera comme étant des variétés complexes compactes données par les zéros d'équations polynomiales, à coefficients entiers (comparer avec (9)). Par exemple, prenons un polynôme homogène de degré $d \geq 1$

$$F(x_0, x_1, x_2) = \sum_{\substack{j,k,l,\geq 0 \\ j+k+l=d}} a_{jkl} x_0^j x_1^k x_2^l \in \mathbb{Z}[x_0, x_1, x_2],$$

dont le gradient est non-nul aux zéros complexes non-triviaux. Leur ensemble, pris modulo homothéties, décrit une courbe complexe dans le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, donc une surface de Riemann compacte X. On peut d'une part étudier X par des méthodes de géométrie différentielle complexe, comme dans la Section 1. On peut d'autre part adopter le point de vue de la géométrie algébrique de Grothendieck, ce qui revient grossièrement à l'étude de l'algèbre graduée $R = \mathbb{Z}[x_0, x_1, x_2]/(F)$ et la structure des R-modules gradués de type fini. La géométrie d'Arakelov combine les deux approches.

On dispose d'une extension du théorème de Minkowski en dimension supérieure, dans laquelle on s'intéresse au covolume des groupes de cohomologie d'un fibré sur une variété arithmétique. Les points clés sont :

(i) pour un fibré $\mathcal{E}$ sur une variété arithmétique $\mathcal{X}$, les groupes de cohomologie $H^p(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ sont munis d'une structure entière, c'est-à-dire de $\mathbb{Z}$-module de type fini. Si, pour simplifier, on néglige la partie de torsion, ils définissent des réseaux dans les $\mathbb{R}$-vectoriels associés.

(ii) étant donnée une métrique hermitienne[2] $h_{\mathcal{X}}$ sur $T_{\mathcal{X}}$, et une métrique hermitienne $h_{\mathcal{E}}$ sur $\mathcal{E}$, l'espace $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ des sections globales est muni d'un produit scalaire de type L^2 : pour deux sections $s, t \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E})$, on pose

$$\langle s, t \rangle_{L^2} = \int_{\mathcal{X}} h_{\mathcal{E}}(s, t)_x \, dvol(x), \tag{12}$$

où *dvol* est la forme de volume associée à $h_{\mathcal{X}}$ convenablement normalisée. On peut faire de même pour $H^p(\mathcal{X}, \mathcal{E})$, $p \geq 1$, grâce à la théorie de Hodge : toute classe de cohomologie est représentée par une forme différentielle de type $(0, p)$ à valeurs dans $\mathcal{E}$, harmonique pour le laplacien de Dolbeault $\Delta^{0,p}$ associé aux métriques $h_{\mathcal{X}}$ et $h_{\mathcal{E}}$. La formule intégrale (12) s'étend aux formes différentielles à valeurs dans $\mathcal{E}$.

On peut donc parler du covolume de $H^p(\mathcal{X}, \mathcal{E})$, noté ici $\mathrm{covol}_{L^2}(H^p(\mathcal{X}, \mathcal{E}))$. Il dépend du choix des métriques. L'extension du théorème de Minkowski porte sur la quantité

$$\chi_{L^2}(\mathcal{E}) = \sum_p (-1)^{p+1} \log \mathrm{covol}_{L^2}(H^p(\mathcal{X}, \mathcal{E})),$$

calculée par une formule de type Riemann–Roch. Elle saisi des renseignements à la fois algébriques, et à la fois métriques, de $(\mathcal{X}, h_{\mathcal{X}})$ et $(\mathcal{E}, h_{\mathcal{E}})$, combinés dans des invariants appelés *classes caractéristiques arithmétiques*. On y pense comme des raffinements simultanés des notions de courbure de Gauss et de norme d'un idéal

2. Nous devrions plus précisément parler de métrique de Kähler.

entier. Cette *formule de Riemann–Roch arithmétique* [3] fut démontrée par Gillet–Soulé [14], à l'aide des profonds travaux de Bismut et de ses collaborateurs sur la torsion analytique holomorphe, dont notamment [6]. La torsion analytique holomorphe est un invariant numérique de nature spectrale, dont il faut tenir compte dans le calcul de χ_{L^2} en dimension supérieure. Sans rentrer dans des technicités, elle est définie comme

$$T(\mathcal{E}, h_{\mathcal{X}}, h_{\mathcal{E}}) = \sum_p (-1)^{p+1} \log \det \Delta^{0,p}, \tag{13}$$

où $\det \Delta^{0,p}$ est un réel strictement positif qui donne un sens au produit de toutes les valeurs propres strictement positives du laplacien $\Delta^{0,p}$. Ainsi, la formule de Riemann–Roch arithmétique tient compte du noyau de $\Delta^{0,p}$ (représentants harmoniques et métrique L^2, théorie de Hodge) mais aussi du reste du spectre. Cet aspect de la formule de Riemann–Roch arithmétique émerge d'une "évolution" de la formule d'indice d'Atiyah–Singer conçue par Bismut [4].

Pour avoir un aperçu du formalisme de Gillet–Soulé et la formule de Riemann–Roch arithmétique on pourra lire le Bourbaki de Bost [7]. Pour ce qui est de la torsion analytique et questions connexes, on renvoie le lecteur au survol de Bismut [5].

4. Exemples

La géométrie d'Arakelov à la Gillet–Soulé s'est développée dans plusieurs directions. Pour n'en citer qu'une, le fait que plusieurs variétés d'intérêt arithmétique ne sont pas toujours compactes, a motivé une extension du formalisme. Dans ce contexte, on cite les contributions de Bost [8] et Kühn [17] en petite dimension, et celles de Burgos–Kramer–Kühn [9, 10] en dimension quelconque. Une formule de Riemann–Roch arithmétique générale n'existe pas dans ce cadre, en raison des difficultés dans la théorie spectrale nécessaire au développement de la torsion analytique holomorphe. En petite dimension, on dispose malgré tout de quelques énoncés de cette nature, dont nous en présenterons des exemples d'application dans le contexte des courbes modulaires.

4.1. **Fonction zêta de Selberg et formule analytique du nombre de classes.** Soit $\Gamma = \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ le groupe des matrices carrées à coefficients entiers et déterminant 1, et $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ le demi-plan de Poincaré. Le groupe Γ agit sur $\mathbb{H}$ par transformations de Möbius. Le quotient $Y(1) := \mathbb{H}/\Gamma$ hérite de $\mathbb{H}$ une structure de surface de Riemann *non-compacte*. C'est un exemple d'espace de modules : les points de $Y(1)$ sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de courbes elliptiques $E = \mathbb{C}/\Lambda$, où Λ est un réseau de la forme $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, $\tau \in \mathbb{H}$. Comme surface de Riemann, $Y(1)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, par un isomorphisme naturel appelé le j-invariant des courbes elliptiques. Le lien avec les courbes elliptiques est étroitement connecté à l'existence d'une structure de variété arithmétique sur $Y(1)$. On s'y réfère comme la courbe modulaire.

Il est tentant d'appliquer la formule de Gillet–Soulé à $Y(1)$, munie de la métrique naturelle induite par la métrique hyperbolique $(dx^2 + dy^2)/y^2$, ne serait-ce que pour son importance en théorie des nombres. On a alors affaire à la non-compacité de $Y(1)$: la métrique hyperbolique présente une singularité à l'infini, qui persiste

3. On devrait plutôt dire *Grothendieck–Riemann–Roch arithmétique*. Il est courant de simplifier la terminologie comme nous l'avons fait.

même après compactification. Cette singularité se manifeste par la présence d'un spectre continu du laplacien $-y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})$ agissant sur $\mathcal{C}^\infty(Y(1),\mathbb{R})$, ce qui empêche de définir la torsion analytique (13). Toutefois, une étude approfondie de la théorie spectrale menée par Selberg [21] indique qu'il est possible de donner un sens au déterminant régularisé, à l'aide des longueurs des géodésiques fermées sur $Y(1)$. Le méchanisme qui relie le spectre du laplacien (y compris le spectre continu) aux longueurs géodésiques est la formule des traces de Selberg. Une généralisation de la formule de Gillet–Soulé à ce type de situations, où la torsion analytique est remplacée par une fonction zêta des géodésiques (fonction zêta de Selberg), est due à Freixas [11, 12] et Freixas–von Pippich [13]. Dans l'exemple particulier de la courbe modulaire, la formule de Freixas–von Pippich se traduit dans l'évaluation d'une valeur spéciale de la fonction zêta de Selberg de Γ, qui démeurait inconnue.

La fonction zêta de Selberg de Γ est définie par un double produit absolument convergent

$$Z(s,\Gamma)=\prod_{\gamma}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-e^{-(s+k)\ell(\gamma)}\right),\quad \operatorname{Re} s>1,$$

où le premier produit infini parcourt les géodésiques pour la métrique hyperbolique sur $Y(1)$, fermées et primitives[4], de longueur $\ell(\gamma)$. Par la formule des traces de Selberg, on démontre que $Z(s,\Gamma)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, et qu'elle est régulière avec un zéro simple en $s=1$. La valeur spéciale $Z'(1,\Gamma)$ est alors un réel strictement positif.

On remarquera l'analogie, quoique imparfaite, avec la fonction zêta de Riemann et son expression en produit eulérien :

$$\zeta(s)=\prod_{p\text{ premier}}(1-p^{-s})^{-1},\quad \operatorname{Re} s>1.$$

La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe à $\mathbb{C}$, ce qui est obtenu à l'aide de la fonction thêta de Jacobi et de la formule de sommation de Poisson. La formule des traces de Selberg en est une version non-abélienne. La fonction zêta de Riemann admet un pôle simple en $s=1$, dont le résidu vaut 1. Plus généralement, on définit la fonction zêta de Dedekind ζ_K d'un corps de nombres K par une expression similaire à ζ : on remplace les premiers p par la norme des idéaux maximaux de $\mathcal{O}_K$. La fonction ζ_K admet également un prolongement méromorphe, dont le résidu en $s=1$ fait l'objet de la formule analytique du nombres de classes [19]. Le résidu s'exprime en fonction d'invariants arithmétiques fondamentaux de K, dont le nombre de classes. Ainsi, évaluer $Z'(1,\Gamma)$ est une question analogue à la formule analytique du nombre de classes. On s'attend alors à trouver des quantités relevant des propriétés arithmétiques de la courbe modulaire $Y(1)$.

L'application de la formule de Riemann–Roch arithmétique de Freixas–von Pippich à la courbe modulaire $Y(1)$, fournit le résultat suivant.

Théorème 4.1. *Le réel* $\log Z'(1,\Gamma)$ *est une combinaison linéaire, à coefficients rationnels explicites, des quantités*

$$\frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)},\ \frac{\zeta'_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(0)}{\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(0)},\ \frac{\zeta'_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(0)}{\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(0)},$$

4. Primitives dans le sens où l'on parcourt l'image de γ une seule fois.

et quelques constantes "parasites" (e.g. $\log 2$, $\log \pi$, *etc.).* [5]

Dans cette "formule analytique du nombres de classes" pour $Z(s,\Gamma)$, les contributions énoncées s'expliquent ainsi :

(i) l'origine du terme $\zeta'(-1)/\zeta(-1)$ est un théorème de Bost (non-publié) et Kühn [17] sur les hauteurs des courbes modulaires, à son tour fondé sur un résultat classique de théorie analytique des nombres, dit formule limite de Kronecker. Nous le retrouverons au Théorème 4.2 ci-dessous.

(ii) les quantités $\zeta'_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(0)/\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(0)$ et $\zeta'_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(0)/\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(0)$ correspondent à la 2-torsion et 3-torsion dans $\Gamma/\{\pm 1\}$, respectivement. En termes géométriques, ce sont les contributions des points fixes non-triviaux de l'action de Γ, interprétés comme des courbes elliptiques à multiplication complexe. Ces courbes se distinguent d'une courbe elliptique générale du fait d'avoir plus d'automorphismes. Les dérivées logarithmiques des fonctions zêta de Dedekind apparaissent comme leurs hauteurs, dont l'évaluation résulte encore de la formule limite de Kronecker.

En retournant l'analogie avec les fonctions zêta de Dedekind, on peut se demander si la formula analytique du nombre de classes peut être vue comme une formule de Riemann–Roch. Cette question, aussi séduisante qu'osée, demeure mystérieuse.

4.2. **Volumes des espaces de formes modulaires.** Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\Gamma_n \subseteq \Gamma$ le sous-groupe d'indice fini des matrices congrues à l'identité modulo n. La courbe modulaire de niveau n est la surface de Riemann $Y(n) = \mathbb{H}/\Gamma(n)$. Elle fournit un revêtement ramifié de $Y(1)$, de groupe $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\pm 1$. La courbe $Y(n)$ classifie des courbes elliptiques $\mathbb{C}/\Lambda$ munies d'une base de leur partie de n-torsion : $\frac{1}{n}\Lambda/\Lambda \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. Comme pour $Y(1)$, cet interprétation est à la base de l'existence d'une structure naturelle de variété arithmétique sur $Y(n)$.

Introduisons maintenant les formes modulaires. Pour une fonction $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, on notera

$$f_{|\gamma}(\tau) := (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right), \quad \tau \in \mathbb{H}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Une forme modulaire de poids entier $k \geq 0$ pour Γ_n, est une fonction holomorphe $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ satisfaisant :

(i) *invariance sous l'action de* Γ_n *:* pour tout $\gamma \in \Gamma_n$, on a $f_{|\gamma} = f$.

(ii) *holomorphe à l'infini :* observons d'abord que si $\widetilde{\gamma} \in \mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, et γ est un relèvement à $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$, la fonction $f_{|\gamma}$ ne dépend que de $\widetilde{\gamma}$, et est invariante sous l'action de Γ_n. Écrivons-la donc $f_{|\widetilde{\gamma}}$. En particulier, $f_{|\widetilde{\gamma}}$ est invariante par la translation $\tau \mapsto \tau + n$ et possède un développement en série de Fourier (ou Laurent) en $q^{1/n} := e^{2\pi i\tau/n}$. On le contraint à être sous la forme

$$f_{|\widetilde{\gamma}}(\tau) = \sum_{m \geq 0} a_m(\widetilde{\gamma})\,(q^{1/n})^m, \quad a_m(\widetilde{\gamma}) \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

Lorsque les coefficients $a_0(\widetilde{\gamma})$ sont tous nuls, on dit que f est une forme cuspidale. Un exemple célèbre de forme cuspidale de poids 12 pour Γ est la forme de Ramanujan $\Delta(\tau) = q\prod_{m\geq 1}(1-q^m)^{24}$.

5. Dans une pré-publication très récente [16], Kalvin signale et corrige une erreur calculatoire qui modifie les coefficients rationnels, sans toutefois changer l'allure du résultat. Je lui en suis reconnaissant.

Les formes modulaires de poids k constituent un $\mathbb{C}$-vectoriel de dimension finie $M_k(\Gamma_n, \mathbb{C})$. Dorénavant, on s'intéressera aux sous-espaces des formes cuspidales, notés $S_k(\Gamma_n, \mathbb{C})$. Leur dimension peut être évaluée par une interprétation géométrique des formes modulaires en termes de formes différentielles, et par la formule de Riemann–Roch sur une compactification de $Y(n)$. On trouve que $\dim S_k(\Gamma_n, \mathbb{C})$ croit linéairement en k.

Pour tout $k \geq 0$, l'espace $S_k(\Gamma_n, \mathbb{C})$ possède une structure entière, ce qui est une manifestation de la nature arithmétique de $Y(n)$: avec les notations de (14), on impose aux coefficients de Fourier $a_m(\widetilde{\gamma})$ d'appartenir à $\mathbb{Z}[\zeta_n] = \mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]$, l'anneau des polynômes entiers dans les racines n-ièmes de l'unité. On obtient ainsi un $\mathbb{Z}[\zeta_n]$-module noté $S_k(\Gamma_n, \mathbb{Z}[\zeta_n])$. On démontre que pour tout plongement $\sigma\colon \mathbb{Z}[\zeta_n] \hookrightarrow \mathbb{C}$, on a $S_k(\Gamma_n, \mathbb{Z}[\zeta_n]) \otimes_\sigma \mathbb{C} = S_k(\Gamma_n, \mathbb{C})$.

L'espace $S_k(\Gamma_n, \mathbb{C})$ porte un produit scalaire hermitien naturel, appelé produit de Petersson. Pour deux formes cuspidales f et g de poids k, leur produit de Petersson est donné par l'intégrale suivante, bien définie :

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{H}/\Gamma_n} f(\tau)\overline{g(\tau)}(4\pi y)^k \frac{dx \wedge dy}{4\pi y^2}, \quad \tau = x + iy \in \mathbb{H}.$$

On comparera cette définition à (12). En procédant comme dans la Section 2, on définit le covolume de $S_k(\Gamma_n, \mathbb{Z}[\zeta_n])$ dans un $\mathbb{R}$-espace euclidien associé $S_k(\Gamma_n, \mathbb{Z}[\zeta_n])_\mathbb{R}$. On travaillera plutôt avec le degré arithmétique normalisé :

$$\widehat{\deg}\, S_k(\Gamma_n, \mathbb{Z}[\zeta_n]) = -\frac{1}{2[\mathbb{Q}(\zeta_n)\colon \mathbb{Q}][\Gamma\colon \Gamma_n]} \log \operatorname{vol}\left(\frac{S_k(\Gamma_n, \mathbb{Z}[\zeta_n])_\mathbb{R}}{S_k(\Gamma_n, \mathbb{Z}[\zeta_n])}\right).$$

Théorème 4.2. *Lorsque n est le produit de deux entiers ≥ 3 premiers entre eux, les covolumes des espaces de formes cuspidales entières obéissent à l'asymptotique*

$$\widehat{\deg}\, S_k(\Gamma_n, \mathbb{Z}[\zeta_n]) = \left(\zeta'(-1) + \frac{1}{2}\zeta(-1)\right)\frac{k^2}{2} + o(k^2), \quad k \to \infty. \tag{15}$$

L'énoncé découle d'une version asymptotique du théorème de Riemann–Roch arithmétique, due à Freixas et Berman–Freixas [3, 12]. Ce résultat assure l'existence d'un développement de la forme (15), dont le coefficient dominant est une hauteur arakelovienne. L'évaluation de cette hauteur dans l'exemple en cours est le contenu du théorème de Bost et Kühn, rencontré au Théorème 4.1. Leur contribution joue un rôle inaugural dans un vaste programme de Kudla autour des intersections arithmétiques sur les variétés de Shimura. Une conjecture générale de Maillot–Rössler [18] prédit que, dans ce contexte, les hauteurs s'expriment comme combinaison de dérivées logarithmiques de fonctions L aux entiers négatifs.

Rappelons que la dimension de $S_k(\Gamma_n, \mathbb{C})$ croit linéairement en k, alors que (15) croit quadratiquement. Ce gain d'ordre témoigne du passage du cadre géométrique au cadre arithmétique : la courbe modulaire $Y(n)$ est de dimension complexe 1, mais la variété arithmétique correspondante est en fait de dimension 2. Une évaluation numérique indique que $\zeta'(-1) + \frac{1}{2}\zeta(-1) \approx -0.066 < 0$, de manière que le degré arithmétique de $S_k(\Gamma_n, \mathbb{Z}[\zeta_n])$ est négatif pour k grand, tout au contraire de la dimension !

Remerciements. Je remercie chaleureusement Marcello Bernardara et Emmanuel Peyre pour la relecture critique de l'article et les améliorations suggérées, ainsi que

le comité de rédaction de la Gazette des Mathématiciens pour l'opportunité qui m'a été offerte.

Références

1. S. J. Arakelov, *An intersection theory for divisors on an arithmetic surface*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **38** (1974), 1179–1192.
2. N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 298, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
3. R. J. Berman and G. Freixas i Montplet, *An arithmetic Hilbert-Samuel theorem for singular hermitian line bundles and cusp forms*, Compos. Math. **150** (2014), no. 10, 1703–1728.
4. J.-M. Bismut, *The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators : two heat equation proofs*, Invent. Math. **83** (1986), no. 1, 91–151.
5. _____, *Superconnexions, indice local des familles, déterminant de la cohomologie et métriques de Quillen*, no. 46, 1991, Analyse globale et physique mathématique (Lyon, 1989), pp. 27–72.
6. J.-M. Bismut and G. Lebeau, *Complex immersions and Quillen metrics*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1991), no. 74, ii+298 pp. (1992).
7. J.-B. Bost, *Théorie de l'intersection et théorème de Riemann-Roch arithmétiques*, no. 201-203, 1991, Séminaire Bourbaki, Vol. 1990/91, pp. Exp. No. 731, 43–88 (1992).
8. _____, *Potential theory and Lefschetz theorems for arithmetic surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **32** (1999), no. 2, 241–312.
9. J. I. Burgos Gil, J. Kramer, and U. Kühn, *Arithmetic characteristic classes of automorphic vector bundles*, Doc. Math. **10** (2005), 619–716.
10. _____, *Cohomological arithmetic Chow rings*, J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007), no. 1, 1–172.
11. G. Freixas i Montplet, *An arithmetic Riemann-Roch theorem for pointed stable curves*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **42** (2009), no. 2, 335–369.
12. _____, *An arithmetic Hilbert-Samuel theorem for pointed stable curves*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **14** (2012), no. 2, 321–351.
13. G. Freixas i Montplet and A.-M. von Pippich, *Riemann–Roch isometries in the non-compact orbifold setting*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **22** (2020), no. 11, 3491–3564.
14. H. Gillet and C. Soulé, *An arithmetic Riemann-Roch theorem*, Invent. Math. **110** (1992), no. 3, 473–543.
15. P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994, Reprint of the 1978 original.
16. V. Kalvin, *Determinant of Friederichs Dirichlet Laplacians on* 2*-dimensional hyperbolic cones*, arXiv e-prints (2020), arXiv :2011.05407.
17. U. Kühn, *Generalized arithmetic intersection numbers*, J. Reine Angew. Math. **534** (2001), 209–236.
18. V. Maillot and D. Roessler, *Conjectures sur les dérivées logarithmiques des fonctions L d'Artin aux entiers négatifs*, Math. Res. Lett. **9** (2002), no. 5-6, 715–724.
19. J. Neukirch, *Algebraic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder.
20. P. Samuel, *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, Paris, 1967.
21. A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **20** (1956), 47–87.
22. C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002.

CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche – Sorbonne Université, 4 Place Jussieu, 75005 Paris, FRANCE

E-mail address: gerard.freixas@imj-prg.fr