



**HAL**  
open science

## ENCCRE - annotations et dossier critique de l'article Courbe polygone

Thierry Joffredo

► **To cite this version:**

Thierry Joffredo. ENCCRE - annotations et dossier critique de l'article Courbe polygone. Édition Numérique Collaborative et CRitique de l'Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers (1751-1772). Vol. IV, P. 387-389, 2021. hal-03411139

**HAL Id: hal-03411139**

**<https://hal.science/hal-03411139>**

Submitted on 2 Nov 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0  
International License

Article **COURBE POLYGONE**, vol. **IV (1754)**, p. 387a-389b

## Transcription

**COURBE POLYGONE**. On appelle ainsi une *courbe* considérée non comme rigoureusement *courbe*, mais comme un polygone d'une infinité de côtés. C'est ainsi que dans la géométrie de l'infini<sup>(2)</sup> on considère les *courbes* ; ce qui ne signifie autre chose, rigoureusement parlant, sinon qu'une *courbe* est la limite des polygones, tant inscrits que circonscrits. **Voyez** **LIMITE**, **EXHAUSTION**, **INFINI**, **DIFFÉRENTIEL**, &c. & **POLYGONE**.

2 Il faut distinguer, quand on traite une *courbe* comme polygone ou comme rigoureuse<sup>(3)</sup> ; cette attention est sur-tout nécessaire dans la théorie des forces centrales & centrifuges ; car quand on traite la *courbe* comme polygone, l'effet de la force centrale, c'est-à-dire la petite ligne qu'elle fait parcourir, est égale à la base de l'angle extérieur de la *courbe* ; & quand on traite la *courbe* comme rigoureuse, l'effet de la force centrale est égale<sup>(4)</sup> à la petite ligne, qui est la base de l'angle curviligne formé par la *courbe* & par sa tangente. Or il est aisé de voir que cette petite ligne n'est que la moitié de la première, parce que la tangente rigoureuse de la *courbe* divise en deux également l'angle extérieur que le petit côté prolongé fait avec le côté suivant. La première de ces lignes est égale au carré du petit côté divisé par le rayon du cercle osculateur, **voyez** **OSCULATEUR** & **DEVELOPPÉE** ; la seconde au carré du petit côté divisé par le diamètre du même cercle. La première est censée parcourue d'un mouvement uniforme, la seconde d'un mouvement uniformément accéléré : dans la première, la force centrale est supposée n'agir que par une impulsion unique, mais grande ; dans la seconde, elle est supposée agir, comme la pesanteur, par une somme de petits corps égaux ; & ces deux suppositions reviennent à une même ; car l'on sait qu'un corps mû d'un mouvement accéléré parcourroit uniformément avec sa vitesse finale le double de l'espace qu'il a parcouru d'un mouvement uniformément accéléré, pour acquérir cette vitesse. **Voyez** les articles **ACCELERATION**, **CENTRAL**, & **DESCENTE**. **Voyez aussi** *l'hist. de l'acad. 1722*<sup>(5)</sup>. & *mon traité de Dynamique, page 20. article 20. & page 30. article 26*<sup>(6)</sup>.

3 **Rectification d'une courbe**, est une opération qui consiste à trouver une ligne droite égale en longueur à cette *courbe*. **Voyez** **RECTIFICATION**.

4 **Inflexion d'une courbe**. **Voyez** **INFLEXION**.

5 **Quadrature d'une courbe**, est une opération qui consiste à trouver l'aire ou l'espace renfermé par cette *courbe*, c'est-à-dire à assigner un carré dont la surface soit égale à un espace curviligne. **Voyez** **QUADRATURE**.

6 **Famille de courbes**, est un assemblage de plusieurs *courbes* de différents genres, représentées toutes par la même équation d'un degré indéterminé, mais différent, selon la diversité du genre des *courbes*. **Voyez** **FAMILLE**.

7 Par exemple, supposons qu'on ait l'équation d'un degré indéterminé  $a^{m-1}x = y^m$  : si  $m = 2$ , on aura  $ax = y^2$  ; si  $m = 3$ , on aura  $a^2x = y^3$  ; si  $m = 4$ ,  $a^3x = y^4$ . Toutes les *courbes* auxquelles ces équations appartiennent

sont dites de la même famille par quelques géometres<sup>(7)</sup>.

Les équations qui représentent des familles de *courbes*, ne doivent pas être confondues avec les équations exponentielles<sup>(8)</sup> ; car quoique l'exposant soit indéterminé, par rapport à toute une famille de *courbes*, il est déterminé & constant par rapport à chacune des *courbes* qui la composent ; au lieu que dans les équations exponentielles l'exposant est variable & indéterminé pour une seule & même *courbe*. Voyez EXPONENTIEL .

Toutes les *courbes* algébriques composent, pour ainsi dire, une certaine famille, qui se subdivise en une infinité d'autres, dont chacune contient une infinité de genres. En effet dans les équations par lesquelles les *courbes* sont déterminées, il n'entre que des produits, soit des puissances des abscisses & des ordonnées par des coefficients constans, soit des puissances des abscisses par des puissances des ordonnées, soit de quantités constantes pures & simples, les unes par les autres. De plus chaque équation d'une *courbe* peut toujours avoir zéro pour un de ses membres, par exemple,  $ax = y^2$  se change en  $ax - y^2 = 0$ . Donc l'équation générale<sup>(9)</sup> qui représentera toutes les *courbes* algébriques sera

$$\left. \begin{aligned} ay^m + bxy^{m-1} + nx^2y^{m-2} \dots + fy^m \\ + fy^{m-1} + kxy^{m-2} \\ = qy^{m-2} \end{aligned} \right\} = 0$$

Nous devons remarquer ici que le P. Reyneau s'est trompé dans le second volume de son *analyse démontrée*<sup>(10)</sup>, lorsque voulant déterminer les tangentes de toutes les *courbes* géométriques en général, il prend pour l'équation générale de toutes ces *courbes*  $y^m + bx^n y^q + cx^p = 0$ , équation qui n'a que trois termes. Il est visible que cette équation est insuffisante<sup>(11)</sup>, & qu'on doit lui substituer celle que nous venons de donner.

*Courbe caustique*. Voyez CAUSTIQUE .

*Courbe diacaustique*. Voyez DIACAUSTIQUE .

Les meilleurs ouvrages<sup>(12)</sup> dans lesquels on puisse s'instruire de la théorie des *courbes*, sont, 1° l'*enumeratio linearum tertii ordinis* de M. Newton<sup>(13)</sup>, d'où une partie de cet article COURBE est tirée<sup>(14)</sup> : 2° l'ouvrage de M. Stirling<sup>(15)</sup> sur le même sujet, & *Geometria organica* de M. Maclaurin<sup>(16)</sup>, dont nous avons parlé : 3° *les usages de l'analyse* de Descartes par M. l'abbé de Gua<sup>(17)</sup>, déjà cités ; ouvrage original & plein d'excellentes choses, mais qu'il faut lire avec précaution<sup>(18)</sup> (Voyez BRANCHE & REBROUSSEMENT .) : 4° *l'introduction / à l'analyse des lignes courbes*, par M. Cramer<sup>(19)</sup> ; ouvrage très-complet, très-clair & très-instructif, & dans lequel on trouve d'ailleurs plusieurs méthodes nouvelles<sup>(20)</sup> : 5° l'ouvrage de M. Euler, qui a pour titre, *introductio in analys. infinitorum*, Lausan. 1748<sup>(21)</sup>.

Sur les propriétés, la génération, &c. des différentes *courbes* mécaniques particulieres ; par exemple, de la cycloïde, de la logarithmique, de la spirale, de la quadratrice, &c. Voy. les articles CYCLOÏDE, LOGARITHMIQUE, &c.

On peut voir aussi la dernière section de *l'application de l'Algebre à la Géométrie*, de M. Guisnée<sup>(22)</sup>, où l'on trouvera quelques principes généraux sur les *courbes* mécaniques. Voyez aussi MECHANIQUE & TRANSCENDANT .

On peut faire passer une *courbe* géométrique & réguliere, par tant de points qu'on voudra d'une *courbe* quelconque irréguliere, tracée sur le papier ; car ayant imaginé dans le plan de cette *courbe* une ligne droite quelconque, qu'on prendra pour la ligne des abscisses, & ayant abaissé des points donnés de la *courbe* irréguliere des perpendiculaires à la ligne des  $x$ , on nommera  $a$  la première ordonnée, &  $b$  l'abscisse qui lui répond ;  $c$  la seconde ordonnée, &  $e$  l'abscisse correspondante ;  $f$  la troisième ordonnée, &  $g$  l'abscisse correspondante. Ensuite on supposera une *courbe* dont l'équation<sup>(23)</sup> soit  $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^2 + \&c.$  & faisant successivement  $y$

$= a, x = b ; y = c, x = e ; y = f, x = g, \&c.$  on déterminera les coefficients  $A, B, C, \&c.$  en tel nombre qu'on voudra ; & la *courbe* régulière dont l'équation est  $y = A + Bx + Cx^2, \&c.$  passera par tous les points donnés<sup>(24)</sup>. S'il y a  $n$  points donnés, il faudra supposer  $n$  coefficients  $A, B, C, D, \&c.$  On peut donc faire approcher aussi près qu'on voudra une *courbe* irrégulière d'une *courbe* régulière ; mais jamais on ne parviendra à faire coïncider l'un avec l'autre<sup>(25)</sup> ; & il ne faut pas s'imaginer qu'on puisse jamais, à la vûe simple, déterminer l'équation d'une *courbe*, comme l'a crû le géometre dont nous avons parlé au commencement de cet article<sup>(26)</sup>.

Les *courbes* dont l'équation  $y = A + Bx + Cx^2 \&c.$  s'appellent *courbes de genre parabolique*. Voyez PARABOLIQUE. Elles servent à rendre une *courbe* quelconque irrégulière ou mécanique, le plus géométrique qu'il est possible. Elles servent aussi à l'équarrer<sup>(27)</sup> par approximation<sup>(28)</sup>. Voyez QUADRATURE. Au reste, il y a des *courbes*, par exemple, les *courbes ovales* ou *rentrant en elles-mêmes*, par lesquelles on ne peut jamais faire passer une *courbe* de genre parabolique ; parce que dans cette dernière *courbe* l'ordonnée n'a jamais qu'une valeur, & que dans les *courbes ovales*, elle en a toujours au moins deux. Mais on pourroit, par exemple, rapporter ces *courbes*, lorsqu'elles ont un axe qui les divise en deux également, à l'équation  $y = A + Bx + Cx^2 + \&c.$  Voyez METHODE DIFFERENTIELLE<sup>(29)</sup>.

*Courbe à double courbure*. On appelle ainsi une *courbe* dont tous les points ne sauroient être supposés dans un même plan, & qui par conséquent est doublement *courbe*, & par elle-même, & par la surface sur laquelle on peut la supposer appliquée. On distingue par cette dénomination les *courbes* dont il s'agit, d'avec les *courbes à simple courbure* ou *courbes ordinaires*. M. Clairaut a donné un traité de ces *courbes à double courbure*<sup>(30)</sup> ; c'est le premier ouvrage qu'il ait publié.

Une *courbe* quelconque a double courbure étant supposée tracée ; on peut projeter cette *courbe* sur deux plans différens perpendiculaires l'un à l'autre, & les projections seront deux *courbes* ordinaires qui auront un axe commun & des ordonnées différentes. L'équation d'une de ces *courbes* sera, par exemple, en  $x$  & en  $y$ , l'autre en  $x$  & en  $z$ . Ainsi l'équation d'une *courbe* à double courbure<sup>(31)</sup> sera composée de deux équations à deux variables chacune, qui ont chacune une même variable commune<sup>(32)</sup>. Il est à remarquer que quand on a l'équation en  $x$  & en  $y$ , & l'équation en  $x$  & en  $z$ , on peut avoir par les règles connues<sup>(33)</sup> ( Voyez EQUATION & DIVISION ) une autre équation en  $y$  & en  $z$  ; & ce sera l'équation d'une troisième *courbe*, qui est la projection de la *courbe* à double courbure sur un troisième plan perpendiculaire aux deux premiers.

On peut regarder, si l'on veut, une des *courbes* de projection, par exemple, celle qui a pour coordonnées  $x$  &  $y$ , comme l'axe curviligne de la *courbe* à double courbure. Si on veut avoir la tangente de cette dernière *courbe* en un point quelconque, on menera d'abord la tangente de la *courbe* de projection au point correspondant, c'est-à-dire au point qui est la projection de celui dont on demande la tangente ; & sur cette tangente prolongée autant qu'il sera nécessaire, on prendra une partie  $= \frac{zds}{dz}$ ,  $ds$  exprimant le petit arc de la *courbe* de projection : on a le rapport de  $ds$  à  $dx$  par l'équation de la *courbe* en  $x$  & en  $y$  ( Voyez TANGENTE & DIFFERENTIEL ) ; on a celui de  $dx$  à  $dz$  par l'équation de la *courbe* en  $x$  & en  $z$ . Donc  $\frac{zds}{dz}$  pourra toujours être exprimé par une quantité finie, d'où les différentielles disparaîtront. Une *courbe* à double courbure est algébrique, quand les deux *courbes* de projection le sont ; elle est mécanique, quand l'une des *courbes* de projection est mécanique, ou quand elles le sont toutes deux. Mais dans ce dernier cas on n'en trouvera pas moins les tangentes ; car par l'équation différentielle des *courbes* de projection, on aura toujours la valeur de  $ds$  en  $dx$  & celle de  $dz$  en  $dx$ .

Surfaces courbes. Une surface<sup>(34)</sup> *courbe* est représentée en Géométrie par une équation à trois variables, par exemple,  $x, y$  &  $z$ . En effet, si on prend une ligne quelconque au-dedans ou au-dehors de la surface *courbe* pour la ligne des  $x$ , & qu'on imagine à cette ligne une infinité de plans perpendiculaires qui coupent la surface *courbe*, ces plans formeront autant de *courbes*, dont l'équation sera en  $y$  & en  $z$ , & dont le parametre sera la distance variable  $x$  du plan coupant à l'origine des  $x$ . Ainsi,  $zz = xx - yy$ , est l'équation d'un cône droit & rectangle, dont l'axe est la ligne des  $x$ . M. Descartes est le premier qui ait déterminé les surfaces *courbes* par des équations à trois variables<sup>(35)</sup>, comme les lignes *courbes* par des équations à deux.

Une surface *courbe* est géométrique, quand son équation est algébrique & exprimée en termes finis. Elle est mécanique, quand son équation est différentielle & non algébrique ; dans ce cas on peut représenter l'équation de la surface *courbe* par  $dz = \alpha dx + \beta dy$ ,  $\alpha$  &  $\beta$  étant des fonctions de  $x$ , de  $y$  & de  $z$ . Il semble d'abord qu'on aura cette surface *courbe*, en menant à chaque point de la ligne des  $x$  un plan perpendiculaire à cette ligne, & en traçant ensuite sur ce plan la *courbe* dont l'équation est  $dz = \beta dy$ ,  $x$  étant regardée comme un parametre constant, &  $dx$  étant supposée = 0. Cette construction donneroit à la vérité une surface *courbe* ; mais il faut que la surface *courbe* satisfasse encore à l'équation  $dz = \alpha dx$ ,  $y$  étant regardé comme constant ; c'est-à-dire il faut que les sections de la surface *courbe*, par un plan parallele à la ligne des  $x$ , soient représentées par l'équation  $dz = \alpha dx$ . Or cela ne peut avoir lieu que lorsqu'il y a une certaine condition entre les quantités  $\alpha$  &  $\beta$  ; condition que M. Fontaine<sup>(36)</sup>, de l'académie des Sciences, a découvert le premier. On trouvera aussi dans les mémoires de l'académie de Petersbourg, tome III.<sup>(37)</sup> des recherches sur la ligne la plus courte<sup>(38)</sup> que l'on puisse tracer sur une surface / *courbe* entre deux points donnés. Sur une surface plane, la ligne la plus courte est une ligne droite. Sur une surface sphérique, la ligne la plus courte est un arc de grand cercle passant par les deux points donnés. Et en effet il est aisé de voir, par les principes de la Géométrie ordinaire, que cet arc est plus petit que tout autre ayant la même corde ; car, à cordes égales, les plus petits arcs sont ceux qui ont un plus grand rayon. Voyez aussi les œuvres de Bernoulli, tome IV. page 108<sup>(39)</sup>. La ligne dont il s'agit a cette propriété, que tout plan passant par trois points infiniment proches, ou deux côtés contigus de la *courbe*, doit être perpendiculaire au plan qui touche la *courbe* en cet endroit. En voici la preuve. Toute *courbe* qui passe par deux points infiniment proches d'une surface sphérique, & qu'on peut toujours regarder comme un arc de cercle, est évidemment la ligne la plus courte, lorsqu'elle est un arc de grand cercle ; & cet arc de grand cercle est perpendiculaire au plan touchant, comme on peut le démontrer aisément par les élémens de Géométrie. Or toute portion de surface *courbe* infiniment petite peut être regardée comme une portion de surface sphérique, & toute partie de *courbe* infiniment petite comme un arc de cercle. Donc, &c. La perpendiculaire à la méridienne de la France tracée par M. Cassini, est une *courbe* à double courbure, & est la plus courte qu'on puisse tracer sur la surface de la terre regardée comme un sphéroïde aplati. Voyez les mémoires de l'acad. de 1732 & 1733<sup>(40)</sup>. Voilà tout ce que nous pouvons dire sur cette matiere, dans un ouvrage de l'espece de celui-ci.

Des courbes mécaniques, & de leur usage pour la construction des équations différentielles. Nous avons expliqué plus haut ce que c'est que ces *courbes*. Il ne s'agit que d'expliquer ici comment on les construit, ou en général comment on construit une équation différentielle. Soit, par exemple<sup>(41)</sup>,  $dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$  une équation à construire, on aura  $y = \int \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}} + C$ ,  $C$  étant une constante qu'on ajoute, parce que  $\int \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$



est supposée = 0 lorsque  $x = 0$ , & qu'on suppose que  $x = 0$  rend  $y = C$ .  
 (Voyez **CONSTANTE**). On construira d'abord une *courbe* géométrique dont les ordonnées soient  $\frac{aa}{\sqrt{2ax-xx}}$  les abscisses étant  $x$ , l'aire de cette *courbe* (Voyez **QUADRATURE**. ) sera  $\int \frac{aadx}{\sqrt{2ax-xx}}$  ; ainsi en supposant cette *courbe* générale, si on fait un carré  $zz = \int \frac{aadx}{\sqrt{2ax-xx}}$ , on aura  $y = \frac{zz}{a} + C$ , & on construira la *courbe* dont l'ordonnée est  $y$ .

Cette méthode suppose, comme on voit, que les indéterminées soient séparées dans l'équation différentielle (Voyez **CALCUL INTÉGRAL**) ; elle suppose de plus les quadratures, sans cela elle ne pourroit réussir.

Soit en général  $Xdx = Y dy$ ,  $X$  étant une fonction de  $x$  (Voyez **FONCTION**), &  $Y$  une fonction de  $y$ . On construira d'abord par la méthode précédente une *courbe* dont les abscisses soient  $x$ , & dont les ordonnées  $z$  soient  $= \int Xdx$  divisé par une constante convenable, c'est-à-dire par une constante  $m$  qui ait autant de dimensions qu'il y en a dans  $X$  ; ensorte que  $\int \frac{Xdx}{m}$  soit d'une dimension, pour pouvoir être égale à une ligne  $z$ . Ensuite on construira de même une *courbe* dont les abscisses soient  $y$ , & dont les ordonnées  $u$  soient  $= \int \frac{Ydy}{m}$  ; prenant ensuite  $u$  dans la dernière *courbe* =  $z$  dans l'autre, on aura l' $x$  & l' $y$  correspondantes ; & ces  $x$  &  $y$  joints à angles droits, si les coordonnées doivent faire un angle droit, donneront la *courbe* qu'on cherche.

Voyez dans la dernière section de l'application de l'Algebre à la géométrie de M. Guisnée<sup>(42)</sup>, & dans l'analyse des infiniment petits de M. de l'Hopital<sup>(43)</sup>, plusieurs exemples de construction des équations différentielles<sup>(44)</sup> par des *courbes mécaniques*. (O)<sup>(45)</sup>

rons de parler; propriété que M. Newton n'avoit  
 fan qu'enoncer sans démonstration. *Voyez aussi* sur  
 cette proposition l'ouvrage cité de M. l'abbé de Gua,  
 page 198. & suiv. *Voyez aussi* OMBRE.

*Usage des courbes pour la construction des équations.*  
 L'usage principal des courbes dans la Géométrie, est  
 de donner par leurs points d'interfection la solution  
 des problèmes. *Voyez* CONSTRUCTION.

Supposons, par exemple, qu'on ait à construire  
 une équation de neuf dimensions, comme  $x^9 + b x^7$   
 $+ c x^5 + d x^3 + e x^2 + (m + f) x^3 + g x^2 + h x +$   
 $k = 0$ , dans laquelle  $b, c, d, \&c.$  signifient des  
 quantités quelconques données, affectées des signes  
 $+$  ou  $-$ ; on prendra l'équation à la parabole cubi-  
 que  $x^3 = y$ , & mettant  $y$  pour  $x^3$  dans la première  
 équation, elle se changera en  $y^3 + b x y^2 + c y^2$   
 $+ d x^2 y + e x y + m y + f x^3 + g x^2 + h x + k$   
 $= 0$ , équation à une autre courbe du second genre  
 dans laquelle  $m$  ou  $f$  peuvent être supposés  $= 0$ . Si  
 on décrit chacune de ces courbes, leurs points d'in-  
 terfection donneront les racines de l'équation propo-  
 sée. Il suffit de décrire une fois la parabole cubi-  
 que. Si l'équation à construire se réduit à 7 dimensions  
 par le manquement des termes  $h x + k$ , l'autre courbe  
 aura, en effaçant  $m$ , un point double à l'origine des  
 abscisses, & pourra être décrite par différentes mé-  
 thodes. Si l'équation est réduite à six dimensions par  
 le manquement des trois termes  $g x^2 + h x + k$ ,  
 l'autre courbe, en effaçant  $f$ , deviendra une section  
 conique; & si par le manquement des six derniers  
 termes l'équation est réduite à trois dimensions, on  
 retombera dans la construction que Wallis en a don-  
 née par le moyen d'une parabole cubique & d'une  
 ligne droite. *Voyez* CONSTRUCTION, & l'ouvrage  
 de M. Cramer, chap. *ix*.

**COURBE POLYGONE.** On appelle ainsi une courbe  
 considérée non comme rigoureusement courbe, mais  
 comme un polygone d'une infinité de côtés. C'est  
 ainsi que dans la géométrie de l'infini on considère  
 les courbes; ce qui ne signifie autre chose, rigoureu-  
 sement parlant, sinon qu'une courbe est la limite des  
 polygones, tant inscrits que circonscrits. *Voyez* LI-  
 MITE, EXHAUSTION, INFINI, DIFFÉRENTIEL, &c.  
 & POLYGONE.

Il faut distinguer, quand on traite une courbe com-  
 me polygone ou comme rigoureuse; cette atten-  
 tion est sur-tout nécessaire dans la théorie des for-  
 ces centrales & centrifuges; car quand on traite la  
 courbe comme polygone, l'effet de la force centrale,  
 c'est-à-dire la petite ligne qu'elle fait parcourir, est  
 égale à la base de l'angle extérieur de la courbe; &  
 quand on traite la courbe comme rigoureuse, l'effet  
 de la force centrale est égale à la petite ligne, qui  
 est la base de l'angle curviligne formé par la courbe  
 & par sa tangente. Or il est aisé de voir que cette  
 petite ligne n'est que la moitié de la première, parce  
 que la tangente rigoureuse de la courbe divise en deux  
 également l'angle extérieur que le petit côté pro-  
 longé fait avec le côté suivant. La première de ces  
 lignes est égale au quarré du petit côté divisé par  
 le rayon du cercle osculateur, *voyez* OSCULATEUR  
 & DEVELOPPÉE; la seconde au quarré du petit  
 côté divisé par le diamètre du même cercle. La pre-  
 mière est censée parcourue d'un mouvement unifor-  
 me, la seconde d'un mouvement uniformément  
 accéléré: dans la première, la force centrale est  
 supposée n'agir que par une impulsion unique, mais  
 grande; dans la seconde, elle est supposée agir,  
 comme la pesanteur, par une somme de petits corps  
 égaux; & ces deux suppositions reviennent à une  
 même; car l'on fait qu'un corps mù d'un mou-  
 vement accéléré parcourroit uniformément avec  
 sa vitesse finale le double de l'espace qu'il a par-  
 couru d'un mouvement uniformément accéléré, pour

acquérir cette vitesse. *Voyez les articles* ACCELE-  
 RATION, CENTRAL, & DESCENTE. *Voyez aussi* l'hist.  
 de l'acad. 1722. & mon traité de Dynamique, page  
 20, article 20. & page 30, article 26.

*Rectification d'une courbe*, est une opération qui  
 consiste à trouver une ligne droite égale en longueur  
 à cette courbe. *Voyez* RECTIFICATION.

*Inflexion d'une courbe*. *Voyez* INFLEXION.

*Quadrature d'une courbe*, est une opération qui  
 consiste à trouver l'aire ou l'espace renfermé par  
 cette courbe, c'est-à-dire à assigner un quarré dont  
 la surface soit égale à un espace curviligne. *Voyez*  
 QUADRATURE.

*Famille de courbes*, est un assemblage de plusieurs  
 courbes de différens genres, représentées toutes par  
 la même équation d'un degré indéterminé, mais dif-  
 férent, selon la diversité du genre des courbes. *Voyez*  
 FAMILLE.

Par exemple, supposons qu'on ait l'équation d'un  
 degré indéterminé  $a^{m-1} x = y^m$ : si  $m = 2$ , on aura  
 $a x = y^2$ ; si  $m = 3$ , on aura  $a^2 x = y^3$ ; si  $m = 4$ ,  
 $a^3 x = y^4$ . Toutes les courbes auxquelles ces équations  
 appartiennent sont dites de la même famille  
 par quelques géomètres.

Les équations qui représentent des familles de  
 courbes, ne doivent pas être confondues avec les  
 équations exponentielles; car quoique l'exposant  
 soit indéterminé, par rapport à toute une famille de  
 courbes, il est déterminé & constant par rapport à  
 chacune des courbes qui la composent; au lieu que  
 dans les équations exponentielles l'exposant est va-  
 riable & indéterminé pour une seule & même courbe.  
*Voyez* EXPONENTIEL.

Toutes les courbes algébriques composent, pour  
 ainsi dire, une certaine famille, qui se subdivise en  
 une infinité d'autres, dont chacune contient une in-  
 finité de genres. En effet dans les équations par les-  
 quelles les courbes sont déterminées, il n'entre que  
 des produits, soit des puissances des abscisses & des  
 ordonnées par des coefficients constants, soit des puis-  
 sances des abscisses par des puissances des ordonnées,  
 soit de quantités constantes pures & simples, les unes  
 par les autres. De plus chaque équation d'une courbe  
 peut toujours avoir zéro pour un de ses membres,  
 par exemple,  $a x = y^2$  se change en  $a x - y^2 = 0$ .  
 Donc l'équation générale qui représentera toutes les  
 courbes algébriques sera

$$\left. \begin{aligned} a y^n + b x y^{n-1} + n x^2 y^{n-2} \dots + f y^n \\ + f y^{n-1} + k x y^{n-2} \\ = q y^{n-1} \end{aligned} \right\} = 0.$$

Nous devons remarquer ici que le P. Reyneau  
 s'est trompé dans le second volume de son *analyse*  
*démonstrée*, lorsque voulant déterminer les tangentes  
 de toutes les courbes géométriques en général, il  
 prend pour l'équation générale de toutes ces courbes  
 $y^n + b x^m y^l + c x^p = 0$ , équation qui n'a que  
 trois termes. Il est visible que cette équation est in-  
 suffisante, & qu'on doit lui substituer celle que nous  
 venons de donner.

*Courbe caustique*. *Voyez* CAUSTIQUE.

*Courbe diacaustique*. *Voyez* DIACAUSTIQUE.

Les meilleurs ouvrages dans lesquels on puisse  
 s'instruire de la théorie des courbes, sont, 1° l'*enumera-  
 tio linearum tertii ordinis* de M. Newton, d'où une  
 partie de cet article COURBE est tirée: 2° l'ouvrage  
 de M. Stirling sur le même sujet, & *Geometria organica*  
 de M. Maclaurin, dont nous avons parlé: 3° les *usages*  
*de l'analyse* de Descartes par M. l'abbé de Gua,  
 déjà cités; ouvrage original & plein d'excellentes  
 choses, mais qu'il faut lire avec précaution (*Voyez*  
 BRANCHE & REBOUSSEMENT.); 4° l'*introduction*  
 Ccc ij



à l'analyse des lignes courbes, par M. Cramer; ouvrage très-complet, très-clair & très-instructif, & dans lequel on trouve d'ailleurs plusieurs méthodes nouvelles: 5<sup>e</sup> l'ouvrage de M. Euler, qui a pour titre, *introdutio in analysi infinitorum*, Lausan. 1748.

Sur les propriétés, la génération, &c. des différents courbes mécaniques particulières; par exemple, de la cycloïde, de la logarithmique, de la spirale, de la quadratrice, &c. Voy. les articles CYCLOÏDE, LOGARITHMIQUE, &c.

On peut voir aussi la dernière section de l'application de l'Algebre à la Géométrie, de M. Guinée, où l'on trouvera quelques principes généraux sur les courbes mécaniques. Voyez aussi MECHANIQUE & TRANSCENDANT.

On peut faire passer une courbe géométrique & régulière, par tant de points qu'on voudra d'une courbe quelconque irrégulière, tracée sur le papier; car ayant imaginé dans le plan de cette courbe une ligne droite quelconque, qu'on prendra pour la ligne des abscisses, & ayant abaissé des points donnés de la courbe irrégulière des perpendiculaires à la ligne des  $x$ , on nommera  $a$  la première ordonnée, &  $b$  l'abscisse qui lui répond;  $c$  la seconde ordonnée, &  $e$  l'abscisse correspondante;  $f$  la troisième ordonnée, &  $g$  l'abscisse correspondante. Ensuite on supposera une courbe dont l'équation soit  $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{&c.}$  & faisant successivement  $y = a, x = b$ ;  $y = c, x = e$ ;  $y = f, x = g$ , &c. on déterminera les coefficients  $A, B, C$ , &c. en tel nombre qu'on voudra; & la courbe régulière dont l'équation est  $y = A + Bx + Cx^2$ , &c. passera par tous les points donnés. S'il y a  $n$  points donnés, il faudra supposer  $n$  coefficients  $A, B, C, D$ , &c. On peut donc faire approcher aussi près qu'on voudra une courbe irrégulière d'une courbe régulière; mais jamais on ne parviendra à faire coïncider l'un avec l'autre; & il ne faut pas s'imaginer qu'on puisse jamais, à la vue simple, déterminer l'équation d'une courbe, comme l'a cru le géomètre dont nous avons parlé au commencement de cet article.

Les courbes dont l'équation  $y = A + Bx + Cx^2$  &c. s'appellent courbes de genre parabolique. Voyez PARABOLIQUE. Elles servent à rendre une courbe quelconque irrégulière ou mécanique, le plus géométrique qu'il est possible. Elles servent aussi à l'équarrer par approximation. Voyez QUADRATURE. Au reste, il y a des courbes, par exemple, les courbes ovales ou rentrant en elles-mêmes, par lesquelles on ne peut jamais faire passer une courbe de genre parabolique; parce que dans cette dernière courbe l'ordonnée n'a jamais qu'une valeur, & que dans les courbes ovales, elle en a toujours au moins deux. Mais on pourroit, par exemple, rapporter ces courbes, lorsqu'elles ont un axe qui les divise en deux également, à l'équation  $y = A + Bx + Cx^2 + \text{&c.}$  Voyez METHODE DIFFERENTIELLE.

Courbe à double courbure. On appelle ainsi une courbe dont tous les points ne fauroient être supposés dans un même plan, & qui par conséquent est doublement courbe, & par elle-même, & par la surface sur laquelle on peut la supposer appliquée. On distingue par cette dénomination les courbes dont il s'agit, d'avec les courbes à simple courbure ou courbes ordinaires. M. Clairaut a donné un traité de ces courbes à double courbure; c'est le premier ouvrage qu'il ait publié.

Une courbe quelconque a double courbure étant supposée tracée; on peut projeter cette courbe sur deux plans différens perpendiculaires l'un à l'autre, & les projections seront deux courbes ordinaires qui auront un axe commun & des ordonnées différentes. L'équation d'une de ces courbes sera, par exemple, en  $x$  & en  $y$ , l'autre en  $x$  & en  $z$ . Ainsi l'équation

d'une courbe à double courbure sera composée de deux équations à deux variables chacune, qui ont chacune une même variable commune. Il est à remarquer que quand on a l'équation en  $x$  & en  $y$ , & l'équation en  $x$  & en  $z$ , on peut avoir par les règles connues (Voyez EQUATION & DIVISION) une autre équation en  $y$  & en  $z$ ; & ce sera l'équation d'une troisième courbe, qui est la projection de la courbe à double courbure sur un troisième plan perpendiculaire aux deux premiers.

On peut regarder, si l'on veut, une des courbes de projection, par exemple, celle qui a pour coordonnées  $x$  &  $y$ , comme l'axe curviligne de la courbe à double courbure. Si on veut avoir la tangente de cette dernière courbe en un point quelconque, on mènera d'abord la tangente de la courbe de projection au point correspondant, c'est-à-dire au point qui est la projection de celui dont on demande la tangente; & sur cette tangente prolongée autant qu'il sera nécessaire, on prendra une partie  $= \frac{y \, dz}{z \, dy}$ ,  $dz$  exprimant le petit arc de la courbe de projection; on a le rapport de  $ds$  à  $d\pi$  par l'équation de la courbe en  $x$  & en  $y$  (Voyez TANGENTE & DIFFERENTIEL); on a celui de  $d\pi$  à  $d\tau$  par l'équation de la courbe en  $x$  & en  $z$ . Donc  $\frac{ds}{d\tau}$  pourra toujours être exprimé par une quantité finie, d'où les différentielles disparaîtront. Une courbe à double courbure est algébrique, quand les deux courbes de projection le sont: elle est mécanique, quand l'une des courbes de projection est mécanique, ou quand elles le sont toutes deux. Mais dans ce dernier cas on n'en trouvera pas moins les tangentes; car par l'équation différentielle des courbes de projection, on aura toujours la valeur de  $ds$  en  $d\pi$  & celle de  $d\tau$  en  $d\pi$ .

Surfaces courbes. Une surface courbe est représentée en Géométrie par une équation à trois variables, par exemple,  $x, y$  &  $z$ . En effet, si on prend une ligne quelconque au-dedans ou au-dehors de la surface courbe pour la ligne des  $x$ , & qu'on imagine à cette ligne une infinité de plans perpendiculaires qui coupent la surface courbe, ces plans formeront autant de courbes, dont l'équation sera en  $y$  & en  $z$ , & dont le paramètre fera la distance variable  $x$  du plan coupant à l'origine des  $x$ . Ainsi,  $z = x - y^2$ , est l'équation d'un cône droit & rectangle, dont l'axe est la ligne des  $x$ . M. Descartes est le premier qui ait déterminé les surfaces courbes par des équations à trois variables, comme les lignes courbes par des équations à deux.

Une surface courbe est géométrique, quand son équation est algébrique & exprimée en termes finis. Elle est mécanique, quand son équation est différentielle & non algébrique; dans ce cas on peut représenter l'équation de la surface courbe par  $d\tau = a \, dx + b \, dy$ ,  $a$  &  $b$  étant des fonctions de  $x$ , de  $y$  & de  $z$ . Il semble d'abord qu'on aura cette surface courbe, en menant à chaque point de la ligne des  $x$  un plan perpendiculaire à cette ligne, & en traçant ensuite sur ce plan la courbe dont l'équation est  $d\tau = b \, dy$ ,  $x$  étant regardée comme un paramètre constant, &  $dx$  étant supposée  $= 0$ . Cette construction donneroit à la vérité une surface courbe; mais il faut que la surface courbe satisfasse encore à l'équation  $d\tau = a \, dx$ ,  $y$  étant regardée comme constant; c'est-à-dire il faut que les sections de la surface courbe, par un plan parallèle à la ligne des  $x$ , soient représentées par l'équation  $d\tau = a \, dx$ . Or cela ne peut avoir lieu que lorsqu'il y a une certaine condition entre les quantités  $a$  &  $b$ ; condition que M. Fontaine, de l'académie des Sciences, a découvert le premier. On trouvera aussi dans les mémoires de l'académie de Petersbourg, tome III. des recherches sur la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur une surface



*courbe* entre deux points donnés. Sur une surface plane, la ligne la plus courte est une ligne droite. Sur une surface sphérique, la ligne la plus courte est un arc de grand cercle passant par les deux points donnés. Et on effecte il est aisé de voir, par les principes de la Géométrie ordinaire, que cet arc est plus petit que tout autre ayant la même corde; car, à cordes égales, les plus petits arcs sont ceux qui ont un plus grand rayon. Voyez aussi les *œuvres* de Bernoulli, tome IV, page 108. La ligne dont il s'agit a cette propriété, que tout plan passant par trois points infiniment proches, ou deux côtés contigus de la courbe, doit être perpendiculaire au plan qui touche la courbe en cet endroit. En voici la preuve. Toute courbe qui passe par deux points infiniment proches d'une surface sphérique, & qu'on peut toujours regarder comme un arc de cercle, est évidemment la ligne la plus courte, lorsqu'elle est un arc de grand cercle; & cet arc de grand cercle est perpendiculaire au plan touchant, comme on peut le démontrer aisément par les élémens de Géométrie. Or toute portion de surface courbe infiniment petite peut être regardée comme une portion de surface sphérique, & toute partie de courbe infiniment petite comme un arc de cercle. Donc, &c. La perpendiculaire à la méridienne de la France tracée par M. Cassini, est une courbe à double courbure, & est la plus courte qu'on puisse tracer sur la surface de la terre regardée comme une sphéroïde aplati. Voyez les *mémoires de l'acad.* de 1732 & 1733. Voilà tout ce que nous pouvons dire sur cette matière, dans un ouvrage de l'espece de celui-ci.

Des courbes mécaniques, & de leur usage pour la construction des équations différentielles. Nous avons expliqué plus haut ce que c'est que ces courbes. Il ne s'agit que d'expliquer ici comment on les construit, ou en général comment on construit une équation différentielle. Soit, par exemple,  $d y = \frac{a dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$

une équation à construire, on aura  $y = \int \frac{a dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$

+ C, C étant une constante qu'on ajoute, parce que  $\int \frac{a dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$  est supposée = 0 lorsque  $x = 0$ , & qu'on suppose que  $x = 0$  rend  $y = C$ . Voyez CONSTANTE. On construira d'abord une courbe géométrique dont les ordonnées soient  $\frac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$  les abscisses étant  $x$ ,

l'aire de cette courbe (Voyez QUADRATURE.) sera  $\int \frac{a dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ ; ainsi en supposant cette courbe générale,

si on fait un carré  $z z = \int \frac{a dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$ , on aura  $y = \frac{z^2}{2} + C$ , & on construira la courbe dont l'ordonnée est  $y$ .

Cette méthode suppose, comme on voit, que les indéterminées soient séparées dans l'équation différentielle (Voyez CALCUL INTEGRAL); elle suppose de plus les quadratures, sans cela elle ne pourroit servir.

Soit en général  $X dx = Y dy$ ,  $X$  étant une fonction de  $x$  (Voyez FONCTION), &  $Y$  une fonction de  $y$ . On construira d'abord par la méthode précédente une courbe dont les abscisses soient  $x$ , & dont les ordonnées  $z$  soient  $= \int X dx$  divisé par une constante convenable, c'est-à-dire par une constante  $m$  qui ait autant de dimensions qu'il y en a dans  $X$ ; en sorte que  $\frac{X dx}{m}$  soit d'une dimension, pour pouvoir être égale à une ligne  $z$ . Ensuite on construira de même une courbe dont les abscisses soient  $y$ , & dont les ordonnées  $u$  soient  $= \int Y dy$ ; prenant ensuite  $u$  dans la dernière courbe  $= z$  dans l'autre, on

aura l' $x$  & l' $y$  correspondantes; & ces  $x$  &  $y$  joints à angles droits, si les coordonnées doivent faire un angle droit, donneront la courbe qu'on cherche.

Voyez dans la dernière section de l'application de l'Algebre à la géométrie de M. Guinéc, & dans l'analyse des infiniment petits de M. de l'Hopital, plusieurs exemples de construction des équations différentielles par des courbes mécaniques. (O)

COURBE DES ARCS, voyez TROCHOÏDE.

COURBE DES SINUS, voyez SINUS.

COURBES, f. f. (Mar.) Ce sont des pieces de bois beaucoup plus fortes & plus grosses que les courbatons, dont elles ont la figure: leur usage est de lier les membres des côtés du vaisseau aux baux, & de gros membres à d'autres. Voyez COURBATONS.

Sur chaque bout des baux on met une courbe ou courbaton, pour le soutenir & lier le vaisseau. Pour former une courbe on prend ordinairement un pié d'arbre, au haut duquel il y a deux branches qui fourchent, & l'on coupe ce pié en deux, y laissant une branche fourchue de chaque côté. Aux grands gabarits & sous toute l'embelle, où le vaisseau a le plus à souffrir, on ne peut mettre les courbes trop fortes; mais comme de si grosses pieces de bois diminuent l'espace pour l'arimage, on fait quelquefois des courbes de fer de trois à quatre pouces de large, & d'un quart de pouce d'épais, qu'on applique sur les côtés des courbes qui sont les plus foibles, & la branche supérieure s'applique aux baux avec des clous & des chevilles de fer. Voy. Marine, Pl. V, fig. 1. n° 121, les courbes de fer du second pont, & Pl. IV, fig. 1. même n° 121. & celles du premier pont, mêmes Planches, n° 70.

A l'égard des courbes ou courbatons qui se posent en-travers dans les angles de l'avant & de l'arrière du vaisseau, on leur laisse toujours toute la grosseur que le bois peut fournir, & l'on tâche d'en avoir d'un pié d'arbre entier où il n'y ait qu'une fourche, & qui n'ait point été scié, parce que celles qui sont sciées sont bien plus foibles; & pour le mieux on tâche que les courbes qui se posent en travers, ayent à l'endroit de bas des terrebauquieres, autant d'épaisseur que le bau auquel elles sont jointes.

Courbes d'arcaste, ce sont des pieces de liaison assemblées dans chacun des angles de la poupe, d'un bout contre la lifse de hourds, & de l'autre contre les membres du vaisseau. Voyez leur figure, Marine, Pl. VI, n° 69.

Courbe de contre-arcaste ou contre-lisse; ce sont des pieces de bois posées en fond de cale, archoutées par en-haut contre l'arcaste, & attachées du bout d'en-bas sur les membres du vaisseau.

Courbe d'étambord, c'est une piece de bois courbe, qui pose sur la quille du vaisseau d'un côté, & de l'autre contre l'étambord. Voyez Marine, Pl. IV, fig. 1. n° 8.

Courbes du premier pont, doivent avoir les deux tiers de l'épaisseur de l'étrave. Voy. leur fig. Marine, Pl. VI, n° 68.

Courbe de la poulaine, c'est une piece de bois située entre la gorgere ou taillomer, l'étrave & l'aiguille de l'éperon. Voyez Pl. IV, fig. 1. cette courbe cotée 194. la gorgere, cotée 193. l'étrave, n° 3. & l'aiguille de l'éperon, 184. (Z)

COURBE, se dit en Charpenterie & Menuiserie, de toute piece de bois ceintrée.

COURBE D'ESCALIER, (Charpent.) c'est celle qui forme le quartier tournant, autrement dit le noyau recrusé. Voyez Pl. I, fig. 2. du Charpentier.

Courbes rallongées, sont celles dont les parties ceintrées ont différens points de centres.

COURBE, (Maréchallerie.) Les Maréchaux appellent ainsi une tumeur dure & calleuse qui vient en longueur au-dedans du jarret du cheval; c'est-à-dire

# Notes

## (1) :

Note domaine

Domaine : Géométrie

par Collectif projet ENCCRE, le 25 juin 2017

## (2) Note ponctuelle sur « géométrie de l'infini »

L'expression « géométrie de l'infini » fait référence au titre d'un ouvrage de Fontenelle paru en 1727 sous le titre *Elémens de la géométrie de l'infini*. Elle peut être comprise ici comme la « géométrie des infiniment petits, contenant les regles du calcul différentiel et intégral » comme D'Alembert la définit lui-même dans l'article [INFINI Géométrie de l'infini, \(Géomet.\)](#) (t. VIII, 1765, p. 703a–b), où il critique la conception de Fontenelle.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

## (3) Note ponctuelle sur « comme polygone ... rigoureuse »

L'avertissement formulé dans ce paragraphe a déjà été donné par D'Alembert dans son *Traité de dynamique* (p. 21-22) vers lequel il renvoie le lecteur en fin de paragraphe. Voir la partie *Enjeux de l'article* du dossier critique.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

## (4) Note ponctuelle sur « égale »

Lire « égal ».

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

## (5) :

Note sur la mention bibliographique « l'hist. de l'acad. 1722 »

Œuvre mentionnée : [Fontenelle], « Sur les courbes considérées exactement comme courbes, ou comme polygones infinis », *Histoire de l'Académie royale des sciences avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, tirés des registres de cette Académie. Partie Histoire, 1722* (1724), p. 74-82 [consulter (<https://books.google.fr/books?id=SQkVAAAAQAAJ&hl=fr&pg=PA74#v=onepage&q&f=false>)]

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

## (6) :

Note sur la mention bibliographique « mon traité de Dynamique, page 20. article 20. & page 30. article 26 »

Œuvre mentionnée : Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique, dans lequel les Loix de l'Equilibre & du Mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une manière nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres, d'une manière quelconque*, 1<sup>ère</sup> éd., 1743 ; 2<sup>e</sup> éd., 1758.

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

## (7) Note ponctuelle sur « par quelques géometres »

Cette définition d'une famille de courbes, présente dans l'article CURVE de la *Cyclopædia*, est directement tirée des *Elementa matheseos universae* de Christian Wolff (t. 1, § 383, p.343 dans l'édition de 1743) :

*Familia curvarum vocatur plurium curvarum diversi generis congeries, quæ omnes per eandem æquationem indeterminati gradus, sed pro diversitate generis diversimode explicandi, definiuntur.*

Wolff illustre cette définition à l'aide du même exemple qui est utilisé par Chambers puis D'Alembert.



D'Alembert, très familier des travaux de Gabriel Cramer, n'a pas repris la courte définition que ce dernier en donne dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (p. 223) où il écrit que « l'usage des géomètres [est] d'appeler de même *famille* les Courbes dont les équations ne diffèrent que par les exposants de  $x$  & de  $y$  » et où il renvoie lui-même à Wolff.

On peut enfin remarquer que Chambers propose également le terme de *tribu* (« All which curves are said to be of the *same family*, or *tribe* ») qui n'est pas retenu ici par D'Alembert.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

## (8) Note ponctuelle sur « exponentielles »

Il y a là une variation dans la traduction faite par D'Alembert : en effet, à cet endroit de l'article CURVE de la *Cyclopædia*, la remarque s'applique aux courbes transcendentes (« transcendental curves ») et non aux courbes exponentielles (dont l'équation contient une puissance dont l'exposant est variable, comme par exemple  $y = a^x$ ) :

The equations whereby the families of curves are defined, are not to be confounded with the transcendental ones: for though, with regard to the whole family, they be of an indeterminate degree, yet, with respect to each several curve of the family, they are determinate ; whereas transcendent equations are of an indefinite degree, with respect to the same curve.

Dans l'article EXPONENTIEL, (*Géomé. transcend.*) (t. VI, 1756, p. 311a–b) , D'Alembert indiquera que « les courbes exponentielles participent de la nature des algébriques & des transcendentes ; des premières, parce qu'il n'entre dans leur équation que des quantités finies ; & des dernières, parce qu'elles ne peuvent pas être représentées par une équation algébrique. » Mais il n'y a bien entendu pas identité entre courbes exponentielles et transcendentes. Ce faisant D'Alembert corrige donc, ou du moins actualise l'article de Chambers. En effet il faut noter ici que dans la première édition de la *Cyclopædia* (1728, t. I p. 369) les deux termes sont considérés comme plus ou moins synonymes :

EXPONENTIAL Equation is that wherein there is an Exponential Quantity ; call'd also Transcendental Equation, and by some, a Geometrical Irrational.

Cette précision a disparu de la cinquième édition de 1741, mais l'équivalence des termes a pu persister dans l'article CURVE, nous invitant donc à lire *exponential* à la place de *transcendental*, comme l'a rétabli D'Alembert.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

## (9) Note ponctuelle sur « équation générale »

D'Alembert modifie ici le texte de l'article CURVE de Chambers, qui écrit incorrectement que « the equation for all algebraic curves will be  $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$  ». Il s'emploie donc à donner l'équation d'une courbe algébrique d'ordre  $m$  sous la forme la plus générale possible, qui n'est pas simple à écrire, au contraire de Cramer ou Euler qui préfèrent donner in extenso les équations générales des courbes d'ordres 2, 3 et 4 en laissant le lecteur généraliser par induction.

Il y a néanmoins ici deux coquilles typographiques à relever : sur la première ligne le dernier terme de degré  $m$  devrait être  $fx^m$ , et sur la troisième ligne le terme  $qy^{m-2}$  devrait être précédé du symbole + (en non pas =).

Même sans ces erreurs, il n'est pas simple pour le lecteur d'imaginer ou d'induire, à partir de la forme donnée de cette équation, l'écriture de l'équation complète d'une courbe de degré  $m$  quelconque. Il faudrait ajouter des points de suspension à la fin des deuxième et troisième ligne, mais aussi sur une quatrième, et écrire le tout dernier terme de l'équation (terme constant) sur une cinquième ligne, par exemple.

S'appuyant sur la *triangle algébrique* (ou *analytique*) de De Gua, Cramer ajoute une précision sur le nombre de termes de l'équation générale d'une courbe d'ordre  $n$  qui, après division par le coefficient d'un des termes de plus haut degré, est égal à  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$  (*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, p. 58), ce qui lui permet ensuite d'énoncer qu'une courbe d'ordre  $n$  est définie par la donnée de  $\frac{n(n+3)}{2}$  points, les coefficients de l'équation pouvant, dans les cas favorables, être calculés par la résolution



simultanée de  $\frac{n(n+3)}{2}$  équations à autant d'inconnues à l'aide de la méthode présentée en annexe de son traité, présentant des formules de résolution aujourd'hui connues comme les *règles de Cramer*. Cela lui permet également, en confrontant ce résultat simple avec celui qui dit que le nombre de points d'intersection de deux courbes d'ordres  $m$  et  $n$  est égal au produit  $m \times n$ , d'engager une réflexion intéressante sur un paradoxe apparent aujourd'hui connu comme *paradoxe de Cramer* : par exemple, deux courbes d'ordre 3 sont censées pouvoir se couper en  $3 \times 3 = 9$  points, alors que la donnée de  $\frac{3(3+3)}{2} = 9$  points devraient pouvoir définir une seule courbe d'ordre 3. Euler donnera une explication de ce paradoxe dans un mémoire intitulé « Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes » publié dans l'*Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin* pour 1748 [consulter ([https://books.google.fr/books?id=kg0\\_AAAAYAAJ&hl=fr&pg=PA219#v=onepage&q=contradiction&f=false](https://books.google.fr/books?id=kg0_AAAAYAAJ&hl=fr&pg=PA219#v=onepage&q=contradiction&f=false))].

Il est remarquable de noter ici que D'Alembert choisit de ne pas aborder les aspects les plus algébriques de l'œuvre de Cramer dans cet article, pas plus que dans le reste de l'*Encyclopédie* d'ailleurs, alors que ces résultats non dénués d'intérêt donneront lieu à des développements ultérieurs fructueux.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

### (10) :

Notes sur la mention bibliographique « analyse démontrée »

Œuvre mentionnée : Charles Reyneau, *Analyse démontrée, ou la Methode de resoudre les problèmes des mathematiques, et d'apprendre facilement ces sciences*, 1<sup>ère</sup> éd., 1708 ; 2<sup>e</sup> éd., 1736-1738.

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

L'*Analyse démontrée* de Reyneau a joué un rôle important dans la formation mathématique du jeune D'Alembert, qui a justement consacré son tout premier mémoire à l'Académie des sciences de Paris, en 1739, à la correction d'erreurs contenues dans le second tome de cet ouvrage (Gilain, 2002). Dans l'article ANALYSE, (*Ordre encyclop. Entend. Raison. Philosoph. ou Science, Science de la Nature, Mathématiques pures, Arithmétique littérale, ou Algèbre, Analyse.*) (t. I, 1751, p. 400b–401a) , il écrit à son propos:

L'Analyse démontrée du P. Reyneau de l'Oratoire, imprimée pour la première fois à Paris en 1708, en 2 volumes in-4°. est un livre auquel ceux qui veulent étudier cette science ne peuvent se dispenser d'avoir recours. Quoiqu'il s'y soit glissé quelques erreurs, c'est cependant jusqu'à présent l'ouvrage le plus complet que nous ayons sur l'Analyse.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

### (11) Note ponctuelle sur « cette équation ... insuffisante »

On a vu dans une note précédente que Chambers, dans l'article CURVE de la *Cyclopædia*, proposait lui aussi une équation erronée contenant seulement quatre termes.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

### (12) Note ponctuelle sur « meilleurs ouvrages »

Soulignons ici, bien que cela soit explicitement écrit par D'Alembert dans ce paragraphe, que la bibliographie qui suit ne porte pas uniquement sur l'entrée COURBE POLYGONE, mais sur toute la vedette d'adresse COURBE.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

### (13) :

Note sur la mention bibliographique « enumeratio linearum tertii ordinis de M. Newton »

Œuvre mentionnée : Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1<sup>ère</sup> éd., 1704.

par Collectif projet ENCCRE, le 12 août 2019

### (14) Note ponctuelle sur « d'où une ... est tirée »

En effet, l'article COURBE, (*Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes.*) (t. IV, 1754, p. 377b–387a) – plus particulièrement les sections sur l'énumération des courbes du second genre, la description organique des courbes, la genèse des courbes par les ombres et l'usage des courbes pour la construction des équations – sont des traductions de parties de l'article CURVE de la *Cyclopaedia* de Chambers, qui a lui-même puisé et traduit ces passages de l'*Enumeratio* de Newton.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

**(15) :**

Note sur la mention bibliographique « l'ouvrage de M. Stirling »

Œuvre mentionnée : James Stirling, *Lineae tertii ordinis Neutoniana, sive, Illustratio tractatus D. Neutoni De enumeratione linearum tertii ordinis: cui subjungitur, solutio trium problematum*, 1<sup>ère</sup> éd., 1717.

par Collectif projet ENCCRE, le 10 août 2018

**(16) :**

Notes sur la mention bibliographique « Geometria organica de M. Maclaurin »

Œuvre mentionnée : Colin Maclaurin, *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis*, 1<sup>ère</sup> éd., 1720.

par Collectif projet ENCCRE, le 10 août 2018

Dans l'article DESCRIPTION, *terme de Géométrie* (t. IV, 1754, p. 878b), D'Alembert porte un regard nuancé sur l'ouvrage de l'Écossais :

M. Maclaurin nous a même donné un savant ouvrage intitulé, *Geometria organica*, dans lequel il donne des moyens fort ingénieux de tracer ainsi plusieurs courbes. Voyez-en un léger essai à l'article COURBE. Mais toutes ces méthodes sont plus curieuses qu'utiles & commodes.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

**(17) :**

Note sur la mention bibliographique « les usages de l'analyse de Descartes par M. l'abbé de Gua »

Œuvre mentionnée : Jean-Paul de Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differential, les Propriétés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*, 1<sup>ère</sup> éd., 1740.

par Collectif projet ENCCRE, le 10 août 2018

**(18) Note ponctuelle sur « mais qu'il ... précaution »**

Quand il en avait fait la recension pour le *Journal des sçavans* en 1740, à sa parution, D'Alembert avait déjà émis quelques réserves sur quelques points de détail sur l'ouvrage de l'abbé De Gua de Malves, pointant quelques erreurs de forme et demandant des éclaircissements sur certains passages (Jean Le Rond D'Alembert, 1740).

Mais il est apparu, quelques années après, que les *Usages de l'analyse de Descartes* de l'abbé De Gua étaient entachés d'erreurs plus profondes dues à un mauvais usage du calcul des séries, notamment pour l'étude des branches infinies et des points singuliers, l'ayant amené à nier formellement l'existence d'une sorte de points singuliers : les points de rebroussement de la seconde espèce, annoncés par L'Hôpital et Maupertuis. La réalité de ces points pour les courbes algébriques a d'abord été établie par Leonhard Euler (voir sa correspondance avec Gabriel Cramer en 1744), et ensuite - de manière indépendante - par D'Alembert dans ses *Recherches sur le calcul intégral* (Jean Le Rond D'Alembert, 1748) en 1746. Voir à ce sujet l'introduction de la *Correspondance générale 1741-1752* (Le Rond D'Alembert, 2015, p. lxxxix-xc).

De son côté, Gabriel Cramer écrit en préface de son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* : « je n'ai pas cru devoir le [De Gua de Malves] suivre dans la méprise où il est tombé sur les Branches infinies des Courbes & sur leurs Points multiples, pour avoir négligé l'usage des Séries infinies, ou

pour avoir voulu juger d'une Série entière par son seul premier terme » (p.xi).

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

**(19) :**

Note sur la mention bibliographique « l'introduction / à l'analyse des lignes courbes, par M. Cramer »

Œuvre mentionnée : Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1<sup>ère</sup> éd., 1750.

par Collectif projet ENCCRE, le 10 août 2018

**(20) Note ponctuelle sur « ouvrage ... nouvelles »**

Dans les lettres échangées avec Gabriel Cramer à la suite de la parution de son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* à Genève en 1750, D'Alembert, après lui avoir demandé de nombreux éclaircissements et discuté quelques questions épineuses, avait dit à son correspondant genevois tout le bien qu'il pensait de son ouvrage. Il écrit ainsi, le 5 janvier 1751 :

A l'égard de votre ouvrage sur les courbes je persiste toujours dans l'idée que j'en ay, et je viens d'ajouter à l'article courbe de l'Encyclopedie le jugement que j'en porte ( *Le Rond D'Alembert*, 2015, p. 313).

Cette appréciation élogieuse fait que l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* est citée comme référence dans une dizaine d'articles liés aux courbes algébriques : ASYMPTOTE, (*terme de Géométrie* (t. I, 1751, p. 795a–796b) , AXE, (*Mécanique.*) (t. I, 1751, p. 904a–906a) , BRANCHE de courbe, (*terme de Géométrie*) (t. II, 1752, p. 395a–b) , CENTRE, (*Géométrie.*) (t. II, 1752, p. 824a) , COURBURE, (*Géom.*) (t. IV, 1754, p. 390a–b) , MAXIMUM ou *plus grand*, en *Mathématiques*, (*Géog.*) (t. X, 1765, p. 215b–217a) , PARALLÉLOGRAMME, en *Géométrie* (t. XI, 1765, p. 911a–912b) , POINT DOUBLE, TRIPLE, QUADRUPLE, &c. ou en général *point multiple* (t. XII, 1765, p. 871b–872a) , REBROUSSEMENT, (*Géométrie.*) (t. XIII, 1765, p. 842a–b) , SERPENTEMENT, (*Géom.*) (t. XV, 1765, p. 112a–b) et TRIDENT, (*Géom.*) (t. XVI, 1765, p. 637b) .

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

**(21) :**

Notes sur la mention bibliographique « l'ouvrage de M. Euler, qui a pour titre, *introductio in analys. infinitorum*, Lausan. 1748 »

Œuvre mentionnée : Leonhard Euler, *Introductio in analysi infinitorum*, 1<sup>ère</sup> éd., 1748.

par Collectif projet ENCCRE, le 10 août 2018

L'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Cramer et l'*Introductio in analysi infinitorum* d'Euler resteront les deux ouvrages de référence sur les courbes pendant toute la seconde partie du XVIII<sup>e</sup> siècle et une bonne partie du XIX<sup>e</sup>. Le regard assez critique de D'Alembert sur ce texte d'Euler s'exprime dans sa correspondance avec le savant bâlois dès réception et lecture de son ouvrage, où il exprime des désaccords sur la démonstration de la factorisation des polynômes et sur les points de rebroussement des courbes algébriques ; voir la lettre de D'Alembert à Euler datée du 7 septembre 1748 ( *Le Rond D'Alembert*, 2015, p. 161-170). Il s'en ouvre à Gabriel Cramer dans une lettre, datée du 5 décembre 1748 , où l'on sent bien toute la réserve qu'il porte sur cet ouvrage, notamment sur la question des points de rebroussement (« un brouillamini épouvantable »), qui aboutira à une revendication de priorité de D'Alembert.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021



**(22) :**

Note sur la mention bibliographique « l'application de l'Algebre à la Géométrie, de M. Guisnée »

Euvre mentionnée : Nicolas Guisnée, *Application de l'algebre a la geometrie, ou Methode de démontrer, par l'algebre, les theorèmes de geometrie, & d'en résoudre & construire tous les problêmes*, 1<sup>ère</sup> éd., 1705.

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

**(23) Note ponctuelle sur « équation »**

Il y a dans l'écriture de cette équation une coquille typographique : le dernier terme de cette somme devrait être  $Dx^3$  (et non  $Dx^2$  comme écrit ici).

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

**(24) Note ponctuelle sur « passera ... donnés »**

Cette méthode d'approximation, que l'on appelle aussi *interpolation*, est reprise (avec quatre points seulement) par D'Alembert à la fin de l'article *SERIE ou SUITE*, en *Algebre* (t. XV, 1765, p. 93b–96a) dans la section *Interpolation des séries ou suites*.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

**(25) Note ponctuelle sur « l'un avec l'autre »**

Lire « l'une avec l'autre ».

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

**(26) Note ponctuelle sur « il ne faut ... article »**

Ce paragraphe est le prolongement d'une remarque faite au début de l'article *COURBE*, (*Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes.*) (t. IV, 1754, p. 377b–387a), dans lequel D'Alembert écrivait : « Il ne s'agit point ici, comme on peut bien le croire, des lignes courbes que l'on peut tracer au hasard & irrégulièrement sur un papier. Ces lignes n'ayant d'autre loi que la main qui les forme, ne peuvent être l'objet de la Géométrie ; elles peuvent l'être seulement de l'art d'écrire. Un géometre moderne a pourtant crû que l'on pouvoit toujours déterminer la nature d'une courbe tracée sur le papier ; mais il s'est trompé en cela ». Ce « géometre moderne » est probablement Leonhard Euler, comme nous l'avons déjà écrit dans la note associée à ce passage. D'Alembert ajoutait alors à son affirmation sur l'erreur d'Euler : Nous en donnerons plus bas la preuve. On peut penser qu'il renvoyait au présent passage de l'article *Courbe polygone*. Cependant, il faut noter que ce qu'il présente ici ne constitue pas la preuve promise et que D'Alembert se contente d'une phrase caricaturant la position d'Euler.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

**(27) Note ponctuelle sur « équarrer »**

Le verbe « équarrer » est très peu usité en mathématiques, et son usage par D'Alembert ici est surprenant. Dans le *Dictionnaire de Trévoux*, tome deuxième de l'édition de 1743, on trouve l'entrée *ÉQUARRIR* : « Plusieurs disent aussi *ÉQUARRER*, v. actif. Tailler un corps solide à angles droits. *Quadrare, efformare in quadrum. Équarrir* une pierre, une poutre ». On s'attend plutôt à trouver ici le verbe « quarrer », qui signifie réaliser la quadrature, c'est-à-dire, comme écrit dans l'article *QUADRATURE*, *terme de Géométrie* (t. XIII, 1765, p. 639a–b).

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

**(28) Note ponctuelle sur « approximation »**

L'interpolation n'est pas la seule méthode permettant de calculer de manière approchée la quadrature d'une courbe. Une autre stratégie consiste à calculer un développement en série (ou *suite infinie*) convergente, qui permet d'approcher la courbe initiale, chaque terme de la série étant ensuite facilement intégrable.

D'Alembert écrit ainsi, dans l'article *SERIE ou SUITE, en Algèbre* (t. XV, 1765, p. 93b–96a) :

On fait usage des suites principalement pour la quadrature des courbes, parce que cette quadrature dépend souvent de l'expression de certaines quantités qui ne peuvent être représentées par aucun nombre précis & déterminé ; tel est le rapport du diamètre d'un cercle à sa circonférence, & c'est un très-grand avantage de pouvoir exprimer ces quantités par une suite, laquelle, étant continuée à l'infini, exprime la valeur de la quantité requise.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

### (29) :

#### Note sur le renvoi à « Methode differentielle »

Cette « méthode différentielle » dont il est question ici, qui permet de réaliser une interpolation dite newtonienne, est aujourd'hui plus connue sous la désignation de *méthode des différences divisées*, qui est effectivement décrite par Newton dans son *Methodus differentialis*, le dernier texte d'un recueil édité par William Jones en 1711 sous le titre *Analysis Per Quantitatum*.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

### (30) :

#### Note sur la mention bibliographique « traité de ces courbes à double courbure »

Œuvre mentionnée : Alexis Claude Clairaut, *Recherches sur les courbes à double courbure*, 1<sup>ère</sup> éd., 1731.

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

### (31) Note ponctuelle sur « double courbure »

Clairaut, dans la préface de *Recherches sur les courbes à double courbure*, explique qu'il a choisi de nommer ainsi les courbes tracées sur des solides dans l'espace, « parcequ'en les considerant de la façon qu'on vient de dire elles participent pour ainsi dire toujours de la courbure de deux courbes [les courbes de projection] ». Comme le rappelle Clairaut quelques lignes plus haut dans cette préface, Descartes avait déjà évoqué ce type de courbes près d'un siècle plus tôt à la toute fin du livre second de *La Géométrie* (p. 368-369). Mais l'expression « courbe à double courbure » elle-même apparaît pour la première fois sous la plume de Henri Pitot dans un mémoire intitulé « Quadrature de la moitié d'une courbe des arcs, appelée la compagne de la cycloïde » publié dans mes Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris pour l'année 1724, p. 107-113 [consulter (<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3525w/f225.item>)].

Aujourd'hui, on utilise plutôt l'expression « courbes gauches » pour désigner ces courbes non planes. Sur l'histoire des courbes gauches, voir (Delcourt, 2011).

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

### (32) Note ponctuelle sur « variable commune »

Remarquons que Clairaut précise qu'il n'est pas question de pouvoir réduire ces deux équations à une seule équation à trois inconnues, qui décrit une surface.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

### (33) Note ponctuelle sur « regles connues »

Ces « regles connues » sont celles de ce que l'on appelle aujourd'hui la théorie de l'élimination, mais que l'on désignait alors par l'expression *évanouissement des inconnues* ; voir les articles *ELIMINER, (Algèbre.)* (t. V, 1755, p. 508b) et, surtout, *EVANOUIR, (Algèbre.)* (t. VI, 1756, p. 119a–121a).

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

### (34) Note ponctuelle sur « surface »

Il existe un article *SURFACE, en Géométrie* (t. XV, 1765, p. 688b–689a), très court et très général, rédigé par La Chapelle, mais qui ne rentre pas dans le détail de ce qui est exposé ici par D'Alembert.

### (35) Note ponctuelle sur « M. Descartes ... variables »

Cette affirmation de D'Alembert, si elle n'est pas tout à fait fausse, paraît exagérément affirmative. Dans le livre second de *La Géométrie* de Descartes, on trouve en effet ces quelques lignes, sans plus de détails (p. 335) :

Et s'il manque deux conditions a la determination de ce point, le lieu ou il se trouve est une superficie, laquelle peut estre tout de mesme ou plate, ou spherique, ou plus composée.

Boyer, dans son *History of analytic geometry*, indique que la première occurrence de l'équation analytique d'une surface avec trois variables se trouvera quelque quarante ans après, en 1679, sous la plume de Lahire (Boyer, 2004, p. 121).

### (36) Note ponctuelle sur « condition ... Fontaine »

La condition évoquée par D'Alembert est la suivante :

$$\frac{d\beta}{dx} + \alpha \frac{d\beta}{dz} = \frac{d\alpha}{dy} + \beta \frac{d\alpha}{dz}.$$

Ce résultat n'a été publié qu'en 1764, dans les *Mémoires donnés à l'Académie royale des sciences, non imprimés dans leur temps par M. Fontaine, de cette Académie*, dans un mémoire intitulé « Le calcul des Équations aux premières différences » [problème III, p. 36] (<https://books.google.fr/books?id=EfxkAAAAcAAJ&hl=fr&pg=PA36#v=onepage&q&f=false>). Mais il est connu de Clairaut dès 1740, qui le donne sous une forme améliorée dans un mémoire intitulé « Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre » publié dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences pour l'année 1740* (1742, p. 310) [consulter] (<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5510983v/f454.item>), indiquant en note de bas de page que « M. Fontaine avoit déjà donné cette Équation ».

Sur la volonté de D'Alembert d'attribuer ce théorème à Fontaine en effaçant le rôle de Clairaut, voir sa lettre à Maupertuis du 16 novembre 1750 (*Le Rond D'Alembert*, 2015, p. 302-303).

### (37) :

Note sur la mention bibliographique « mémoires de l'académie de Petersbourg, tome III. »

Œuvre mentionnée : Leonhard Euler, « De linea brevissima in superficie quacunqve duo quælibet punta jungente », *Commentarii Academiæ scientiarum imperialis Petropolitanae*, 1728 (1732) , p. 110-124 [consulter (<https://www.biodiversitylibrary.org/item/38524#page/128/mode/2up>)]

### (38) Note ponctuelle sur « la ligne ... courte »

Aujourd'hui, on donne le nom de *géodésique* à cette « ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur une surface courbe entre deux points donnés », mais cette acception de l'adjectif substantivé est récente et l'article GÉODÉSIQUE, (*Géométrie prat.*) (t. VII, 1757, p. 608a) montre que le terme n'est pas encore utilisé dans ce sens au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle.

### (39) :

Note sur la mention bibliographique « œuvres de Bernoulli, tome IV. page 108 »

Œuvre mentionnée : Jean Bernoulli, *In superficie quacunqve curva ducere lineam inter duo puncta brevissimam*, 1<sup>ère</sup> éd., 1742.



**(40)** Note ponctuelle sur « Voyez les ... & 1733 »

Voir notamment le mémoire de Clairaut intitulé « Détermination géométrique de la perpendiculaire à la Méridienne tracée par M. Cassini » dans les *Mémoires de l'académie* pour l'année 1733 (Alexis-Claude Clairaut, 1735), dont une suite est donnée en 1739 [consulter (<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3536g/f183>)].

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

**(41)** Note ponctuelle sur « par exemple »

Cette équation qui permet de calculer la longueur d'un arc de cercle intervient, par exemple, dans le calcul de la quadrature de l'espace cycloïdal, c'est-à-dire dans le calcul de l'aire située entre une arche de cycloïde et l'axe des abscisses ; voir l'article [CYCLOIDAL](#), (*Géomet.*) (t. IV, 1754, p. 590a) .

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

**(42) :**

Note sur la mention bibliographique « l'application de l'Algebre à la géométrie de M. Guisnée »

Œuvre mentionnée : Nicolas Guisnée, *Application de l'algebre a la geometrie, ou Methode de démontrer, par l'algebre, les theorèmes de geometrie, & d'en résoudre & construire tous les problèmes*, 1<sup>ère</sup> éd., 1705.

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

**(43) :**

Note sur la mention bibliographique « l'analyse des infiniment petits de M. de l'Hopital »

Œuvre mentionnée : Guillaume François Antoine marquis de L'Hôpital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, 1<sup>ère</sup> éd., 1696.

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

**(44)** Note ponctuelle sur « construction ... différentielles »

On retrouve ce sujet exposé de manière très proche dans le second volume du *Traité du calcul intégral* de Bougainville, notamment dans le troisième chapitre de la première section, intitulé « De la construction des équations différentielles dans lesquelles les indéterminées sont séparées » (p. 38-40), ouvrage dans lequel la contribution de D'Alembert est particulièrement importante, et dont il recommande la lecture dans les articles [EQUATION DIFFÉRENTIELLE](#) (t. IV, 1754, p. 988a–989b) et [CALCUL DIFFÉRENTIEL](#) (t. IV, 1754, p. 985a–988a) contenus dans le même volume, ainsi que dans l'article [INTÉGRAL](#), (*Math. trans.*) (t. VIII, 1765, p. 805a–b) du volume VIII. Voir le dossier critique pour davantage d'informations sur ce sujet.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

**(45) :**

Note sur la signature « (O) »

La marque (O) est celle de D'Alembert. Cette correspondance est explicitée dans :

- Avertissement – (vol. I) [🔗](#)
- Noms des auteurs, avec la marque de leurs articles – (vol. II) [🔗](#)
- Marque des Auteurs – (vol. III) [🔗](#)
- Nom des Auteurs – (vol. VI) [🔗](#)
- Marque des Auteurs – (vol. VII) [🔗](#)

par Collectif projet ENCCRE, le 16 mai 2016



# Dossier critique

avec la collaboration de Christian Gilain

D'Alembert, qui signe cet article, choisit de couper la traduction de l'article CURVE de la *Cyclopædia* de Chambers entamée dans l'article COURBE, (*Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes.*) (t. IV, 1754, p. 377b–387a) qui le précède immédiatement pour introduire, au moyen d'une vedette d'entrée, la notion de courbe polygone (sur deux paragraphes seulement), avant de reprendre le cours de sa traduction, puis de proposer quelques prolongements originaux sur les interpolations, les courbes à double courbure et les surfaces courbes.

Ce choix est étonnant, puisqu'il marque une rupture nette dans le déroulé de l'article COURBE, alors qu'il aurait sans doute été possible d'y introduire les courbes polygones au moyen d'une simple section, avant de poursuivre la traduction de l'article de Chambers. Témoin de cette rupture, par exemple, la bibliographie présentée dans la paragraphe 14, qui est proposée par D'Alembert et ne se trouve pas dans la *Cyclopædia*, vient manifestement lister des références en appui des développements de l'article COURBE et concerne effectivement les courbes dans leur ensemble, pas uniquement les courbes polygones ni même les courbes mécaniques. Ce choix éditorial sera questionné dans ce dossier critique, mais les deux articles peuvent et doivent être lus ensemble, afin de percevoir leur continuité et leur cohérence globale.

## Auteur et rédaction

Cet article est signé par D'Alembert, ce qui permet également de l'identifier formellement comme auteur de l'article COURBE qui le précède immédiatement, en vertu du nota bene de l'*Avertissement* du premier volume :

Lorsque plusieurs articles appartenant à la même matière, & par conséquent faits ou revûs par la même personne, sont immédiatement consécutifs, on s'est contenté quelquefois de mettre la lettre distinctive à la fin du dernier de ces articles.

Il y a donc tout lieu de penser que la rédaction de cette entrée COURBE POLYGONE date elle aussi de la fin de l'année 1750 au plus tard (voir dossier critique de l'article COURBE).

## Plan de l'article

L'article commence par deux paragraphes originaux, les seuls concernant directement la notion de courbe polygone, qui renvoie à une conception leibnizienne des courbes. Dans les paragraphes 3 à 13, D'Alembert reprend et poursuit la traduction de l'article Curve de la *Cyclopædia* de Chambers entamée dans l'article COURBE, avant de donner au lecteur la liste des « meilleurs ouvrages dans lesquels on puisse s'instruire de la théorie des courbes » (§ 14). Enfin, après quelques considérations sur les courbes mécaniques et l'interpolation d'une courbe irrégulière ou mécanique par une courbe parabolique (§ 15-18), l'article se poursuit en proposant quelques développements nouveaux sur les courbes à double courbure (§ 19-21) et les surfaces courbes (§ 22-23), avant de se conclure sur une section concernant la construction des équations différentielles par le moyen des quadratures de courbes. Plus précisément, voici le plan de l'article suivant les numéros de paragraphes :

- 1-2 : courbe **polygone**, usages en mécanique ;
- 3 : **rectification** d'une courbe ;
- 4 : **inflexion** d'une courbe (simple renvoi) ;
- 5 : **quadrature** d'une courbe ;
- 6-11 : **famille** de courbes, courbes exponentielles, **équation générale** d'une courbe algébrique ;
- 12-13 : courbes **caustiques** et **diacaustiques** (simples renvois) ;
- 14 : ouvrages recommandés pour l'étude de la théorie des courbes ;



- 15-16 : **courbes mécaniques** particulières, principes généraux ;
- 17-18 : approximation d'une courbe quelconque par **interpolation** par une courbe parabolique ;
- 19-21 : courbes à **double courbure**, projections, tangentes ;
- 22-23 : **surfaces courbes** géométriques et mécaniques, équations, ligne la plus courte tracée sur une surface entre deux points donnés ;
- 24-27 : **construction des équations différentielles** par les quadratures.

## Sources et références bibliographiques

Voici la représentation illustrant la répartition entre contenus issus de la traduction de la *Cyclopædia* et contenus originaux produits par D'Alembert, complétant ainsi celle donnée dans le dossier critique de l'article COURBE, (*Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes.*) (t. IV, 1754, p. 377b–387a) :

1	7	13	19	25
2	8	14	20	26
3	9	15	21	27
4	10	16	22	
5	11	17	23	
6	12	18	24	

Ajouts (en vert) et modifications (en jaune) apportés par D'Alembert à l'article de Chambers

L'avertissement initial sur l'usage en mécanique des courbes polygones pour le calcul des forces centrales (§ 2) provient de son propre *Traité de dynamique*. Dans le paragraphe 14 sont indiqués les ouvrages récents à consulter sur la théorie des courbes en général, et celle des courbes algébriques en particulier, notamment les *Usages de l'analyse de Descartes* de l'abbé De Gua, sur lequel il émet des réserves, l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler et l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Cramer, tous trois parus dans la décennie précédant la rédaction de cet article, et qu'il mobilise régulièrement comme sources de ses articles encyclopédiques sur les courbes (on se reportera au dossier critique de l'article COURBE pour plus d'informations sur ces trois ouvrages). On peut remarquer que, bien qu'abondamment cités dans l'article COURBE, aucun de ces ouvrages n'est mentionné dans le reste de l'article COURBE POLYGONE, et qu'il choisit même d'ignorer ici des développements algébriques intéressants proposés par Gabriel Cramer ou Leonhard Euler dans leurs travaux, qui auraient pu y trouver place, ne fût-ce qu'au travers de quelques mentions (voir notes).

L'*Application de l'algebre a la geometrie* de Nicolas Guisnée est citée à deux reprises sur le sujet des courbes mécaniques. Cet ouvrage dont la première édition est parue en 1705 est bien connu de D'Alembert, puisqu'il fait partie des livres dans lesquels il s'est formé aux mathématiques. Il a même rédigé en 1736 un manuscrit intitulé « Remarques & éclaircissemens sur différens endroits de l'application de l'algebre à la géométrie de M. de Guisnée » qui témoigne d'une lecture approfondie de l'ouvrage par le jeune étudiant tout juste sorti du collège Mazarin (Peiffer, 2005, p. 128-129). La section XII de cet ouvrage est intitulée « Des Courbes mécaniques, ou transcendentes, de leur description, & des Problèmes qu'on peut construire par leur moyen » qui, se faisant l'écho de l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hôpital, traite des courbes mécaniques et de leur construction au moyen de la quadrature des courbes, qui est le sujet de la dernière section de l'article.

Enfin, pour la rédaction des paragraphes 19 à 23 relatifs aux courbes à double courbure et aux surfaces courbes, D'Alembert s'appuie sur Clairaut et ses *Recherches sur les courbes a double courbure*, paru en 1731, quelque vingt ans avant la rédaction de cet article. C'est le premier ouvrage publié par Clairaut, écrit à l'âge remarquablement précoce de 16 ans (il est examiné pour l'Académie royale des sciences de Paris par Dortous de Mairan et François Nicole lors de l'été 1729, mais Clairaut a déjà présenté ses travaux à l'Académie l'année précédente). Mentionné dans le *Livre de dépense et recette* des libraires, il a probablement contribué à la traduction des articles de la *Cyclopædia* au tout début du projet encyclopédique, sous la direction de De Gua de Malves. Il est intéressant de noter ici que les relations entre D'Alembert et Clairaut sont réputées pour le moins difficiles après 1750 - donc au moment de la rédaction de cet article - leur dégradation survenant après les polémiques et disputes ayant marqué la fin des années 1740 à propos de la théorie du mouvement de la Lune (voir *Correspondance 1741-1752*, p. cxxxii). L'ouvrage de Clairaut restera longtemps l'unique référence sur le sujet des courbes à double courbure, qui ne connaîtra pas

d'évolution notable avant les années 1770 (voir plus bas).

## Enjeux de l'article

Cette entrée COURBE POLYGONE n'est pas présente dans la *Cyclopædia* de Chambers : elle vient s'insérer dans le cours de la traduction de l'article CURVE, entre une section sur l'usage des courbes algébriques pour la construction des équations, et une série de paragraphes ou de renvois concernant l'utilisation du calcul différentiel pour l'étude des courbes (rectification, inflexion, quadrature, etc.). D'Alembert marque ainsi une rupture dans cette traduction, qui peut être jugée surprenante pour la cohérence de l'ensemble, mais qui lui permet d'actualiser et d'enrichir les contenus de l'article CURVE de la *Cyclopædia* en y insérant des passages originaux liés aux usages des courbes et des surfaces dans ses recherches physico-mathématiques (comme, par exemple, la dynamique).

### Des courbes vues comme polygones infinitangles

La notion de courbe polygone trouve son origine dans le calcul différentiel leibnizien dès la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, et est popularisée en France par Guillaume de L'Hôpital dans son *Analyse des infiniment petits*, cette vision de la courbe comme polygone infinitangle permettant, en particulier, d'en déterminer facilement la courbure ou les tangentes, comme exposé dès la seconde page de la préface de son ouvrage (que l'on attribue généralement à Fontenelle) :

Car les courbes n'étant que des polygones d'une infinité de côtés, & ne différant entr'elles que par la différence des angles que ces côtés infiniment petits font entr'eux ; il n'appartient qu'à l'Analyse des infiniment petits de déterminer la position de ces côtés pour avoir la courbure qu'ils forment, c'est-à-dire les tangentes de ces courbes, leurs perpendiculaires, leurs points d'inflexion ou de rebroussement, les rayons qui s'y réfléchissent, ceux qui s'y rompent, &c.

Dans l'*Application de l'algebre a la geometrie* de Guisnée, cité dans cet article, il est précisé : « Il y a même des Courbes mécaniques dont on ne connoît que certaines proprietéz, d'où l'on ne peut tirer d'équations en termes finis. Il faut alors avoir recours à l'infini, en regardant les Courbes comme des Polygones d'une infinité de côtez » (p. 234). Dans les *Recherches sur les courbes a double courbure* de Clairaut, la section 2 relative à l'usage du calcul différentiel pour le calcul des tangentes débute par ce rappel : « On conçoit ici une courbe à double courbure AN, comme composée d'une infinité de petits côtez Nn, de même qu'une courbe qui seroit décrite sur un plan » (p. 40).

D'Alembert introduit donc cette entrée pour présenter cette notion bien implantée dans les travaux des géomètres français du début du XVIII<sup>e</sup> siècle, fortement liée au calcul des infiniment petits, et utile à l'étude des courbes mécaniques. D'Alembert ne s'inscrit pas dans cette tradition des infiniment petits, mais plutôt dans la tradition newtonienne en ce qui concerne le calcul différentiel et intégral. Pour preuve, il ne reprend pas la deuxième « demande ou supposition » de L'Hôpital dans son *Analyse des infiniment petits* selon laquelle une ligne courbe peut être considérée « comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit » (p. 3). Au contraire, pour être rigoureux, D'Alembert donne de cette notion, dans les deux premiers paragraphes de cet article, une interprétation en termes de limite de polygones finis, en insistant sur la différence entre courbe rigoureuse et courbe polygone. Il renouvelle ainsi l'avertissement déjà adressé au lecteur de son *Traité de dynamique*, qu'il réitère dans les articles CALCUL DIFFÉRENTIEL (t. IV, 1754, p. 985a–988a), CENTRAL, (*Mécanique.*) (t. II, 1752, p. 822a–824a), FORCES ACCÉLÉRATRICES (t. VII, 1757, p. 116b–118b) et FORCES CENTRALES & CENTRIFUGES (t. VII, 1757, p. 118b–120a) . Il s'agit de faire attention à la différence entre la courbe elle-même, décrivant la trajectoire d'un mobile, et son approximation polygonale, dans les calculs d'évaluation des forces centrales :

Il faut, au reste, bien prendre garde à cette distinction des Courbes polygones et des Courbes rigoureuses, dans l'estimation des effets des forces accélératrices & dans la comparaison de ces effets entr'eux. Si un des effets est calculé dans l'hypothèse de la Courbe rigoureuse, il faut calculer l'autre dans la même hypothèse ; autrement on courroit risque de faire le rapport des forces, c'est-à-dire de leurs effets, double de ce qu'il est réellement. Voyez l'*Hist. de l'Acad. de 1722.* (*Traité de dynamique*, p. 21-22)

Cette « attention nécessaire » avait manqué à Varignon qui a commis cette erreur dans un mémoire écrit en 1701 mais publié bien plus tard (Pierre Varignon, 1704), dans un calcul d'estimation des forces utilisant en même temps deux approximations de courbes, la première étant une ligne polygonale, la seconde un

cercle osculateur, erreur qu'il corrigera quelques années plus tard. Le texte de *l'Histoire de l'Académie royale des sciences de Paris* pour 1722, cité en fin de paragraphe aux côtés du *Traité de dynamique* de D'Alembert, intitulé « Sur les courbes considérées exactement comme courbes, ou comme polygones infinis » ([Fontenelle], 1724), contient le résumé d'un mémoire de Varignon dans lequel ce dernier répond à une polémique engagée par le mathématicien italien Guido Grandi à ce sujet, prétexte à rappeler la prudence à adopter dans les calculs lorsque l'on considère tantôt la courbe polygone, tantôt la courbe rigoureuse ; sur les positions de Varignon et de D'Alembert sur le sujet, voir (Schmit, 2011).

## Les courbes mécaniques et la construction des équations différentielles

Cette entrée COURBE POLYGONE permet donc à D'Alembert d'en corriger et préciser la définition (comme limite de polygones finis), et de mettre en garde contre des interprétations ou applications fautives en mécanique. Il est possible de penser qu'elle lui permet aussi d'introduire plus naturellement des paragraphes ou des renvois vers des articles de *l'Encyclopédie* concernant les courbes mécaniques et l'usage nécessaire du calcul différentiel et intégral pour leur étude : LIMITE, (*Mathémat.*) (t. IX, 1765, p. 542a–b) , DIFFÉRENTIEL, *Géométrie* (t. IV, 1754, p. 985a), RECTIFICATION, *terme de Géométrie* (t. XIII, 1765, p. 867a–b) , INFLEXION, *en Optique* (t. VIII, 1765, p. 728a–b) , QUADRATURE, *terme de Géométrie* (t. XIII, 1765, p. 639a–b) , CAUSTIQUE, *dans la Géométrie transcendante* (t. II, 1752, p. 792a–b), CYCLOÏDE, *en Géométrie* (t. IV, 1754, p. 590a–592a) , LOGARITHMIQUE, (*Géométrie.*) (t. IX, 1765, p. 633a–634a) , MÉCANIQUE, (*Mathém.*) (t. X, 1765, p. 224a–126 [226]b) , etc.

La dernière section, intitulée *Des courbes mécaniques, & de leur usage pour la construction des équations différentielles*, vient clore cette entrée COURBE POLYGONE de manière symétrique à la fin de l'article COURBE qui, traitant essentiellement des courbes algébriques, se concluait par une section *Usage des courbes pour la construction des équations*. Elle donne quelques éléments sur la construction point par point de courbes mécaniques, définies par une équation différentielle (dans le cas favorable où les variables sont séparables), par un procédé de résolution graphique impliquant la réalisation manuelle de quadratures. D'Alembert s'en fera à nouveau l'écho dans l'article GÉOMÉTRIE, (*Ordre encycl. Entend. Rais. Philosoph. ou Science, Science de la Nat. Mathém. Mathém. pures, Géométrie.*) (t. VII, 1757, p. 629a–638a) dans lequel il livre « quelques réflexions qui pourront n'être pas inutiles, sur la manière de traiter les *éléments de Géométrie* » et y fait la proposition d'inclure ce sujet dans une section sur la géométrie transcendante :

Ensuite, après avoir donné les principes généraux de la construction des courbes mécaniques, au moyen de leur équation différentielle & de la quadrature des courbes (voyez CONSTRUCTION), on entrera dans le détail des principales & des plus connues, de la *spirale*, de la *quadratrice*, de la *cycloïde*, de la *trochoïde*, &c. Voyez ces mots.

Cette méthode de construction, courante dans la première partie du XVIII<sup>e</sup> siècle, présente néanmoins des inconvénients. Dès la fin du XVII<sup>e</sup> siècle, Jean Bernoulli, dans une lettre à l'Hospital de fin décembre 1694 (*Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, vol. 1, Basel : Birkhäuser, 1955, p. 249), avait indiqué qu'elle était difficile à mettre en œuvre, voire « impraticable » :

Outre cela on construit par là avec une égale facilité toutes les equations differentielles, sans employer aucune rectification ni quadrature, au lieu que la methode ordinaire après avoir surmonté la plus grande difficulté, qui est de separer les indeterminées (ce qui est pourtant le plus souvent impossible) demande encore une rectification ou quadrature, ce qui rend la pratique pour ainsi dire impraticable.

Nécessitant des réalisations de quadratures graphiques qui, dans la seconde partie du XVIII<sup>e</sup> siècle, sont jugées insuffisamment performantes et rapides, cette méthode sera progressivement abandonnée au profit d'autres méthodes de résolution graphique des équations différentielles, notamment celles dites « polygonales » (dont la technique connue aujourd'hui sous le nom de « méthode d'Euler », formalisée de manière purement analytique par Euler à la fin des années 1760, est une illustration). Voir (Tournès, 2003) pour plus d'informations sur ce sujet.

## Une nouvelle dimension dans l'étude des courbes

Dans cette entrée COURBE POLYGONE, la principale nouveauté introduite par D'Alembert par rapport à l'article CURVE de la *Cyclopædia* de Chambers, qu'il achève de traduire, est la prise en compte de ce que l'on appelle aujourd'hui la troisième dimension spatiale, en faisant état des travaux assez récents sur les



courbes non planes (alors désignées comme *courbes à double courbure*) et les surfaces sur lesquelles ces courbes s'inscrivent.

Le sujet des courbes à double courbure est succinctement présenté : D'Alembert se contente de les définir dans les paragraphes 19 et 20, puis d'évoquer la recherche de leurs tangentes dans le paragraphe 21, en invitant le lecteur à se référer aux *Recherches sur les courbes à double courbure* de Clairaut. Il faut dire que ce champ de recherche est encore peu défriché au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle : les principales évolutions prolongeant et complétant les travaux de Clairaut ne viendront que dans les années 1770, avec Euler et Monge. À ce sujet, voir (Delcourt, 2011).

À propos des surfaces courbes et leurs équations (paragraphe 22), remarquons que l'on trouve également à la toute fin de la première section des *Recherches sur les courbes à double courbure* de Clairaut (p. 35-39) quelques pages sur le sujet, dans lesquelles ce dernier examine les surfaces en considérant les équations de leurs sections par des plans perpendiculaires aux axes. En revanche D'Alembert omet remarquablement de citer Leonhard Euler qui a livré en 1748, dans le second volume de son *Introductio in analysin infinitorum* une étude analytique des surfaces qui, selon Boyer, « est peut-être la contribution la plus originale d'Euler à la géométrie cartésienne, car elle représente en un sens la première présentation didactique de géométrie algébrique en trois dimensions » (Boyer, 2004, p. 188, traduit par nous). La paucité des références à l'œuvre d'Euler dans les articles de l'Encyclopédie relatifs aux courbes et aux surfaces trouve sans doute son origine dans la brouille qui oppose les deux hommes dès 1750 suite au report du prix de l'Académie de Berlin sur les fluides.

Le paragraphe 23 invite à examiner deux problèmes particuliers liés aux surfaces courbes. Le premier, à propos de la définition des surfaces courbes mécaniques (définies par une équation différentielle), montre l'intérêt de D'Alembert pour la question de l'intégration des équations aux différences partielles qu'il a abordée dans le cadre de ses recherches en mécanique et hydrodynamique (voir Guilbaud et Jouve, 2009). Le second, à propos de la ligne de plus courte distance entre deux points donnés sur une surface courbe (plus particulièrement la sphère), renvoie finalement aux questions liées à la figure de la Terre et aux opérations géodésiques. Cette section sur les surfaces courbes est donc révélatrice de la volonté de D'Alembert de faire entrer dans l'article COURBE, via cette entrée COURBE POLYGONE, des éléments relatifs à ses centres d'intérêt physico-mathématiques au sein d'un article qui, dans la version originale de la *Cyclopædia*, était essentiellement géométrique.

## Correspondances internes à l'Encyclopédie

Seuls trois articles, tous signés de D'Alembert, renvoient à la vedette d'entrée COURBE POLYGONE : l'article COURBE lui-même, quelques pages avant : « [...] ce qu'on appelle proprement courbe, & qu'on peut regarder comme l'assemblage d'une infinité de petites lignes droites contigues entr'elles à angles infiniment obtus. Voyez plus bas COURBE POLYGONE » ; l'article FORCES ACCÉLÉRATRICES (t. VII, 1757, p. 116b–118b) dont il a été question ci-dessus ; et enfin l'article DIACAUSTIQUE, (*Optique & Géométrie*) (t. IV, 1754, p. 929a) , sous une variante au pluriel : « Voyez RÉFRACTION & COURBES POLYGONES ».

## Suites et métamorphoses de l'Encyclopédie

La définition d'une courbe polygone, donnée dans le paragraphe 1, est reprise telle quelle dans le *Grand Vocabulaire français* (t. VII, p. 154) - tout comme les définitions de rectification et de quadrature d'une courbe, ainsi que celle d'une famille de courbes, issues de Chambers. L'entrée est également reprise à l'identique dans l'édition de Lucques (*Encyclopédie, édition de Lucques* t. IV p. 321-323) et dans la *Méthodique* (*Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, t. 1, p. 462-465)

Dans l'*Encyclopédie d'Yverdon*, l'entrée COURBE POLYGONE (t. XII, p. 124-130), par rapport au texte original de D'Alembert dans l'Encyclopédie, est augmentée de deux pages entières (p. 125-127) sur l'usage du *triangle analytique*. Ce dispositif est une simple adaptation du parallélogramme analytique de Newton proposée par De Gua dans ses *Usages de l'analyse de Descartes* et très largement exploitée par Cramer dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*. D'Alembert présente sommairement les principes de l'utilisation de ce parallélogramme analytique dans la dernière section de l'article PARALLÉLOGRAMME, en *Géométrie* (t. XI, 1765, p. 911a–912b).

Cet exposé relativement complet de la méthode utilisée par Cramer pour étudier les branches infinies et les points singuliers des courbes algébriques est signé (G.C.) : la coïncidence de ces initiales avec celles de Gabriel Cramer est troublante, mais il s'agit en fait du français Mathieu-Bernard Goudin (1734-1817),

astronome et mathématicien français, par ailleurs co-auteur avec Dionis du Séjour d'un *Traité des courbes algébriques* en 1756. Il y expose en dix points « les propriétés principales des courbes algébriques qui sont données par le triangle analytique exclusivement au calcul différentiel » (position et nature des branches infinies et de leurs éventuelles asymptotes), mais aussi comment l'utiliser pour obtenir un développement en série, empruntant un exemple de courbe d'ordre 7 proposé par Cramer dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* pour illustrer la méthode.

---

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021