HAL
open science

ENCCRE - annotations et dossier critique de l'article Courbe polygone

Thierry Joffredo

▶ **To cite this version:**

Thierry Joffredo. ENCCRE - annotations et dossier critique de l'article Courbe polygone. Édition Numérique Collaborative et CRitique de l'Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers (1751-1772). Vol. IV, P. 387-389, 2021. hal-03411139

HAL Id: hal-03411139

https://hal.science/hal-03411139v1

Submitted on 2 Nov 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Édition Numérique Collaborative et CRitique de l'*Encyclopédie*
http://enccre.academie-sciences.fr/
exporté le 2 nov. 2021

Article COURBE POLYGONE, vol. **IV** (**1754**), p. 387a–389b

Transcription

p. 387a COURBE POLYGONE. On appelle ainsi une *courbe* considérée non comme rigoureusement *courbe*, mais comme un polygone d'une infinité de côtés. C'est ainsi que dans la géométrie de l'infini[2] on considere les *courbes ;* ce qui ne signifie autre chose, rigoureusement parlant, sinon qu'une *courbe* est la limite des polygones, tant inscrits que circonscrits. *Voyez* LIMITE, EXHAUSTION, INFINI, DIFFÉRENTIEL, *&c.* & POLYGONE.

2 Il faut distinguer, quand on traite une *courbe* comme polygone ou comme rigoureuse[3] ; cette attention est sur-tout nécessaire dans la théorie des forces centrales & centrifuges ; car quand on traite la *courbe* comme polygone, l'effet de la force centrale, c'est-à-dire la petite ligne qu'elle fait parcourir, est égale à la base de l'angle extérieur de la *courbe ;* & quand on traite la *courbe* comme rigoureuse, l'effet de la force centrale est égale[4] à la petite ligne, qui est la base de l'angle curviligne formé par la *courbe* & par sa tangente. Or il est aisé de voir que cette petite ligne n'est que la moitié de la premiere, parce que la tangente rigoureuse de la *courbe* divise en deux également l'angle extérieur que le petit côté prolongé fait avec le côté suivant. La premiere de ces lignes est égale au quarré du petit côté divisé par le rayon du cercle osculateur, *voyez* OSCULATEUR & DEVELOPPÉE ; la seconde au quarré du petit côté divisé par le diametre du même cercle. La premiere est censée parcourue d'un mouvement uniforme, la seconde d'un mouvement uniformément accéléré : dans la premiere, la force centrale est supposée n'agir que par une impulsion unique, mais grande ; dans la seconde, elle est supposée agir, comme la pesanteur, par une somme de petits corps égaux ; & ces deux suppositions reviennent à une même ; car l'on sait qu'un corps mû d'un mouvement accéléré parcourroit uniformément avec sa vîtesse finale le double de l'espace qu'il a parcouru d'un mouvement uniformément accéléré, pour acquérir cette vîtesse. *Voyez les articles* ACCELERATION, CENTRAL, & DESCENTE. *Voyez aussi l'hist. de l'acad. 1722*[5]. & *mon traité de Dynamique, page 20. article 20. & page 30. article 26*[6].

3 *Rectification d'une courbe*, est une opération qui consiste à trouver une ligne droite égale en longueur à cette *courbe*. *Voyez* RECTIFICATION.

4 *Inflexion d'une courbe*. *Voyez* INFLEXION.

5 *Quadrature d'une courbe*, est une opération qui consiste à trouver l'aire ou l'espace renfermé par cette *courbe*, c'est-à-dire à assigner un quarré dont la surface soit égale à un espace curviligne. *Voyez* QUADRATURE.

6 *Famille de courbes*, est un assemblage de plusieurs *courbes* de différens genres, représentées toutes par la même équation d'un degré indéterminé, mais différent, selon la diversité du genre des *courbes*. *Voyez* FAMILLE.

7 Par exemple, supposons qu'on ait l'équation d'un degré indéterminé $a^{m-1}x = y^m$: si $m = 2$, on aura $ax = y^2$; si $m = 3$, on aura $a^2x = y^3$; si $m = 4$, $a^3x = y^4$. Toutes les *courbes* auxquelles ces équations appartiennent

sont dites de la même famille par quelques géometres[7].

Les équations qui représentent des familles de *courbes*, ne doivent pas être confondues avec les équations exponentielles[8] ; car quoique l'exposant soit indéterminé, par rapport à toute une famille de *courbes*, il est déterminé & constant par rapport à chacune des *courbes* qui la composent ; au lieu que dans les équations exponentielles l'exposant est variable & indéterminé pour une seule & même *courbe*. *Voyez* EXPONENTIEL.

Toutes les *courbes* algébriques composent, pour ainsi dire, une certaine famille, qui se subdivise en une infinité d'autres, dont chacune contient une infinité de genres. En effet dans les équations par lesquelles les *courbes* sont déterminées, il n'entre que des produits, soit des puissances des abscisses & des ordonnées par des coefficiens constans, soit des puissances des abscisses par des puissances des ordonnées, soit de quantités constantes pures & simples, les unes par les autres. De plus chaque équation d'une *courbe* peut toûjours avoir zéro pour un de ses membres, par exemple, $ax = y^2$ se change en $ax - y^2 = 0$. Donc l'équation générale[9] qui représentera toutes les *courbes* algébriques sera

$$\left.\begin{aligned} ay^m + bxy^{m-1} + nx^2y^{m-2} \ldots + fy^m \\ + fy^{m-1} + kxy^{m-2} \\ = qy^{m-2} \end{aligned}\right\} = 0$$

Nous devons remarquer ici que le P. Reyneau s'est trompé dans le second volume de son *analyse démontrée*[10], lorsque voulant déterminer les tangentes de toutes les *courbes* géométriques en général, il prend pour l'équation générale de toutes ces *courbes* $y^m + bx^ny^q + cx^p = 0$, équation qui n'a que trois termes. Il est visible que cette équation est insuffisante[11], & qu'on doit lui substituer celle que nous venons de donner.

Courbe caustique. *Voyez* CAUSTIQUE.

Courbe diacaustique. *Voyez* DIACAUSTIQUE.

Les meilleurs ouvrages[12] dans lesquels on puisse s'instruire de la théorie des *courbes*, sont, 1° l'*enumeratio linearum tertii ordinis* de M. Newton[13], d'où une partie de cet article COURBE est tirée[14] : 2° l'ouvrage de M. Stirling[15] sur le même sujet, & *Geometria organica* de M. Maclaurin[16], dont nous avons parlé : 3° les *usages de l'analyse* de Descartes par M. l'abbé de Gua[17], déjà cités ; ouvrage original & plein d'excellentes choses, mais qu'il faut lire avec précaution[18] (*Voyez* BRANCHE & REBROUSSEMENT.) : 4° l'*introduction / à l'analyse des lignes courbes*, par M. Cramer[19] ; ouvrage très-complet, très-clair & très-instructif, & dans lequel on trouve d'ailleurs plusieurs méthodes nouvelles[20] : 5° l'ouvrage de M. Euler, qui a pour titre, *introductio in analys. infinitorum*, Lausan. 1748[21].

Sur les propriétés, la génération, *&c.* des différentes *courbes* méchaniques particulieres ; par exemple, de la cycloïde, de la logarithmique, de la spirale, de la quadratice, *&c.* *Voy.* *les articles* CYCLOÏDE, LOGARITHMIQUE, *&c.*

On peut voir aussi la derniere section de l'application de l'Algebre à la Géométrie, de M. Guisnée[22], où l'on trouvera quelques principes généraux sur les *courbes* méchaniques. *Voyez* *aussi* MECHANIQUE & TRANSCENDANT.

On peut faire passer une *courbe* géométrique & réguliere, par tant de points qu'on voudra d'une *courbe* quelconque irréguliere, tracée sur le papier ; car ayant imaginé dans le plan de cette *courbe* une ligne droite quelconque, qu'on prendra pour la ligne des abscisses, & ayant abaissé des points donnés de la *courbe* irréguliere des perpendiculaires à la ligne des *x*, on nommera *a* la premiere ordonnée, & *b* l'abscisse qui lui répond ; *c* la seconde ordonnée, & *e* l'abscisse correspondante ; *f* la troisieme ordonnée, & *g* l'abscisse correspondante. Ensuite on supposera une *courbe* dont l'équation[23] soit $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^2 +$ *&c.* & faisant successivement *y*

$= a$, $x = b$; $y = c$, $x = e$; $y = f$, $x = g$, &c. on déterminera les coefficiens A, B, C, &c. en tel nombre qu'on voudra ; & la *courbe* réguliere dont l'équation est $y = A + Bx + Cx^2$, &c. passera par tous les points donnés[24]. S'il y a n points donnés, il faudra supposer n coefficiens A, B, C, D, &c. On peut donc faire approcher aussi près qu'on voudra une *courbe* irréguliere d'une *courbe* réguliere ; mais jamais on ne parviendra à faire coïncider l'un avec l'autre[25] ; & il ne faut pas s'imaginer qu'on puisse jamais, à la vûe simple, déterminer l'équation d'une *courbe*, comme l'a crû le géometre dont nous avons parlé au commencement de cet article[26].

Les *courbes* dont l'équation $y = A + Bx + Cx^2$ &c. s'appellent *courbes de genre parabolique.* *Voyez* PARABOLIQUE. Elles servent à rendre une *courbe* quelconque irréguliere ou méchanique, le plus géométrique qu'il est possible. Elles servent aussi à l'équarrer[27] par approximation[28]. *Voyez* QUADRATURE. Au reste, il y a des *courbes*, par exemple, les *courbes ovales* ou *rentrant en elles-mêmes*, par lesquelles on ne peut jamais faire passer une *courbe* de genre parabolique ; parce que dans cette derniere *courbe* l'ordonnée n'a jamais qu'une valeur, & que dans les *courbes* ovales, elle en a toûjours au moins deux. Mais on pourroit, par exemple, rapporter ces *courbes*, lorsqu'elles ont un axe qui les divise en deux également, à l'équation $y = A + Bx + Cx^2 +$ &c. *Voyez* METHODE DIFFERENTIELLE[29].

Courbe à double courbure. On appelle ainsi une *courbe* dont tous les points ne sauroient être supposés dans un même plan, & qui par conséquent est doublement *courbe*, & par elle-même, & par la surface sur laquelle on peut la supposer appliquée. On distingue par cette dénomination les *courbes* dont il s'agit, d'avec les *courbes* à simple courbure ou *courbes* ordinaires. M. Clairaut a donné un traité de ces *courbes* à double courbure[30] ; c'est le premier ouvrage qu'il ait publié.

Une *courbe* quelconque a double courbure étant supposée tracée ; on peut projetter cette *courbe* sur deux plans différens perpendiculaires l'un à l'autre, & les projections seront deux *courbes* ordinaires qui auront un axe commun & des ordonnées différentes. L'équation d'une de ces *courbes* sera, par exemple, en x & en y, l'autre en x & en z. Ainsi l'équation d'une *courbe* à double courbure[31] sera composée de deux équations à deux variables chacune, qui ont chacune une même variable commune[32]. Il est à remarquer que quand on a l'équation en x & en y, & l'équation en x & en z, on peut avoir par les regles connues[33] (*Voyez* EQUATION & DIVISION) une autre équation en y & en z ; & ce sera l'équation d'une troisieme *courbe*, qui est la projection de la *courbe* à double courbure sur un troisieme plan perpendiculaire aux deux premiers.

On peut regarder, si l'on veut, une des *courbes* de projection, par exemple, celle qui a pour coordonnées x & y, comme l'axe curviligne de la *courbe* à double courbure. Si on veut avoir la tangente de cette derniere *courbe* en un point quelconque, on menera d'abord la tangente de la *courbe* de projection au point correspondant, c'est-à-dire au point qui est la projection de celui dont on demande la tangente ; & sur cette tangente prolongée autant qu'il sera nécessaire, on prendra une partie $= \frac{zds}{dz}$, ds exprimant le petit arc de la *courbe* de projection : on a le rapport de ds à dx par l'équation de la *courbe* en x & en y (*Voyez* TANGENTE & DIFFERENTIEL) ; on a celui de dx à dz par l'équation de la *courbe* en x & en z. Donc $\frac{zds}{dz}$ pourra toûjours être exprimé par une quantité finie, d'où les différentielles disparoîtront. Une *courbe* à double courbure est algébrique, quand les deux *courbes* de projection le sont ; elle est méchanique, quand l'une des *courbes* de projection est méchanique, ou quand elles le sont toutes deux. Mais dans ce dernier cas on n'en trouvera pas moins les tangentes ; car par l'équation différentielle des *courbes* de projection, on aura toûjours la valeur de ds en dx & celle de dz en dx.

Surfaces courbes. Une surface[34] *courbe* est représentée en Géométrie par une équation à trois variables, par exemple, x, y & z. En effet, si on prend une ligne quelconque au-dedans ou au-dehors de la surface *courbe* pour la ligne des x, & qu'on imagine à cette ligne une infinité de plans perpendiculaires qui coupent la surface *courbe*, ces plans formeront autant de *courbes*, dont l'équation sera en y & en z, & dont le parametre sera la distance variable x du plan coupant à l'origine des x. Ainsi, $zz = xx - yy$, est l'équation d'un cone droit & rectangle, dont l'axe est la ligne des x. M. Descartes est le premier qui ait déterminé les surfaces *courbes* par des équations à trois variables[35], comme les lignes *courbes* par des équations à deux.

Une surface *courbe* est géométrique, quand son équation est algébrique & exprimée en termes finis. Elle est méchanique, quand son équation est différentielle & non algébrique ; dans ce cas on peut représenter l'équation de la surface *courbe* par $dz = \alpha dx + \beta dy$, α & β étant des fonctions de x, de y & de z. Il semble d'abord qu'on aura cette surface *courbe*, en menant à chaque point de la ligne des x un plan perpendiculaire à cette ligne, & en traçant ensuite sur ce plan la *courbe* dont l'équation est $dz = \beta dy$, x étant regardée comme un parametre constant, & dx étant supposée $= 0$. Cette construction donneroit à la vérité une surface *courbe* ; mais il faut que la surface *courbe* satisfasse encore à l'équation $dz = \alpha dx$, y étant regardé comme constant ; c'est-à-dire il faut que les sections de la surface *courbe*, par un plan parallele à la ligne des x, soient représentées par l'équation $dz = adx$. Or cela ne peut avoir lieu que lorsqu'il y a une certaine condition entre les quantités α & β ; condition que M. Fontaine[36], de l'académie des Sciences, a découvert le premier. On trouvera aussi dans les mémoires de l'académie de Petersbourg, *tome III.*[37] des recherches sur la ligne la plus courte[38] que l'on puisse tracer sur une surface / *courbe* entre deux points donnés. Sur une surface plane, la ligne la plus courte est une ligne droite. Sur une surface sphérique, la ligne la plus courte est un arc de grand cercle passant par les deux points donnés. Et en effet il est aisé de voir, par les principes de la Géométrie ordinaire, que cet arc est plus petit que tout autre ayant la même corde ; car, à cordes égales, les plus petits arcs sont ceux qui ont un plus grand rayon. *Voyez* aussi les *œuvres* de Bernoulli, *tome IV. page 108*[39]. La ligne dont il s'agit a cette propriété, que tout plan passant par trois points infiniment proches, ou deux côtés contigus de la *courbe*, doit être perpendiculaire au plan qui touche la *courbe* en cet endroit. En voici la preuve. Toute *courbe* qui passe par deux points infiniment proches d'une surface sphérique, & qu'on peut toûjours regarder comme un arc de cercle, est évidemment la ligne la plus courte, lorsqu'elle est un arc de grand cercle ; & cet arc de grand cercle est perpendiculaire au plan touchant, comme on peut le démontrer aisément par les élémens de Géométrie. Or toute portion de surface *courbe* infiniment petite peut être regardée comme une portion de surface sphérique, & toute partie de *courbe* infiniment petite comme un arc de cercle. Donc, *&c*. La perpendiculaire à la méridienne de la France tracée par M. Cassini, est une *courbe* à double courbure, & est la plus courte qu'on puisse tracer sur la surface de la terre regardée comme un sphéroïde applati. *Voyez les mémoires de l'acad. de 1732 & 1733*[40]. Voilà tout ce que nous pouvons dire sur cette matiere, dans un ouvrage de l'espece de celui-ci.

Des courbes méchaniques, & de leur usage pour la construction des équations différentielles. Nous avons expliqué plus haut ce que c'est que ces *courbes*. Il ne s'agit que d'expliquer ici comment on les construit, ou en général comment on construit une équation différentielle. Soit, par exemple[41], $dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$ une équation à construire, on aura $y = \int \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}} + C$, C étant une constante qu'on ajoûte, parce que $\int \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$

est supposée $= 0$ lorsque $x = 0$, & qu'on suppose que $x = 0$ rend $y = C$. *Voyez* CONSTANTE. On construira d'abord une *courbe* géométrique dont les ordonnées soient $\frac{aa}{\sqrt{2ax-xx}}$ les abscisses étant x, l'aire de cette *courbe* (*Voyez* QUADRATURE.) sera $\int \frac{aadx}{\sqrt{2ax-xx}}$; ainsi en supposant cette *courbe* générale, si on fait un quarré $zz = \int \frac{aadx}{\sqrt{2ax-xx}}$, on aura $y = \frac{zz}{a} + C$, & on construira la *courbe* dont l'ordonnée est y.

Cette méthode suppose, comme on voit, que les indéterminées soient séparées dans l'équation différentielle (*Voyez* CALCUL INTÉGRAL) ; elle suppose de plus les quadratures, sans cela elle ne pourroit réussir.

Soit en général $Xdx = Y\,d\,y$, X étant une fonction de x (*Voyez* FONCTION), & Y une fonction de y. On construira d'abord par la méthode précédente une *courbe* dont les abscisses soient x, & dont les ordonnées z soient $= \int Xdx$ divisé par une constante convenable, c'est-à-dire par une constante m qui ait autant de dimensions qu'il y en a dans X ; ensorte que $\int \frac{Xdx}{m}$ soit d'une dimension, pour pouvoir être égale à une ligne z. Ensuite on construira de même une *courbe* dont les abscisses soient y, & dont les ordonnées u soient $= \int \frac{Ydy}{m}$; prenant ensuite u dans la derniere *courbe* $= z$ dans l'autre, on aura l'x & l'y correspondantes ; & ces x & y joints à angles droits, si les coordonnées doivent faire un angle droit, donneront la *courbe* qu'on cherche.

Voyez dans la *derniere section de* l'application de l'Algebre à la géométrie de M. Guisnée[42], & dans l'*analyse des infiniment petits* de M. de l'Hopital[43], plusieurs exemples de construction des équations différentielles[44] par des *courbes méchaniques*. (*O*)[45]

Vue(s) Numérisée(s)

Volume IV, p. 387 (Bibliothèque Mazarine, cote 2° 3442)

nons de parler; propriété que M. Newton n'avoit fait qu'énoncer sans démonstration. *Voyez aussi* sur cette proposition l'*ouvrage cité* de M. l'abbé de Gua, *page 198. & suiv.* Voyez *aussi* OMBRE.

Usage des courbes pour la construction des équations. L'usage principal des *courbes* dans la Géométrie, est de donner par leurs points d'intersection la solution des problèmes. *Voyez* CONSTRUCTION.

Supposons, par exemple, qu'on ait à construire une équation de neuf dimensions, comme $x^9 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + (m+f)x^3 + gx^2 + hx + k = o$, dans laquelle b, c, d, &c. signifient des quantités quelconques données, affectées des signes + ou −; on prendra l'équation à la parabole cubique $x^3 = y$, & mettant y pour x^3 dans la premiere équation, elle se changera en $y^3 + bxy^2 + cy^2 + dx^2y + exy + my + fx^3 + gx^2 + hx + k = o$, équation à une autre *courbe* du second genre dans laquelle m ou f peuvent être supposés $= o$. Si on décrit chacune de ces *courbes*, leurs points d'intersection donneront les racines de l'équation proposée. Il suffit de décrire une fois la parabole cubique. Si l'équation à construire se réduit à 7 dimensions par le manquement des termes hx & k, l'autre *courbe* aura, en effaçant m, un point double à l'origine des abscisses, & pourra être décrite par différentes méthodes. Si l'équation est réduite à six dimensions par le manquement des trois termes $gx^2 + hx + k$, l'autre *courbe*, en effaçant f, deviendra une section conique; & si par le manquement des six derniers termes l'équation est réduite à trois dimensions, on retombera dans la construction que Wallis en a donnée par le moyen d'une parabole cubique & d'une ligne droite. *Voyez* CONSTRUCTION, & l'*ouvrage de* M. Cramer, *chap. iv.*

COURBE POLYGONE. On appelle ainsi une *courbe* considérée non comme rigoureusement *courbe*, mais comme un polygone d'une infinité de côtés. C'est ainsi que dans la géométrie de l'infini on considere les *courbes*; ce qui ne signifie autre chose, rigoureusement parlant, sinon qu'une *courbe* est la limite des polygones, tant inscrits que circonscrits. *Voyez* LIMITE, EXHAUSTION, INFINI, DIFFÉRENTIEL, *&c.* & POLYGONE.

Il faut distinguer, quand on traite une *courbe* comme polygone ou comme rigoureuse; cette attention est sur-tout nécessaire dans la théorie des forces centrales & centrifuges; car quand on traite la *courbe* comme polygone, l'effet de la force centrale, c'est-à-dire la petite ligne qu'elle fait parcourir, est égale à la base de l'angle extérieur de la *courbe*; & quand on traite la *courbe* comme rigoureuse, l'effet de la force centrale est égale à la petite ligne, qui est la base de l'angle curviligne formé par la *courbe* & par sa tangente. Or il est aisé de voir que cette petite ligne n'est que la moitié de la premiere, parce que la tangente rigoureuse de la *courbe* divise en deux également l'angle extérieur que le petit côté prolongé fait avec le côté suivant. La premiere de ces lignes est égale au quarré du petit côté divisé par le rayon du cercle osculateur, *voyez* OSCULATEUR & DEVELOPPÉE; la seconde au quarré du petit côté divisé par le diametre du même cercle. La premiere est censée parcourue d'un mouvement uniforme, la seconde d'un mouvement uniformément accéléré: dans la premiere, la force centrale est supposée n'agir que par une impulsion unique, mais grande; dans la seconde, elle est supposée agir, comme la pesanteur, par une somme de petits corps égaux; & ces deux suppositions reviennent à une même; car l'on sait qu'un corps mû d'un mouvement accéléré parcourroit uniformément avec sa vitesse finale le double de l'espace qu'il a parcouru d'un mouvement uniformément accéléré, pour acquérir cette vitesse. *Voyez les articles* ACCELERATION, CENTRAL, & DESCENTE. *Voyez aussi l'hist. de l'acad. 1722.* & *mon traité de Dynamique, page 20. article 20.* & *page 30. article 26.*

Rectification d'une courbe, est une opération qui consiste à trouver une ligne droite égale en longueur à cette *courbe*. *Voyez* RECTIFICATION.

Inflexion d'une courbe. Voyez INFLEXION.

Quadrature d'une courbe, est une opération qui consiste à trouver l'aire ou l'espace renfermé par cette *courbe*, c'est-à-dire à assigner un quarré dont la surface soit égale à un espace curviligne. *Voyez* QUADRATURE.

Famille de courbes, est un assemblage de plusieurs *courbes* de différens genres, représentées toutes par la même équation d'un degré indéterminé, mais différent, selon la diversité du genre des *courbes*. *Voyez* FAMILLE.

Par exemple, supposons qu'on ait l'équation d'un degré indéterminé $a^{m-1}x = y^m$: si $m = 2$, on aura $ax = y^2$; si $m = 3$, on aura $a^2x = y^3$; si $m = 4$, $a^3x = y^4$. Toutes les *courbes* auxquelles ces équations appartiennent sont dites de la même famille par quelques géometres.

Les équations qui représentent des familles de *courbes*, ne doivent pas être confondues avec les équations exponentielles; car quoique l'exposant soit indéterminé, par rapport à toute une famille de *courbes*, il est déterminé & constant par rapport à chacune des *courbes* qui la composent; au lieu que dans les équations exponentielles l'exposant est variable & indéterminé pour une seule & même *courbe*. *Voyez* EXPONENTIEL.

Toutes les *courbes* algébriques composent, pour ainsi dire, une certaine famille, qui se subdivise en une infinité d'autres, dont chacune contient une infinité de genres. En effet dans les équations par lesquelles les *courbes* sont déterminées, il n'entre que des produits, soit des puissances des abscisses & des ordonnées par des coefficiens constans, soit des puissances des abscisses par des puissances des ordonnées, soit de quantités constantes pures & simples, les unes par les autres. De plus chaque équation d'une *courbe* peut toûjours avoir zéro pour un de ses membres, par exemple, $ax = y^2$ se change en $ax - y^2 = o$. Donc l'équation générale qui représentera toutes les *courbes* algébriques sera

$$\left.\begin{array}{l} ay^m + bxy^{m-1} + nx^2y^{m-2} \ldots + fy^m \\ \quad + fy^{m-1} + kxy^{m-2} \\ \qquad\qquad = qy^{m-2} \end{array}\right\} = o.$$

Nous devons remarquer ici que le P. Reyneau s'est trompé dans le second volume de son *analyse démontrée*, lorsque voulant déterminer les tangentes de toutes les *courbes* géométriques en général, il prend pour l'équation générale de toutes ces *courbes* $y^m + bx^n y^q + cx^p = o$, équation qui n'a que trois termes. Il est visible que cette équation est insuffisante, & qu'on doit lui substituer celle que nous venons de donner.

Courbe caustique. Voyez CAUSTIQUE.

Courbe diacaustique. Voyez DIACAUSTIQUE.

Les meilleurs ouvrages dans lesquels on puisse s'instruire de la théorie des *courbes*, sont, 1° l'*enumeratio linearum tertii ordinis* de M. Newton, d'où une partie de cet article COURBE est tirée: 2° l'ouvrage de M. Stirling sur le même sujet, & *Geometria organica* de M. Maclaurin, dont nous avons parlé: 3° les *usages de l'analyse* de Descartes par M. l'abbé de Gua, déjà cités; ouvrage original & plein d'excellentes choses, mais qu'il faut lire avec précaution (*Voyez* BRANCHE & REBROUSSEMENT.): 4° l'*introduction*

Volume IV, p. 388 (Bibliothèque Mazarine, cote 2° 3442)

à l'analyse des lignes courbes, par M. Cramer; ouvrage très-complet, très-clair & très-instructif, & dans lequel on trouve d'ailleurs plusieurs méthodes nouvelles: 5° l'ouvrage de M. Euler, qui a pour titre, *introductio in analys. infinitorum*, Lausan. 1748.

Sur les propriétés, la génération, *&c.* des différentes *courbes* méchaniques particulieres; par exemple, de la cycloïde, de la logarithmique, de la spirale, de la quadratice, *&c. Voy. les articles* CYCLOÏDE, LOGARITHMIQUE, *&c.*

On peut voir aussi la derniere section de l'application de l'Algebre à la Géométrie, de M. Guisnée, où l'on trouvera quelques principes généraux sur les *courbes* méchaniques. *Voyez aussi* MECHANIQUE & TRANSCENDANT.

On peut faire passer une *courbe* géométrique & réguliere, par tant de points qu'on voudra d'une *courbe* quelconque irréguliere, tracée sur le papier; car ayant imaginé dans le plan de cette *courbe* une ligne droite quelconque, qu'on prendra pour la ligne des abscisses, & ayant abaissé des points donnés de la *courbe* irréguliere des perpendiculaires à la ligne des x, on nommera a la premiere ordonnée, & b l'abscisse qui lui répond; c la seconde ordonnée, & e l'abscisse correspondante; f la troisieme ordonnée, & g l'abscisse correspondante. Ensuite on supposera une *courbe* dont l'équation soit $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^2 +$ &c. & faisant successivement $y = a, x = b$; $y = c, x = e$; $y = f, x = g$, &c. on déterminera les coefficiens A, B, C, &c. en tel nombre qu'on voudra; & la *courbe* réguliere dont l'équation est $y = A + Bx + Cx^2$, &c. passera par tous les points donnés. S'il y a n points donnés, il faudra supposer n coefficiens A, B, C, D, &c. On peut donc faire approcher aussi près qu'on voudra une *courbe* irréguliere d'une *courbe* réguliere; mais jamais on ne parviendra à faire coïncider l'un avec l'autre; & il ne faut pas s'imaginer qu'on puisse jamais, à la vûe simple, déterminer l'équation d'une *courbe*, comme l'a crû le géometre dont nous avons parlé au commencement de cet article.

Les *courbes* dont l'équation $y = A + Bx + Cx^2$ &c. s'appellent *courbes de genre parabolique*. *Voyez* PARABOLIQUE. Elles servent à rendre une *courbe* quelconque irréguliere ou méchanique, le plus géométrique qu'il est possible. Elles servent aussi à l'équarrer par approximation. *Voyez* QUADRATURE. Au reste, il y a des *courbes*, par exemple, les *courbes ovales* ou *rentrant en elles-mêmes*, par lesquelles on ne peut jamais faire passer une *courbe* de genre parabolique; parce que dans cette derniere *courbe* l'ordonnée n'a jamais qu'une valeur, & que dans les *courbes* ovales, elle en a toûjours au moins deux. Mais on pourroit, par exemple, rapporter ces *courbes*, lorsqu'elles ont un axe qui les divise en deux également, à l'équation $yy = A + Bx + Cx^2 +$ &c. *Voyez* METHODE DIFFERENTIELLE.

Courbe à double courbure. On appelle ainsi une *courbe* dont tous les points ne sauroient être supposés dans un même plan, & qui par conséquent est doublement *courbe*, & par elle-même, & par la surface sur laquelle on peut la supposer appliquée. On distingue par cette dénomination les *courbes* dont il s'agit, d'avec les *courbes* à simple courbure ou *courbes* ordinaires. M. Clairaut a donné un traité de ces *courbes* à double courbure; c'est le premier ouvrage qu'il ait publié.

Une *courbe* quelconque a double courbure étant supposée tracée; on peut projetter cette *courbe* sur deux plans différens perpendiculaires l'un à l'autre, & les projections seront deux *courbes* ordinaires qui auront un axe commun & des ordonnées différentes. L'équation d'une de ces *courbes* sera, par exemple, en x & en y, l'autre en x & en z. Ainsi l'équation d'une *courbe* à double courbure sera composée de deux équations à deux variables chacune, qui ont chacune une même variable commune. Il est à remarquer que quand on a l'équation en x & en y, & l'équation en x & en z, on peut avoir par les regles connues (*Voyez* EQUATION & DIVISION) une autre équation en y & en z; & ce sera l'équation d'une troisieme *courbe*, qui est la projection de la *courbe* à double courbure sur un troisieme plan perpendiculaire aux deux premiers.

On peut regarder, si l'on veut, une des *courbes* de projection, par exemple, celle qui a pour coordonnées x & y, comme l'axe curviligne de la *courbe* à double courbure. Si on veut avoir la tangente de cette derniere *courbe* en un point quelconque, on menera d'abord la tangente de la *courbe* de projection au point correspondant, c'est-à-dire au point qui est la projection de celui dont on demande la tangente; & sur cette tangente prolongée autant qu'il sera nécessaire, on prendra une partie $= \frac{z\,ds}{dz}$, ds exprimant le petit arc de la *courbe* de projection: on a le rapport de ds à dx par l'équation de la *courbe* en x & en y (*Voyez* TANGENTE & DIFFERENTIEL); on a celui de dx à dz par l'équation de la *courbe* en x & en z. Donc $\frac{z\,ds}{dz}$ pourra toûjours être exprimé par une quantité finie, d'où les différentielles disparoîtront. Une *courbe* à double courbure est algébrique, quand les deux *courbes* de projection le sont: elle est méchanique, quand l'une des *courbes* de projection est méchanique, ou quand elles le sont toutes deux. Mais dans ce dernier cas on n'en trouvera pas moins les tangentes; car par l'équation différentielle des *courbes* de projection, on aura toûjours la valeur de ds en dx & celle de dz en dx.

Surfaces courbes. Une surface *courbe* est représentée en Géométrie par une équation à trois variables, par exemple, x, y & z. En effet, si on prend une ligne quelconque au-dedans ou au-dehors de la surface *courbe* pour la ligne des x, & qu'on imagine à cette ligne une infinité de plans perpendiculaires qui coupent la surface *courbe*, ces plans formeront autant de *courbes*, dont l'équation sera en y & en z, & dont le parametre sera la distance variable x du plan coupant à l'origine des x. Ainsi, $zz = xx - yy$, est l'équation d'un cone droit & rectangle, dont l'axe est la ligne des x. M. Descartes est le premier qui ait déterminé les surfaces *courbes* par des équations à trois variables, comme les lignes *courbes* par des équations à deux.

Une surface *courbe* est géométrique, quand son équation est algébrique & exprimée en termes finis. Elle est méchanique, quand son équation est différentielle & non algébrique; dans ce cas on peut représenter l'équation de la surface *courbe* par $dz = \alpha\,dx + \zeta\,dy$, α & ζ étant des fonctions de x, de y & de z. Il semble d'abord qu'on aura cette surface *courbe*, en menant à chaque point de la ligne des x un plan perpendiculaire à cette ligne, & en traçant ensuite sur ce plan la *courbe* dont l'équation est $dz = \zeta\,dy$, x étant regardée comme un parametre constant, & dx étant supposée $= 0$. Cette construction donneroit à la vérité une surface *courbe*; mais il faut que la surface *courbe* satisfasse encore à l'équation $dz = \alpha\,dx$, y étant regardé comme constant; c'est-à-dire il faut que les sections de la surface *courbe*, par un plan parallele à la ligne des x, soient représentées par l'équation $dz = \alpha\,dx$. Or cela ne peut avoir lieu que lorsqu'il y a une certaine condition entre les quantités α & ζ; condition que M. Fontaine, de l'académie des Sciences, a découvert le premier. On trouvera aussi dans les mémoires de l'académie de Petersbourg, *tome III.* des recherches sur la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur une surface

courbe entre deux points donnés. Sur une surface plane, la ligne la plus courte est une ligne droite. Sur une surface sphérique, la ligne la plus courte est un arc de grand cercle passant par les deux points donnés. Et en effet il est aisé de voir, par les principes de la Géométrie ordinaire, que cet arc est plus petit que tout autre ayant la même corde; car, à cordes égales, les plus petits arcs sont ceux qui ont un plus grand rayon. *Voyez* aussi les *œuvres* de Bernoulli, *tome IV. page 108*. La ligne dont il s'agit a cette propriété, que tout plan passant par trois points infiniment proches, ou deux côtés contigus de la *courbe*, doit être perpendiculaire au plan qui touche la *courbe* en cet endroit. En voici la preuve. Toute *courbe* qui passe par deux points infiniment proches d'une surface sphérique, & qu'on peut toûjours regarder comme un arc de cercle, est évidemment la ligne la plus courte, lorsqu'elle est un arc de grand cercle; & cet arc de grand cercle est perpendiculaireau plan touchant, comme on peut le démontrer aisément par les élémens de Géométrie. Or toute portion de surface *courbe* infiniment petite peut être regardée comme une portion de surface sphérique, & toute partie de *courbe* infiniment petite comme un arc de cercle. Donc, *&c.* La perpendiculaire à la méridienne de la France tracée par M. Cassini, est une *courbe* à double courbure, & est la plus courte qu'on puisse tracer sur la surface de la terre regardée comme un sphéroïde applati. *Voyez les mémoires de l'acad. de 1732 & 1733*. Voilà tout ce que nous pouvons dire sur cette matiere, dans un ouvrage de l'espece de celui-ci.

Des courbes méchaniques, & de leur usage pour la construction des équations différentielles. Nous avons expliqué plus haut ce que c'est que ces *courbes*. Il ne s'agit que d'expliquer ici comment on les construit, ou en général comment on construit une équation différentielle. Soit, par exemple, $dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$ une équation à construire, on aura $y = \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}} + C$, C étant une constante qu'on ajoûte, parce que $\int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$ est supposée $= 0$ lorsque $x = 0$, & qu'on suppose que $x = 0$ rend $y = C$. *Voyez* CONSTANTE. On construira d'abord une *courbe* géométrique dont les ordonnées soient $\frac{ax}{\sqrt{2ax - xx}}$ les abscisses étant x, l'aire de cette *courbe* (*Voyez* QUADRATURE.) sera $\int \frac{axdx}{\sqrt{2ax - xx}}$; ainsi en supposant cette *courbe* générale, si on fait un quarré $zz = \int \frac{axdx}{\sqrt{2ax - xx}}$, on aura $y = \frac{zz}{a} + C$, & on construira la *courbe* dont l'ordonnée est y.

Cette méthode suppose, comme on voit, que les indéterminées soient séparées dans l'équation différentielle (*Voyez* CALCUL INTEGRAL); elle suppose de plus les quadratures, sans cela elle ne pourroit réussir.

Soit en général $Xdx = Ydy$, X étant une fonction de x (*Voyez* FONCTION), & Y une fonction de y. On construira d'abord par la méthode précédente une *courbe* dont les abscisses soient x, & dont les ordonnées z soient $= \int Xdx$ divisé par une constante convenable, c'est-à-dire par une constante m qui ait autant de dimensions qu'il y en a dans X; ensorte que $\int \frac{Xdx}{m}$ soit d'une dimension, pour pouvoir être égale à une ligne z. Ensuite on construira de même une *courbe* dont les abscisses soient y, & dont les ordonnées u soient $= \int \frac{Ydy}{m}$; prenant ensuite u dans la derniere *courbe* $= z$ dans l'autre, on aura l'x & l'y correspondantes; & ces x & y joints à angles droits, si les coordonnées doivent faire un angle droit, donneront la *courbe* qu'on cherche.

Voyez dans la *derniere section de* l'application de l'Algebre à la géométrie de M. Guisnée, & dans l'*analyse des infiniment petits* de M. de l'Hopital, plusieurs exemples de construction des équations différentielles par des *courbes méchaniques*. (*O*)

COURBE DES ARCS, *voyez* TROCHOÏDE.

COURBE DES SINUS, *voyez* SINUS.

COURBES, s. f. (*Mar.*) Ce sont des pieces de bois beaucoup plus fortes & plus grosses que les courbatons, dont elles ont la figure: leur usage est de lier les membres des côtés du vaisseau aux baux, & de gros membres à d'autres. *Voyez* COURBATONS.

Sur chaque bout des baux on met une *courbe* ou courbaton, pour le soûtenir & lier le vaisseau. Pour former une *courbe* on prend ordinairement un pié d'arbre, au haut duquel il y a deux branches qui fourchent, & l'on coupe ce pié en deux, y laissant une branche fourchue de chaque côté. Aux grands gabarits & sous toute l'embelle, où le vaisseau a le plus à souffrir, on ne peut mettre les *courbes* trop fortes; mais comme de si grosses pieces de bois diminuent l'espace pour l'arimage, on fait quelquefois des *courbes* de fer de trois à quatre pouces de large, & d'un quart de pouce d'épais, qu'on applique sur les côtés des *courbes* qui sont les plus foibles, & la branche supérieure s'applique aux baux avec des clous & des chevilles de fer. *Voy. Marine, Pl. V. fig. 1. n°. 121.* les *courbes* de fer du second pont, & *Pl. IV. fig. 1.* même *n°. 121.* & celles du premier pont, mêmes *Planches, n°. 70.*

A l'égard des *courbes* ou courbatons qui se posent en-travers dans les angles de l'avant & de l'arriere du vaisseau, on leur laisse toûjours toute la grosseur que le bois peut fournir, & l'on tâche d'en avoir d'un pié d'arbre entier où il n'y ait qu'une fourche, & qui n'ait point été scié, parce que celles qui sont sciées sont bien plus foibles; & pour le mieux on tâche que les *courbes* qui se posent en travers, ayent à l'endroit de bas des ferrebauquieres, autant d'épaisseur que le bau auquel elles sont jointes.

Courbes d'arcasse, ce sont des pieces de liaison assemblées dans chacun des angles de la poupe, d'un bout contre la lisse de hourdi, & de l'autre contre les membres du vaisseau. *Voyez leur figure, Marine, Pl. VI. n°. 69.*

Courbe de contre-arcasse ou *contre-lisses*; ce sont des pieces de bois posées en fond de cale, arboutées par en-haut contre l'arcasse, & attachées du bout d'en-bas sur les membres du vaisseau.

Courbe d'étambord, c'est une piece de bois *courbe*, qui pose sur la quille du vaisseau d'un côté, & de l'autre contre l'étambord. *Voyez Marine, Pl. IV. fig. 1. n°. 8.*

Courbes du premier pont, doivent avoir les deux tiers de l'épaisseur de l'étrave. *Voy. leur fig. Marine, Pl. VI. n°. 68.*

Courbe de la poulaine, c'est une piece de bois située entre la gorgere ou taille-mer, l'étrave & l'aiguille de l'éperon. *Voyez Pl. IV. fig. 1.* cette *courbe* cottée *194.* la *gorgere*, cottée *193.* l'*étrave*, *n°. 3.* & l'*aiguille de l'éperon*, *184.* (*Z*)

COURBE, se dit *en Charpenterie & Menuiserie*, de toute piece de bois ceintrée.

COURBE D'ESCALIER, (*Charpent.*) c'est celle qui forme le quartier tournant, autrement dit *le noyau recreusé*. Voyez *Pl. I. fig. 2. du Charpentier.*

Courbes rallongées, sont celles dont les parties ceintrées ont différens points de centres.

COURBE, (*Maréchallerie.*) Les Maréchaux appellent ainsi une tumeur dure & calleuse qui vient en longueur au-dedans du jarret du cheval; c'est-à-dire

Notes

(1) :
Note domaine

Domaine : Géométrie

par Collectif projet ENCCRE, le 25 juin 2017

(2) Note ponctuelle sur « géométrie de l'infini »

L'expression « géométrie de l'infini » fait référence au titre d'un ouvrage de Fontenelle paru en 1727 sous le titre *Elémens de la géométrie de l'infini*. Elle peut être comprise ici comme la « géométrie des infiniment petits, contenant les regles du calcul différentiel et intégral » comme D'Alembert la définit lui-même dans l'article INFINI *Géométrie de l'infini*, (*Géomet.*) (t. VIII, 1765, p. 703a–b) , où il critique la conception de Fontenelle.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(3) Note ponctuelle sur « comme polygone … rigoureuse »

L'avertissement formulé dans ce paragraphe a déjà été donné par D'Alembert dans son *Traité de dynamique* (p. 21-22) vers lequel il renvoie le lecteur en fin de paragraphe. Voir la partie *Enjeux de l'article* du dossier critique.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(4) Note ponctuelle sur « égale »

Lire « égal ».

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(5) :
Note sur la mention bibliographique « l'hist. de l'acad. 1722 »

Œuvre mentionnée : [Fontenelle], « Sur les courbes considérées exactement comme courbes, ou comme poligones infinis », *Histoire de l'Académie royale des sciences avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, tirés des registres de cette Académie. Partie Histoire*, 1722 (1724) , p. 74-82 [consulter (https://books.google.fr/books?id=SQkVAAAAQAAJ&hl=fr&pg=PA74#v=onepage&q&f=false)]

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

(6) :
Note sur la mention bibliographique « mon traité de Dynamique, page 20. article 20. & page 30. article 26 »

Œuvre mentionnée : Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique, dans lequel les Loix de l'Equilibre & du Mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une maniére nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres, d'une maniére quelconque*, 1ère éd., 1743 ; 2e éd., 1758.

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

(7) Note ponctuelle sur « par quelques géometres »

Cette définition d'une famille de courbes, présente dans l'article CURVE de la *Cyclopædia*, est directement tirée des *Elementa matheseos universae* de Christian Wolff (t. 1, § 383, p.343 dans l'édition de 1743) :

> *Familia curvarum* vocatur plurium curvarum diversi generis congeries, quæ omnes per eandem æquationem indeterminati gradus, sed pro diversitate generis diversimode explicandi, definiuntur.

Wolff illustre cette définition à l'aide du même exemple qui est utilisé par Chambers puis D'Alembert.

D'Alembert, très familier des travaux de Gabriel Cramer, n'a pas repris la courte définition que ce dernier en donne dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (p. 223) où il écrit que « l'usage des géomètres [est] d'apeller de même *famille* les Courbes dont les équations ne diffèrent que par les exposants de *x* & de *y* » et où il renvoie lui-même à Wolff.

On peut enfin remarquer que Chambers propose également le terme de *tribu* (« All which *curves* are said to be of the *same family*, or tribe ») qui n'est pas retenu ici par D'Alembert.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(8) Note ponctuelle sur « exponentielles »

Il y a là une variation dans la traduction faite par D'Alembert : en effet, à cet endroit de l'article CURVE de la *Cyclopædia*, la remarque s'applique aux courbes transcendantes (« transcendental curves ») et non aux courbes exponentielles (dont l'équation contient une puissance dont l'exposant est variable, comme par exemple $y = a^x$) :

> The equations whereby the families of curves are defined, are not to be confounded with the transcendental ones: for though, with regard to the whole family, they be of an indeterminate degree, yet, with respect to each several curve of the family, they are determinate ; whereas transcendent equations are of an indefinite degree, with respect to the same curve.

Dans l'article EXPONENTIEL, (*Géomét. transcend.*) (t. VI, 1756, p. 311a–b) , D'Alembert indiquera que « les courbes exponentielles participent de la nature des algébriques & des transcendantes ; des premieres, parce qu'il n'entre dans leur équation que des quantités finies ; & des dernieres, parce qu'elles ne peuvent pas être représentées par une équation algébrique. » Mais il n'y a bien entendu pas identité entre courbes exponentielles et transcendantes. Ce faisant D'Alembert corrige donc, ou du moins actualise l'article de Chambers. En effet il faut noter ici que dans la première édition de la *Cyclopædia* (1728, t. I p. 369) les deux termes sont considérés comme plus ou moins synonymes :

> EXPONENTIAL *Equation* is that wherein there is an *Exponential* Quantity ; call'd also *Transcendental Equation*, and by some, a *Geometrical Irrational*.

Cette précision a disparu de la cinquième édition de 1741, mais l'équivalence des termes a pu persister dans l'article CURVE, nous invitant donc à lire *exponential* à la place de *transcendental*, comme l'a rétabli D'Alembert.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(9) Note ponctuelle sur « équation générale »

D'Alembert modifie ici le texte de l'article CURVE de Chambers, qui écrit incorrectement que « the equation for all algebraic *curves* will be $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$ ». Il s'emploie donc à donner l'équation d'une courbe algébrique d'ordre *m* sous la forme la plus générale possible, qui n'est pas simple à écrire, au contraire de Cramer ou Euler qui préfèrent donner in extenso les équations générales des courbes d'ordres 2, 3 et 4 en laissant le lecteur généraliser par induction.

Il y a néanmoins ici deux coquilles typographiques à relever : sur la première ligne le dernier terme de degré *m* devrait être fx^m, et sur la troisième ligne le terme qy^{m-2} devrait être précédé du symbole + (en non pas =).

Même sans ces erreurs, il n'est pas simple pour le lecteur d'imaginer ou d'induire, à partir de la forme donnée de cette équation, l'écriture de l'équation complète d'une courbe de degré *m* quelconque. Il faudrait ajouter des points de suspension à la fin des deuxième et troisième ligne, mais aussi sur une quatrième, et écrire le tout dernier terme de l'équation (terme constant) sur une cinquième ligne, par exemple.

S'appuyant sur le *triangle algébrique (*ou *analytique*) de De Gua, Cramer ajoute une précision sur le nombre de termes de l'équation générale d'une courbe d'ordre *n* qui, après division par le coefficient d'un des termes de plus haut degré, est égal à $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ (*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, p. 58), ce qui lui permet ensuite d'énoncer qu'une courbe d'ordre *n* est définie par la donnée de $\frac{n(n+3)}{2}$ points, les coefficients de l'équation pouvant, dans les cas favorables, être calculés par la résolution

simultanée de $\frac{n(n+3)}{2}$ équations à autant d'inconnues à l'aide de la méthode présentée en annexe de son traité, présentant des formules de résolution aujourd'hui connues comme les *règles de Cramer*. Cela lui permet également, en confrontant ce résultat simple avec celui qui dit que le nombre de points d'intersection de deux courbes d'ordres *m* et *n* est égal au produit $m \times n$, d'engager une réflexion intéressante sur un paradoxe apparent aujourd'hui connu comme *paradoxe de Cramer* : par exemple, deux courbes d'ordre 3 sont censées pouvoir se couper en $3 \times 3 = 9$ points, alors que la donnée de $\frac{3(3+3)}{2} = 9$ points devraient pouvoir définir une seule courbe d'ordre 3. Euler donnera une explication de ce paradoxe dans un mémoire intitulé « Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes » publié dans l'*Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin* pour 1748 [consulter (https://books.google.fr/books?id=kg0_AAAAYAAJ&hl=fr&pg=PA219#v=onepage&q=contradiction&f=false)].

Il est remarquable de noter ici que D'Alembert choisit de ne pas aborder les aspects les plus algébriques de l'œuvre de Cramer dans cet article, pas plus que dans le reste de l'*Encyclopédie* d'ailleurs, alors que ces résultats non dénués d'intérêt donneront lieu à des développements ultérieurs fructueux.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(10) : Notes sur la mention bibliographique « analyse démontrée »

Œuvre mentionnée : Charles Reyneau, *Analyse demontrée, ou la Methode de resoudre les problêmes des mathematiques, et d'apprendre facilement ces sciences*, 1ère éd., 1708 ; 2e éd., 1736-1738.

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

L'*Analyse démontrée* de Reyneau a joué un rôle important dans la formation mathématique du jeune D'Alembert, qui a justement consacré son tout premier mémoire à l'Académie des sciences de Paris, en 1739, à la correction d'erreurs contenues dans le second tome de cet ouvrage (Gilain, 2002). Dans l'article ANALYSE, (*Ordre encyclop. Entend. Raison. Philosoph. ou Science, Science de la Nature, Mathématiques pures, Arithmétique littérale, ou Algébre, Analyse.*) (t. I, 1751, p. 400b–401a) , il écrit à son propos:

> L'Analyse démontrée du P. Reyneau de l'Oratoire, imprimée pour la premiere fois à Paris en 1708, en 2 volumes in-4°. est un livre auquel ceux qui veulent étudier cette science ne peuvent se dispenser d'avoir recours. Quoiqu'il s'y soit glissé quelques erreurs, c'est cependant jusqu'à présent l'ouvrage le plus complet que nous ayons sur l'Analyse.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(11) Note ponctuelle sur « cette équation … insuffisante »

On a vu dans une note précédente que Chambers, dans l'article CURVE de la *Cyclopædia*, proposait lui aussi une équation erronée contenant seulement quatre termes.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(12) Note ponctuelle sur « meilleurs ouvrages »

Souilgnons ici, bien que cela soit explicitement écrit par D'Alembert dasn ce paragraphe, que la bibliographie qui suit ne porte pas uniquement sur l'entrée COURBE POLYGONE, mais sur toute la vedette d'adresse COURBE.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(13) : Note sur la mention bibliographique « enumeratio linearum tertii ordinis de M. Newton »

Œuvre mentionnée : Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, 1ère éd., 1704.

par Collectif projet ENCCRE, le 12 août 2019

(14) Note ponctuelle sur « d'où une … est tirée »

En effet, l'article COURBE, (*Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes.*) (t. IV, 1754, p. 377b–387a) – plus particulièrement les sections sur l'énumération des courbes du second genre, la description organique des courbes, la genèse des courbes par les ombres et l'usage des courbes pour la construction des équations – sont des traductions de parties de l'article CURVE de la *Cyclopædia* de Chambers, qui a lui-même puisé et traduit ces passages de l'*Enumeratio* de Newton.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(15) :
Note sur la mention bibliographique « l'ouvrage de M. Stirling »

Œuvre mentionnée : James Stirling, *Lineae tertii ordinis Neutonianae, sive, Illustratio tractatus D. Neutoni De enumeratione linearum tertii ordinis: cui subjungitur, solutio trium problematum*, 1ère éd., 1717.

par Collectif projet ENCCRE, le 10 août 2018

(16) :
Notes sur la mention bibliographique « Geometria organica de M. Maclaurin »

Œuvre mentionnée : Colin Maclaurin, *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis*, 1ère éd., 1720.

par Collectif projet ENCCRE, le 10 août 2018

Dans l'article DESCRIPTION, *terme de Géométrie* (t. IV, 1754, p. 878b), D'Alembert porte un regard nuancé sur l'ouvrage de l'Écossais :

> M. Maclaurin nous a même donné un savant ouvrage intitulé, *Geometria organica*, dans lequel il donne des moyens fort ingénieux de tracer ainsi plusieurs courbes. *Voyez*-en un leger essai à *l'article* COURBE. Mais toutes ces méthodes sont plus curieuses qu'utiles & commodes.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(17) :
Note sur la mention bibliographique « les usages de l'analyse de Descartes par M. l'abbé de Gua »

Œuvre mentionnée : Jean-Paul de Gua de Malves, *Usages de l'Analyse de Descartes Pour découvrir, sans le secours du Calcul Differentiel, les Proprietés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*, 1ère éd., 1740.

par Collectif projet ENCCRE, le 10 août 2018

(18) Note ponctuelle sur « mais qu'il … précaution »

Quand il en avait fait la recension pour le *Journal des sçavans* en 1740, à sa parution, D'Alembert avait déjà émis quelques réserves sur quelques points de détail sur l'ouvrage de l'abbé De Gua de Malves, pointant quelques erreurs de forme et demandant des éclaircissements sur certains passages (Jean Le Rond D'Alembert, 1740).

Mais il est apparu, quelques années après, que les *Usages de l'analyse de Descartes* de l'abbé De Gua étaient entachés d'erreurs plus profondes dues à un mauvais usage du calcul des séries, notamment pour l'étude des branches infinies et des points singuliers, l'ayant amené à nier formellement l'existence d'une sorte de points singuliers : les points de rebroussement de la seconde espèce, annoncés par L'Hôpital et Maupertuis. La réalité de ces points pour les courbes algébriques a d'abord été établie par Leonhard Euler (voir sa correspondance avec Gabriel Cramer en 1744), et ensuite - de manière indépendante - par D'Alembert dans ses *Recherches sur le calcul intégral* (Jean Le Rond D'Alembert, 1748) en 1746. Voir à ce sujet l'introduction de la *Correspondance générale 1741-1752* (Le Rond D'Alembert, 2015, p. lxxxix-xc).

De son côté, Gabriel Cramer écrit en préface de son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* : « je n'ai pas cru devoir le [De Gua de Malves] suivre dans la méprise où il est tombé sur les Branches infinies des Courbes & sur leurs Points multiples, pour avoir négligé l'usage des Séries infinies, ou

pour avoir voulu juger d'une Série entiére par son seul premier terme » (p.xi).

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(19) :
Note sur la mention bibliographique « l'introduction / à l'analyse des lignes courbes, par M. Cramer »

Œuvre mentionnée : Gabriel Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1ère éd., 1750.

par Collectif projet ENCCRE, le 10 août 2018

(20) Note ponctuelle sur « ouvrage ... nouvelles »

Dans les lettres échangées avec Gabriel Cramer à la suite de la parution de son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* à Genève en 1750, D'Alembert, après lui avoir demandé de nombreux éclaircissements et discuté quelques questions épineuses, avait dit à son correspondant genevois tout le bien qu'il pensait de son ouvrage. Il écrit ainsi, le 5 janvier 1751 :

> A l'egard de votre ouvrage sur les courbes je persiste toujours dans l'idée que j'en ay, et je viens d'ajouter à l'article courbe de l'Encyclopedie le jugement que j'en porte (Le Rond D'Alembert, 2015 , p. 313).

Cette appréciation élogieuse fait que l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* est citée comme référence dans une dizaine d'articles liés aux courbes algébriques : ASYMPTOTE, *terme de Géométrie* (t. I, 1751, p. 795a–796b) , AXE, (*Méchanique.*) (t. I, 1751, p. 904a–906a) , BRANCHE *de courbe*, (*terme de Géométrie*) (t. II, 1752, p. 395a–b) , CENTRE, (*Géométrie.*) (t. II, 1752, p. 824a) , COURBURE, (*Géom.*) (t. IV, 1754, p. 390a–b) , *MAXIMUM* ou *plus grand*, *en Mathématiques*, (*Géog.*) (t. X, 1765, p. 215b–217a) , PARALLÉLOGRAMME, *en Géométrie* (t. XI, 1765, p. 911a–912b) , POINT DOUBLE, TRIPLE, QUADRUPLE, *&c.* ou en général *point multiple* (t. XII, 1765, p. 871b–872a) , REBROUSSEMENT, (*Géometrie.*) (t. XIII, 1765, p. 842a–b) , SERPENTEMENT, (*Géom.*) (t. XV, 1765, p. 112a–b) et TRIDENT, (*Géom.*) (t. XVI, 1765, p. 637b) .

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(21) :
Notes sur la mention bibliographique « l'ouvrage de M. Euler, qui a pour titre, introductio in analys. infinitorum, Lausan. 1748 »

Œuvre mentionnée : Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 1ère éd., 1748.

par Collectif projet ENCCRE, le 10 août 2018

L'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Cramer et l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler resteront les deux ouvrages de référence sur les courbes pendant toute la seconde partie du XVIIIe siècle et une bonne partie du XIXe. Le regard assez critique de D'Alembert sur ce texte d'Euler s'exprime dans sa correspondance avec le savant bâlois dès réception et lecture de son ouvrage, où il exprime des désaccords sur la démonstration de la factorisation des polynômes et sur les points de rebroussement des courbes algébriques ; voir la lettre de D'Alembert à Euler datée du 7 septembre 1748 (Le Rond D'Alembert, 2015 , p. 161-170). Il s'en ouvre à Gabriel Cramer dans une lettre, datée du 5 décembre 1748 , où l'on sent bien toute la réserve qu'il porte sur cet ouvrage, notamment sur la question des points de rebroussement (« un brouillamini épouvantable »), qui aboutira à une revendication de priorité de D'Alembert.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(22) :
Note sur la mention bibliographique « l'application de l'Algebre à la Géométrie, de M. Guisnée »

Œuvre mentionnée : Nicolas Guisnée, *Application de l'algebre a la geometrie, ou Methode de démontrer, par l'algebre, les theorêmes de geometrie, & d'en résoudre & construire tous les problêmes*, 1ère éd., 1705.

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

(23) Note ponctuelle sur « équation »

Il y a dans l'écriture de cette équation une coquille typographique : le dernier terme de cette somme devrait être Dx^3 (et non Dx^2 comme écrit ici).

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(24) Note ponctuelle sur « passera … donnés »

Cette méthode d'approximation, que l'on appelle aussi *interpolation*, est reprise (avec quatre points seulement) par D'Alembert à la fin de l'article SERIE *ou* SUITE, *en Algebre* (t. XV, 1765, p. 93b–96a) dans la section *Interpolation des* séries *ou* suites.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(25) Note ponctuelle sur « l'un avec l'autre »

Lire « l'une avec l'autre ».

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(26) Note ponctuelle sur « il ne faut … article »

Ce paragraphe est le prolongement d'une remarque faite au début de l'article COURBE, (*Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes.*) (t. IV, 1754, p. 377b–387a) , dans lequel D'Alembert écrivait : « Il ne s'agit point ici, comme on peut bien le croire, des lignes courbes que l'on peut tracer au hasard & irrégulierement sur un papier. Ces lignes n'ayant d'autre loi que la main qui les forme, ne peuvent être l'objet de la Géométrie ; elles peuvent l'être seulement de l'art d'écrire. Un géometre moderne a pourtant crû que l'on pouvoit toûjours déterminer la nature d'une courbe tracée sur le papier ; mais il s'est trompé en cela ». Ce « géomètre moderne » est probablement Leonhard Euler, comme nous l'avons déjà écrit dans la note associée à ce passage. D'Alembert ajoutait alors à son affirmation sur l'erreur d'Euler : Nous en donnerons plus bas la preuve. On peut penser qu'il renvoyait au présent passage de l'article Courbe polygone. Cependant, il faut noter que ce qu'il présente ici ne constitue pas la preuve promise et que D'Alembert se contente d'une phrase caricaturant la position d'Euler.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(27) Note ponctuelle sur « équarrer »

Le verbe « équarrer » est très peu usité en mathématiques, et son usage par D'Alembert ici est surprenant. Dans le *Dictionnaire de Trévoux*, tome deuxième de l'édition de 1743, on trouve l'entrée ÉQUARRIR : « Plusieurs disent aussi ÉQUARRER, v. actif. Tailler un corps solide à angles droits. *Quadrare, efformare in quadrum. Équarrrir* une pierre, une poutre ». On s'attend plutôt à trouver ici le verbe « quarrer », qui signifie réaliser la quadrature, c'est-à-dire , comme écrit dans l'article QUADRATURE, *terme de Géométrie* (t. XIII, 1765, p. 639a–b).

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(28) Note ponctuelle sur « approximation »

L'interpolation n'est pas la seule méthode permettant de calculer de manière approchée la quadrature d'une courbe. Une autre stratégie consiste à calculer un développement en série (ou *suite infinie*) convergente, qui permet d'approcher la courbe initiale, chaque terme de la série étant ensuite facilement intégrable.

D'Alembert écrit ainsi, dans l'article SERIE *ou* SUITE, *en Algebre* (t. XV, 1765, p. 93b–96a) :

> On fait usage des suites principalement pour la quadrature des courbes, parce que cette quadrature dépend souvent de l'expression de certaines quantités qui ne peuvent être représentées par aucun nombre précis & déterminé ; tel est le rapport du diametre d'un cercle à sa circonférence, & c'est un très-grand avantage de pouvoir exprimer ces quantités par une suite, laquelle, étant continuée à l'infini, exprime la valeur de la quantité requise.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(29) :
Note sur le renvoi à « Methode differentielle »

Cette « méthode différentielle » dont il est question ici, qui permet de réaliser une interpolation dite newtonienne, est aujourd'hui plus connue sous la désignation de *méthode des différences divisées*, qui est effectivement décrite par Newton dans son *Methodus differentialis*, le dernier texte d'un recueil édité par William Jones en 1711 sous le titre *Analysis Per Quantitatum*.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(30) :
Note sur la mention bibliographique « traité de ces courbes à double courbure »

Œuvre mentionnée : Alexis Claude Clairaut, *Recherches sur les courbes a double courbure*, 1ère éd., 1731.

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

(31) Note ponctuelle sur « double courbure »

Clairaut, dans la préface de *Recherches sur les courbes a double courbure*, explique qu'il a choisi de nommer ainsi les courbes tracées sur des solides dans l'espace, « parcequ'en les considerant de la façon qu'on vient de dire elles participent pour ainsi dire toujours de la courbure de deux courbes [les courbes de projection] ». Comme le rappelle Clairaut quelques lignes plus haut dans cette préface, Descartes avait déjà évoqué ce type de courbes près d'un siècle plus tôt à la toute fin du livre second de *La Géométrie* (p. 368-369). Mais l'expression « courbe à double courbure » elle-même apparaît pour la première fois sous la plume de Henri Pitot dans un mémoire intitulé « Quadrature de la moitié d'une courbe des arcs, appellée la compagne de la cycloïde » publié dans mes Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris pour l'année 1724, p. 107-113 [consulter (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3525w/f225.item)].

Aujourd'hui, on utilise plutôt l'expression « courbes gauches » pour désigner ces courbes non planes. Sur l'histoire des courbes gauches, voir (Delcourt, 2011).

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(32) Note ponctuelle sur « variable commune »

Remarquons que Clairaut précise qu'il n'est pas question de pouvoir réduire ces deux équations à une seule équation à trois inconnues, qui décrit une surface.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(33) Note ponctuelle sur « regles connues »

Ces « regles connues » sont celles de ce que l'on appelle aujourd'hui la théorie de l'élimination, mais que l'on désignait alors par l'expression *évanoüissement des inconnues* ; voir les articles ELIMINER, (*Algebre.*) (t. V, 1755, p. 508b) et, surtout, EVANOUIR, (*Algebre.*) (t. VI, 1756, p. 119a–121a).

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(34) Note ponctuelle sur « surface »

Il existe un article SURFACE, *en Géométrie* (t. XV, 1765, p. 688b–689a), très court et très général, rédigé par La Chapelle, mais qui ne rentre pas dans le détail de ce qui est exposé ici par D'Alembert.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(35) Note ponctuelle sur « M. Descartes … variables »

Cette affirmation de D'Alembert, si elle n'est pas tout à fait fausse, paraît exagérément affirmative. Dans le livre second de *La Géométrie* de Descartes, on trouve en effet ces quelques lignes, sans plus de détails (p. 335) :

> Et s'il manque deux conditions a la determination de ce point, le lieu ou il se trouve est une superficie, laquelle peut estre tout de mesme ou plate, ou spherique, ou plus composée.

Boyer, dans son *History of analytic geometry*, indique que la première occurrence de l'équation analytique d'une surface avec trois variables se trouvera quelque quarante ans après, en 1679, sous la plume de Lahire (Boyer, 2004, p. 121).

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(36) Note ponctuelle sur « condition … Fontaine »

La condition évoquée par D'Alembert est la suivante :

$$\frac{d\beta}{dx} + \alpha\frac{d\beta}{dz} = \frac{d\alpha}{dy} + \beta\frac{d\alpha}{dz}.$$

Ce résultat n'a été publié qu'en 1764, dans les *Mémoires donnés à l'Académie royale des sciences, non imprimés dans leur temps par M. Fontaine, de cette Académie*, dans un mémoire intitulé « Le calcul des Équations aux premières différences » [problème III, p. 36] (https://books.google.fr/books?id=EfxkAAAAcAAJ&hl=fr&pg=PA36#v=onepage&q&f=false). Mais il est connu de Clairaut dès 1740, qui le donne sous une forme améliorée dans un mémoire intitulé « Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre » publié dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences* pour l'année 1740 (1742, p. 310) [consulter] (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5510983v/f454.item), indiquant en note de bas de page que « M. Fontaine avoit déjà donné cette Équation ».

Sur la volonté de D'Alembert d'attribuer ce théorème à Fontaine en effaçant le rôle de Clairaut, voir sa lettre à Maupertuis du 16 novembre 1750 (Le Rond D'Alembert, 2015, p. 302-303).

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(37) :
Note sur la mention bibliographique « mémoires de l'académie de Petersbourg, tome III. »

Œuvre mentionnée : Leonhard Euler, « De linea brevissima in superficie quacunque duo quælibet punta jungente », *Commentarii Academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ*, 1728 (1732) , p. 110-124 [consulter (https://www.biodiversitylibrary.org/item/38524#page/128/mode/2up)]

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

(38) Note ponctuelle sur « la ligne … courte »

Aujourd'hui, on donne le nom de *géodésique* à cette « ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur une surface courbe entre deux points donnés », mais cette acception de l'adjectif substantivé est récente et l'article GÉODÉSIQUE, (*Géométrie prat.*) (t. VII, 1757, p. 608a) montre que le terme n'est pas encore utilisé dans ce sens au milieu du XVIIIe siècle.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(39) :
Note sur la mention bibliographique « œuvres de Bernoulli, tome IV. page 108 »

Œuvre mentionnée : Jean Bernoulli, *In superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissimam*, 1ère éd., 1742.

par Collectif projet ENCCRE, le 28 févr. 2021

(40) Note ponctuelle sur « Voyez les … & 1733 »

Voir notamment le mémoire de Clairaut intitulé « Détermination géométrique de la perpendiculaire à la Méridienne tracée par M. Cassini » dans les *Mémoires de l'académie* pour l'année 1733 (Alexis-Claude Clairaut, 1735), dont une suite est donnée en 1739 [consulter (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3536g/f183)].

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(41) Note ponctuelle sur « par exemple »

Cette équation qui permet de calculer la longueur d'un arc de cercle intervient, par exemple, dans le calcul de la quadrature de l'espace cycloïdal, c'est-à-dire dans le calcul de l'aire située entre une arche de cycloïde et l'axe des abscisses ; voir l'article CYCLOIDAL, (*Géomet.*) (t. IV, 1754, p. 590a) .

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(42) : Note sur la mention bibliographique « l'application de l'Algebre à la géométrie de M. Guisnée »

Œuvre mentionnée : Nicolas Guisnée, *Application de l'algebre a la geometrie, ou Methode de démontrer, par l'algebre, les theorêmes de geometrie, & d'en résoudre & construire tous les problêmes*, 1ère éd., 1705.

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

(43) : Note sur la mention bibliographique « l'analyse des infiniment petits de M. de l'Hopital »

Œuvre mentionnée : Guillaume François Antoine marquis de L'Hôpital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, 1ère éd., 1696.

par Collectif projet ENCCRE, le 11 août 2018

(44) Note ponctuelle sur « construction … différentielles »

On retrouve ce sujet exposé de manière très proche dans le second volume du *Traité du calcul intégral* de Bougainville, notamment dans le troisième chapitre de la première section, intitulé « De la construction des équations différentielles dans lesquelles les indéterminées sont séparées » (p. 38-40), ouvrage dans lequel la contribution de D'Alembert est particulièrement importante, et dont il recommande la lecture dans les articles EQUATION DIFFÉRENTIELLE (t. IV, 1754, p. 988a–989b) et CALCUL DIFFÉRENTIEL (t. IV, 1754, p. 985a–988a) contenus dans le même volume, ainsi que dans l'article INTÉGRAL, (*Math. trans.*) (t. VIII, 1765, p. 805a–b) du volume VIII. Voir le dossier critique pour davantage d'informations sur ce sujet.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021

(45) : Note sur la signature « (O) »

La marque (*O*) est celle de D'Alembert. Cette correspondance est explicitée dans :

- Avertissement – (vol. I)
- Noms des auteurs, avec la marque de leurs articles – (vol. II)
- Marque des Auteurs – (vol. III)
- Nom des Auteurs – (vol. VI)
- Marque des Auteurs – (vol. VII)

par Collectif projet ENCCRE, le 16 mai 2016

Dossier critique

avec la collaboration de Christian Gilain

D'Alembert, qui signe cet article, choisit de couper la traduction de l'article CURVE de la *Cyclopædia* de Chambers entamée dans l'article COURBE, (*Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes.*) (t. IV, 1754, p. 377b–387a) qui le précède immédiatement pour introduire, au moyen d'une vedette d'entrée, la notion de courbe polygone (sur deux paragraphes seulement), avant de reprendre le cours de sa traduction, puis de proposer quelques prolongements originaux sur les interpolations, les courbes à double courbure et les surfaces courbes.

Ce choix est étonnant, puisqu'il marque une rupture nette dans le déroulé de l'article COURBE, alors qu'il aurait sans doute été possible d'y introduire les courbes polygones au moyen d'une simple section, avant de poursuivre la traduction de l'article de Chambers. Témoin de cette rupture, par exemple, la bibliographie présentée dans la paragraphe 14, qui est proposée par D'Alembert et ne se trouve pas dans la *Cyclopædia*, vient manifestement lister des références en appui des développements de l'article COURBE et concerne effectivement les courbes dans leur ensemble, pas uniquement les courbes polygones ni même les courbes mécaniques. Ce choix éditorial sera questionné dans ce dossier critique, mais les deux articles peuvent et doivent être lus ensemble, afin de percevoir leur continuité et leur cohérence globale.

Auteur et rédaction

Cet article est signé par D'Alembert, ce qui permet également de l'identifier formellement comme auteur de l'article COURBE qui le précède immédiatement, en vertu du nota bene de l'*Avertissement* du premier volume :

> Lorsque plusieurs articles appartenant à la même matiere, & par conséquent faits ou revûs par la même personne, sont immédiatement consécutifs, on s'est contenté quelquefois de mettre la lettre distinctive à la fin du dernier de ces articles.

Il y a donc tout lieu de penser que la rédaction de cette entrée COURBE POLYGONE date elle aussi de la fin de l'année 1750 au plus tard (voir dossier critique de l'article COURBE).

Plan de l'article

L'article commence par deux paragraphes originaux, les seuls concernant directement la notion de courbe polygone, qui renvoie à une conception leibnizienne des courbes. Dans les paragraphes 3 à 13, D'Alembert reprend et poursuit la traduction de l'article Curve de la *Cyclopædia* de Chambers entamée dans l'article COURBE, avant de donner au lecteur la liste des « meilleurs ouvrages dans lesquels on puisse s'instruire de la théorie des courbes » (§ 14). Enfin, après quelques considérations sur les courbes mécaniques et l'interpolation d'une courbe irrégulière ou mécanique par une courbe parabolique (§ 15-18), l'article se poursuit en proposant quelques développements nouveaux sur les courbes à double courbure (§ 19-21) et les surfaces courbes (§ 22-23), avant de se conclure sur une section concernant la construction des équations différentielles par le moyen des quadratures de courbes. Plus précisément, voici le plan de l'article suivant les numéros de paragraphes :

- 1-2 : courbe **polygone**, usages en mécanique ;
- 3 : **rectification** d'une courbe ;
- 4 : **inflexion** d'une courbe (simple renvoi) ;
- 5 : **quadrature** d'une courbe ;
- 6-11 : **famille** de courbes, courbes exponentielles, **équation générale** d'une courbe algébrique ;
- 12-13 : courbes **caustiques** et **diacaustiques** (simples renvois) ;
- 14 : ouvrages recommandés pour l'étude de la théorie des courbes ;

- 15-16 : **courbes mécaniques** particulières, principes généraux ;
- 17-18 : approximation d'une courbe quelconque par **interpolation** par une courbe parabolique ;
- 19-21 : courbes **à double courbure**, projections, tangentes ;
- 22-23 : **surfaces courbes** géométriques et mécaniques, équations, ligne la plus courte tracée sur une surface entre deux points donnés ;
- 24-27 : **construction des équations différentielles** par les quadratures.

Sources et références bibliographiques

Voici la représentation illustrant la répartition entre contenus issus de la traduction de la *Cyclopædia* et contenus originaux produits par D'Alembert, complétant ainsi celle donnée dans le dossier critique de l'article COURBE, (*Ordre encycl. Entend. Raison, Science, Science de la Nat. Science des quantités abstr. Science de l'étendue, Géométrie, Géométrie des lignes courbes.*) (t. IV, 1754, p. 377b–387a) :

1	7	13	19	25
2	8	14	20	26
3	9	15	21	27
4	10	16	22	
5	11	17	23	
6	12	18	24	

Ajouts (en vert) et modifications (en jaune) apportés par D'Alembert à l'article de Chambers

L'avertissement initial sur l'usage en mécanique des courbes polygones pour le calcul des forces centrales (§ 2) provient de son propre *Traité de dynamique*. Dans le paragraphe 14 sont indiqués les ouvrages récents à consulter sur la théorie des courbes en général, et celle des courbes algébriques en particulier, notamment les *Usages de l'analyse de Descartes* de l'abbé De Gua, sur lequel il émet des réserves, l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler et l'*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de Cramer, tous trois parus dans la décennie précédant la rédaction de cet article, et qu'il mobilise régulièrement comme sources de ses articles encyclopédiques sur les courbes (on se reportera au dossier critique de l'article COURBE pour plus d'informations sur ces trois ouvrages). On peut remarquer que, bien qu'abondamment cités dans l'article COURBE, aucun de ces ouvrages n'est mentionné dans le reste de l'article COURBE POLYGONE, et qu'il choisit même d'ignorer ici des développements algébriques intéressants proposés par Gabriel Cramer ou Leonhard Euler dans leurs travaux, qui auraient pu y trouver place, ne fût-ce qu'au travers de quelques mentions (voir notes).

L'*Application de l'algebre a la geometrie* de Nicolas Guisnée est citée à deux reprises sur le sujet des courbes mécaniques. Cet ouvrage dont la première édition est parue en 1705 est bien connu de D'Alembert, puisqu'il fait partie des livres dans lesquels il s'est formé aux mathématiques. Il a même rédigé en 1736 un manuscrit intitulé « Remarques & éclaircissemens sur différens endroits de l'application de l'algèbre à la géomètrie de M . de Guisnée » qui témoigne d'une lecture approfondie de l'ouvrage par le jeune étudiant tout juste sorti du collège Mazarin (Peiffer, 2005, p. 128-129). La section XII de cet ouvrage est intitulée « Des Courbes méchaniques, ou transcendentes, de leur description, & des Problèmes qu'on peut construire par leur moyen » qui, se faisant l'écho de l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hôpital, traite des courbes mécaniques et de leur construction au moyen de la quadrature des courbes, qui est le sujet de la dernière section de l'article.

Enfin, pour la rédaction des paragraphes 19 à 23 relatifs aux courbes à double courbure et aux surfaces courbes, D'Alembert s'appuie sur Clairaut et ses *Recherches sur les courbes a double courbure*, paru en 1731, quelque vingt ans avant la rédaction de cet article. C'est le premier ouvrage publié par Clairaut, écrit à l'âge remarquablement précoce de 16 ans (il est examiné pour l'Académie royale des sciences de Paris par Dortous de Mairan et François Nicole lors de l'été 1729, mais Clairaut a déjà présenté ses travaux à l'Académie l'année précédente). Mentionné dans le *Livre de dépense et recette* des libraires, il a probablement contribué à la traduction des articles de la *Cyclopædia* au tout début du projet encyclopédique, sous la direction de De Gua de Malves. Il est intéressant de noter ici que les relations entre D'Alembert et Clairaut sont réputées pour le moins difficiles après 1750 - donc au moment de la rédaction de cet article - leur dégradation survenant après les polémiques et disputes ayant marqué la fin des années 1740 à propos de la théorie du mouvement de la Lune (voir *Correspondance 1741-1752*, p. cxxxii) . L'ouvrage de Clairaut restera longtemps l'unique référence sur le sujet des courbes à double courbure, qui ne connaîtra pas

d'évolution notable avant les années 1770 (voir plus bas).

Enjeux de l'article

Cette entrée COURBE POLYGONE n'est pas présente dans la *Cyclopædia* de Chambers : elle vient s'insérer dans le cours de la traduction de l'article CURVE, entre une section sur l'usage des courbes algébriques pour la construction des équations, et une série de paragraphes ou de renvois concernant l'utilisation du calcul différentiel pour l'étude des courbes (rectification, inflexion, quadrature, etc.). D'Alembert marque ainsi une rupture dans cette traduction, qui peut être jugée surprenante pour la cohérence de l'ensemble, mais qui lui permet d'actualiser et d'enrichir les contenus de l'article CURVE de la *Cyclopædia* en y insérant des passages originaux liés aux usages des courbes et des surfaces dans ses recherches physico-mathématiques (comme, par exemple, la dynamique).

Des courbes vues comme polygones infinitangles

La notion de courbe polygone trouve son origine dans le calcul différentiel leibnizien dès la fin du XVIIIe siècle, et est popularisée en France par Guillaume de L'Hôpital dans son *Analyse des infiniment petits*, cette vision de la courbe comme polygone infinitangle permettant, en particulier, d'en déterminer facilement la courbure ou les tangentes, comme exposé dès la seconde page de la préface de son ouvrage (que l'on attribue généralement à Fontenelle) :

> Car les courbes n'étant que des polygones d'une infinité de côtés, & ne différant entr'elles que par la différence des angles que ces côtés infiniment petits font entr'eux ; il n'appartient qu'à l'Analyse des infiniment petits de déterminer la position de ces côtés pour avoir la courbure qu'ils forment, c'est-à-dire les tangentes de ces courbes, leurs perpendiculaires, leurs points d'infléxion ou de rebroussement, les rayons qui s'y réfléchissent, ceux qui s'y rompent, &c.

Dans l'*Application de l'algebre a la geometrie* de Guisnée, cité dans cet article, il est précisé : « Il y a même des Courbes méchaniques dont on ne connoît que certaines proprietez, d'où l'on ne peut tirer d'équations en termes finis. Il faut alors avoir recours à l'infini, en regardant les Courbes comme des Polygones d'une infinité de côtez » (p. 234). Dans les *Recherches sur les courbes a double courbure* de Clairaut, la section 2 relative à l'usage du calcul différentiel pour le calcul des tangentes débute par ce rappel : « On conçoit ici une courbe à double courbure AN, comme composée d'une infinité de petits côtez Nn, de même qu'une courbe qui seroit décrite sur un plan » (p. 40).

D'Alembert introduit donc cette entrée pour présenter cette notion bien implantée dans les travaux des géomètres français du début du XVIIIe siècle, fortement liée au calcul des infiniment petits, et utile à l'étude des courbes mécaniques. D'Alembert ne s'inscrit pas dans cette tradition des infiniment petits, mais plutôt dans la tradition newtonienne en ce qui concerne le calcul différentiel et intégral. Pour preuve, il ne reprend pas la deuxième « demande ou supposition » de L'Hôpital dans son *Analyse des infiniment petits* selon laquelle une ligne courbe peut être considérée « comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit » (p. 3). Au contraire, pour être rigoureux, D'Alembert donne de cette notion, dans les deux premiers paragraphes de cet article, une interprétation en termes de limite de polygones finis, en insistant sur la différence entre courbe rigoureuse et courbe polygone. Il renouvelle ainsi l'avertissement déjà adressé au lecteur de son *Traité de dynamique*, qu'il réitère dans les articles CALCUL DIFFÉRENTIEL (t. IV, 1754, p. 985a–988a), CENTRAL, (*Méchanique.*) (t. II, 1752, p. 822a–824a), FORCES ACCÉLÉRATRICES (t. VII, 1757, p. 116b–118b) et FORCES CENTRALES & CENTRIFUGES (t. VII, 1757, p. 118b–120a) . Il s'agit de faire attention à la différence entre la courbe elle-même, décrivant la trajectoire d'un mobile, et son approximation polygonale, dans les calculs d'évaluation des forces centrales :

> Il faut, au reste, bien prendre garde à cette distinction des Courbes polygones et des Courbes rigoureuses, dans l'estimation des effets des forces accélératrices & dans la comparaison de ces effets entr'eux. Si un des effets est calculé dans l'hypothese de la Courbe rigoureuse, il faut calculer l'autre dans la même hypothese ; autrement on courroit risque de faire le rapport des forces, c'est-à-dire de leurs effets, double de ce qu'il est réellement. *Voyez l'Hist. de l'Acad. de 1722.* (*Traité de dynamique*, p. 21-22)

Cette « attention nécessaire » avait manqué à Varignon qui a commis cette erreur dans un mémoire écrit en 1701 mais publié bien plus tard (Pierre Varignon, 1704), dans un calcul d'estimation des forces utilisant en même temps deux approximations de courbes, la première étant une ligne polygonale, la seconde un

cercle osculateur, erreur qu'il corrigera quelques années plus tard. Le texte de l'*Histoire de l'Académie royale des sciences de Paris* pour 1722, cité en fin de paragraphe aux côtés du *Traité de dynamique* de D'Alembert, intitulé « Sur les courbes considérées exactement comme courbes, ou comme poligones infinis » ([Fontenelle], 1724), contient le résumé d'un mémoire de Varignon dans lequel ce dernier répond à une polémique engagée par le mathématicien italien Guido Grandi à ce sujet, prétexte à rappeler la prudence à adopter dans les calculs lorsque l'on considère tantôt la courbe polygone, tantôt la courbe rigoureuse ; sur les positions de Varignon et de D'Alembert sur le sujet, voir (Schmit, 2011).

Les courbes mécaniques et la construction des équations différentielles

Cette entrée COURBE POLYGONE permet donc à D'Alembert d'en corriger et préciser la définition (comme limite de polygones finis), et de mettre en garde contre des interprétations ou applications fautives en mécanique. Il est possible de penser qu'elle lui permet aussi d'introduire plus naturellement des paragraphes ou des renvois vers des articles de l'*Encyclopédie* concernant les courbes mécaniques et l'usage nécessaire du calcul différentiel et intégral pour leur étude : LIMITE, (*Mathémat.*) (t. IX, 1765, p. 542a–b), DIFFÉRENTIEL, *Géométrie* (t. IV, 1754, p. 985a), RECTIFICATION, *terme de Géométrie* (t. XIII, 1765, p. 867a–b), INFLEXION, *en Optique* (t. VIII, 1765, p. 728a–b), QUADRATURE, *terme de Géométrie* (t. XIII, 1765, p. 639a–b), CAUSTIQUE, *dans la Géométrie transcendante* (t. II, 1752, p. 792a–b), CYCLOIDE, *en Géomét.* (t. IV, 1754, p. 590a–592a), LOGARITMIQUE, (*Géométrie.*) (t. IX, 1765, p. 633a–634a), MÉCHANIQUE, (*Mathém.*) (t. X, 1765, p. 224a–126 [226]b), etc.

La dernière section, intitulée *Des courbes méchaniques, & de leur usage pour la construction des équations différentielles,* vient clore cette entrée COURBE POLYGONE de manière symétrique à la fin de l'article COURBE qui, traitant essentiellement des courbes algébriques, se concluait par une section *Usage des courbes pour la construction des équations.* Elle donne quelques éléments sur la construction point par point de courbes mécaniques, définies par une équation différentielle (dans le cas favorable où les variables sont séparables), par un procédé de résolution graphique impliquant la réalisation manuelle de quadratures. D'Alembert s'en fera à nouveau l'écho dans l'article GÉOMÉTRIE, (*Ordre encycl. Entend. Rais. Philosoph. ou Science, Science de la Nat. Mathémath. Mathémath. pures, Géométrie.*) (t. VII, 1757, p. 629a–638a) dans lequel il livre « quelques réflexions qui pourront n'être pas inutiles, sur la maniere de traiter les *élémens de Géométrie* » et y fait la proposition d'inclure ce sujet dans une section sur la géométrie transcendante :

> Ensuite, après avoir donné les principes généraux de la construction des courbes méchaniques, au moyen de leur équation différentielle & de la quadrature des courbes (voyez CONSTRUCTION), on entrera dans le détail des principales & & des plus connues, de la *spirale*, de la *quadratrice*, de la *cycloïde*, de la *trochoïde*, &c. *Voyez ces mots*.

Cette méthode de construction, courante dans la première partie du XVIIIe siècle, présente néanmoins des inconvénients. Dès la fin du XVIIe siècle, Jean Bernoulli, dans une lettre à l'Hospital de fin décembre 1694 (*Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, vol. 1, Basel : Birkhäuser, 1955, p. 249), avait indiqué qu'elle était difficile à mettre en œuvre, voire « impraticable » :

> Outre cela on construit par là avec une egale facilité toutes les equations differentielles, sans employer aucune rectification ni quadrature, au lieu que la methode ordinaire aprés avoir surmonté la plus grande difficulté, qui est de separer les indeterminées (ce qui est pourtant le plus souvent impossible) demande encore une rectification ou quadrature, ce qui rend la pratique pour ainsi dire impratiquable.

Nécessitant des réalisations de quadratures graphiques qui, dans la seconde partie du XVIIIe siècle, sont jugées insuffisamment performantes et rapides, cette méthode sera progressivement abandonnée au profit d'autres méthodes de résolution graphique des équations différentielles, notamment celles dites « polygonales » (dont la technique connue aujourd'hui sous le nom de « méthode d'Euler », formalisée de manièrement purement analytique par Euler à la fin des années 1760, est une illustration). Voir (Tournès, 2003) pour plus d'informations sur ce sujet.

Une nouvelle dimension dans l'étude des courbes

Dans cette entrée COURBE POLYGONE, la principale nouveauté introduite par D'Alembert par rapport à l'article CURVE de la *Cyclopædia* de Chambers, qu'il achève de traduire, est la prise en compte de ce que l'on appelle aujourd'hui la troisième dimension spatiale, en faisant état des travaux assez récents sur les

courbes non planes (alors désignées comme *courbes à double courbure*) et les surfaces sur lesquelles ces courbes s'inscrivent.

Le sujet des courbes à double courbure est succinctement présenté : D'Alembert se contente de les définir dans les paragraphes 19 et 20, puis d'évoquer la recherche de leurs tangentes dans le paragraphe 21, en invitant le lecteur à se référer aux *Recherches sur les courbes a double courbure* de Clairaut. Il faut dire que ce champ de recherche est encore peu défriché au milieu du XVIIIe siècle : les principales évolutions prolongeant et complétant les travaux de Clairaut ne viendront que dans les années 1770, avec Euler et Monge. À ce sujet, voir (Delcourt, 2011).

À propos des surfaces courbes et leurs équations (paragraphe 22), remarquons que l'on trouve également à la toute fin de la première section des *Recherches sur les courbes a double courbure* de Clairaut (p. 35-39) quelques pages sur le sujet, dans lesquelles ce dernier examine les surfaces en considérant les équations de leurs sections par des plans perpendiculaires aux axes. En revanche D'Alembert omet remarquablement de citer Leonhard Euler qui a livré en 1748, dans le second volume de son *Introductio in analysin infinitorum* une étude analytique des surfaces qui, selon Boyer, « est peut-être la contribution la plus originale d'Euler à la géométrie cartésienne, car elle représente en un sens la première présentation didactique de géométrie algébrique en trois dimensions » (Boyer, 2004, p. 188, traduit par nous). La paucité des références à l'œuvre d'Euler dans les articles de l'Encyclopédie relatifs aux courbes et aux surfaces trouve sans doute son origine dans la brouille qui oppose les deux hommes dès 1750 suite au report du prix de l'Académie de Berlin sur les fluides.

Le paragraphe 23 invite à examiner deux problèmes particuliers liés aux surfaces courbes. Le premier, à propos de la définition des surfaces courbes mécaniques (définies par une équation différentielle), montre l'intérêt de D'Alembert pour la question de l'intégration des équations aux différences partielles qu'il a abordée dans le cadre de ses recherches en mécanique et hydrodynamique (voir Guilbaud et Jouve, 2009). Le second, à propos de la ligne de plus courte distance entre deux points donnés sur une surface courbe (plus particulièrement la sphère), renvoie finalement aux questions liées à la figure de la Terre et aux opérations géodésiques. Cette section sur les surfaces courbes est donc révélatrice de la volonté de D'Alembert de faire entrer dans l'article COURBE, via cette entrée COURBE POLYGONE, des éléments relatifs à ses centres d'intérêt physico-mathématiques au sein d'un article qui, dans la version originale de la *Cyclopædia*, était essentiellement géométrique.

Correspondances internes à l'*Encyclopédie*

Seuls trois articles, tous signés de D'Alembert, renvoient à la vedette d'entrée COURBE POLYGONE : l'article COURBE lui-même, quelques pages avant : « [...] ce qu'on appelle proprement courbe, & qu'on peut regarder comme l'assemblage d'une infinité de petites lignes droites contigues entr'elles à angles infiniment obtus. Voyez plus bas COURBE POLYGONE » ; l'article FORCES ACCÉLÉRATRICES (t. VII, 1757, p. 116b–118b) dont il a été question ci-dessus ; et enfin l'article DIACAUSTIQUE, (*Optique & Géomét.*) (t. IV, 1754, p. 929a) , sous une variante au pluriel : « Voyez RÉFRACTION & COURBES POLYGONES ».

Suites et métamorphoses de l'*Encyclopédie*

La définition d'une courbe polygone, donnée dans le paragraphe 1, est reprise telle quelle dans le *Grand Vocabulaire françois* (t. VII, p. 154) - tout comme les définitions de rectification et de quadrature d'une courbe, ainsi que celle d'une famille de courbes, issues de Chambers. L'entrée est également reprise à l'identique dans l'édition de Lucques (*Encyclopédie, édition de Lucques* t. IV p. 321-323) et dans la *Méthodique* (*Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, t. 1, p. 462-465)

Dans l'*Encyclopédie d'Yverdon*, l'entrée COURBE POLYGONE (t. XII, p. 124-130), par rapport au texte original de D'Alembert dans l'Encyclopédie, est augmentée de deux pages entières (p. 125-127) sur l'usage du *triangle analytique*. Ce dispositif est une simple adaptation du parallélogramme analytique de Newton proposée par De Gua dans ses *Usages de l'analyse de Descartes* et très largement exploitée par Cramer dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*. D'Alembert présente sommairement les principes de l'utilisation de ce parallélogramme analytique dans la dernière section de l'article PARALLÉLOGRAMME, *en Géométrie* (t. XI, 1765, p. 911a–912b).

Cet exposé relativement complet de la méthode utilisée par Cramer pour étudier les branches infinies et les points singuliers des courbes algébriques est signé (G.C.) : la coïncidence de ces initiales avec celles de Gabriel Cramer est troublante, mais il s'agit en fait du français Mathieu-Bernard Goudin (1734-1817),

astronome et mathématicien français, par ailleurs co-auteur avec Dionis du Séjour d'un *Traité des courbes algébriques* en 1756. Il y expose en dix points « les propriétés principales des courbes algébriques qui sont données par le triangle analytique exclusivement au calcul différentiel » (position et nature des branches infinies et de leurs éventuelles asymptotes), mais aussi comment l'utiliser pour obtenir un développement en série, empruntant un exemple de courbe d'ordre 7 proposé par Cramer dans son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* pour illustrer la méthode.

par Thierry Joffredo, le 30 mars 2021