



HAL
open science

À propos des mathématiques

Jean-Pierre Kahane

► **To cite this version:**

Jean-Pierre Kahane. À propos des mathématiques. *Alliage : Culture - Science - Technique*, 1990, 4, pp.43-46. hal-03400623

HAL Id: hal-03400623

<https://hal.science/hal-03400623>

Submitted on 25 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

A PROPOS DES MATHÉMATIQUES

Jean-Pierre Kahane

Premier niveau.

Les mathématiques ont leur langage propre, fait de signes, de symboles, de notations, de formules. Ce langage est universel (le plus important quand on écrit $2+2=4$, ce n'est pas que ce soit vrai ou faux, mais que ce soit compris exactement de la même façon en tous lieux). Il est efficace (quand on dit, en français, quatre-vingt-treize plus six égal quatre-vingt-dix-neuf, on pense $93+6=99$).

Même quand les mathématiciens utilisent des termes de la langue courante (groupes, anneaux, corps, complet, compact), c'est dans un sens technique lequel n'a aucun rapport avec l'usage courant. Quand ils pensent à un groupe, ils voient des objets mentaux puissamment structurés, munis d'une opération soumise à certaines lois, et les exemples qui leur défilent à l'esprit ne s'expriment pas nécessairement en mots, mais en images, en représentations d'actions ou de mouvements.

En résumé, s'il est bien une science qui, par l'universalité et la généralité de ses concepts, a des rapports distants avec les langues naturelles, c'est la mathématique.

Deuxième niveau.

La langue de l'expression mathématique n'est pas celle de la recherche et de la découverte. Dans la recherche, et d'abord dans le choix du sujet de recherche, le mathématicien est guidé volontiers par un sentiment esthétique. Il s'agit d'une esthétique interne à la science mathématique, mais fortement tributaire du monde extérieur, y compris de l'expression dans la langue naturelle.

Par exemple, voici un joli problème. On donne un ensemble fini de points dans un plan. On suppose que chaque droite qui contient deux points de l'ensemble en contient aussi un troisième. Démontrer que tous les points de l'ensemble sont alignés. Une partie de la beauté du problème est qu'on peut l'exprimer ainsi, simplement, dans la langue naturelle. Une autre partie est le contraste entre la simplicité de l'énoncé et l'effort nécessaire pour le résoudre. Il est très rare qu'un sujet de recherche soit une formule à établir. Un beau sujet, c'est souvent un sujet qui s'exprime bien en langue naturelle.

Dans la découverte, il est encore rare qu'on se restreigne au cadre du langage mathématique formalisé. Plus encore que le physicien ou le biologiste, qui ont

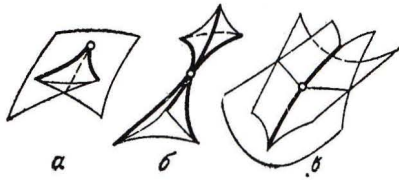


Рис.35

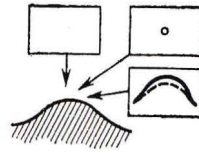


Рис.37

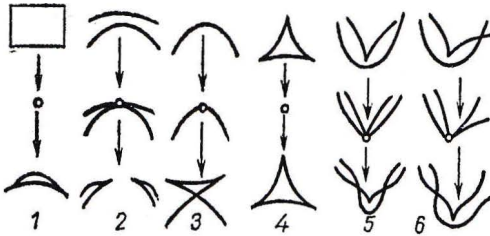


Рис.36

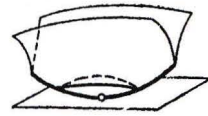


Рис.38



Рис.39

Нетрудно понять, что особенности распространяющегося фронта скользят по каустике и заполняют ее.

Например, метаморфоза волнового фронта 5 на рис. 32 соответствует ласточкиному хвосту на каустике. Ребро возврата движущегося в трехмерном пространстве волнового фронта замечает поверхность каустики (ласточкин хвост). Однако это разбиение каустики на кривые — не то разбиение поверхности ласточкиного хвоста на плоские кривые, с которым мы встречались выше (на рис. 31). Ребро возврата движущегося фронта не имеет самопересечений. Через точку линии самопересечения каустики ребро возврата движущегося фронта проходит два раза. Интервал времени между этими прохождениями очень мал (порядка $\varepsilon^{5/2}$, где ε — расстояние от вершины хвоста).

Точно так же при перестройках 3 и 4 (см. рис. 32) ребра возврата движущихся фронтов замечают пирамиду и кошелек.

pour domaine un champ de la réalité extérieure, le mathématicien doit mobiliser l'ensemble des représentations qui lui sont familières pour en faire jaillir l'imprévu. Le psychisme du mathématicien en travail est irréductible à la formalisation mathématique ; il est fait de douleur et de plaisir, de colères et d'enthousiasmes, de concentration et de contemplation, il est tributaire de toute la formation de l'esprit, donc en premier lieu de la langue maternelle, et aussi des langues d'apprentissage.

Pour illustrer ce point, voici une petite histoire dont le héros est Adrien Douady. Les amateurs de fractales connaissent l'ensemble de Mandelbrot, qui figure maintenant dans beaucoup de livres et de logiciels. C'est une figure très naturelle, mais très compliquée, et les premiers dessins à l'ordinateur avaient montré à côté, et quelquefois à distance de la masse principale, des masses secondaires qui en semblaient disconnectées. La découverte de Douady est que tout cela est d'un seul tenant. Je me souviens de sa terminologie à l'époque. Avant, quand les petites masses semblaient disconnectées de la masse principale, c'était *les crottes de mouche de Mandelbrot*. Après, quand il fut établi qu'elles étaient toutes reliées par d'étroits filaments, elles étaient devenues *des gouttes de rosée sur une toile d'araignée*.

Dans le travail du mathématicien, c'est tout son psychisme qui est en jeu, et la langue naturelle y a toute sa place.

Troisième niveau.

L'expression mathématique, malgré les apparences données par le premier niveau, est en interaction très forte avec les langues naturelles.

Les langues ne se prêtent pas également au discours mathématique, et en particulier, à l'exposé hypothético-déductif des démonstrations. Pour moi, l'un des aspects du «miracle grec» est l'incroyable disponibilité de la langue grecque, à l'époque d'Euclide, pour exprimer en toute rigueur les articulations d'un raisonnement mathématique. Selon l'helléniste Raymond Weil, que j'avais questionné à ce propos, cette adéquation de la langue grecque à la logique mathématique pouvait avoir comme origine la pratique de la démocratie et du droit.

Dans la période moderne, on a pu affirmer, à la fin du XIX^e siècle, que les mathématiques ne s'écrivaient bien qu'en allemand et en français. C'était faux. Mais il est vrai que la parfaite adéquation de l'anglais moderne à l'expression mathématique est le résultat d'une évolution qui s'est faite au XX^e siècle. Les mathématiques imposent des contraintes à la langue : on ne peut pas employer le même mot pour *donc* et *parce que*, on doit préciser le sens des propositions négatives (que signifie : *on ne doit pas* ?).

Il arrive aussi que les mathématiques, comme les autres sciences, enrichissent la langue. Ainsi, Benoît Mandelbrot, dont par parenthèse les premiers travaux concernent la linguistique, en créant le terme de *fractal*, a enrichi la langue (par

parenthèse encore, le français avant même l'anglais) et créé un lieu de rassemblement de connaissances et de curiosités naguère éparses. Dans sa terminologie, des objets familiers aux mathématiciens, mais considérés jusque-là comme leur propriété exclusive, font brusquement image pour tout le monde, et du coup sont mieux compris par l'ensemble des scientifiques : la courbe de von Koch devient le *flocon de neige*, la fonction de Lebesgue construite sur l'ensemble du Cantor devient l'*escalier du diable*, et ainsi se constitue une *géométrie fractale* en complément de celle des droites, des cercles, et des autres figures classiques.

Ainsi, le mouvement même des mathématiques se traduit, aujourd'hui particulièrement, par un mouvement de la langue.

Quatrième niveau.

Chercher, inventer, innover, mais pour quoi ? Quel est le sens du travail mathématique ? Quel est son rapport aux autres hommes ? Quelle est la nature des objets mathématiques : réalité à découvrir ou création de l'esprit humain ? Quelle est la relation entre les objets mathématiques et les outils, méthodes, techniques élaborés pour leur étude ? Quelle est la part d'invention, la part de découverte ? Quelle est la portée des énoncés mathématiques ? Comment se présente, par exemple, le rapport entre le déterminé et le prévisible ? Ou le rapport entre le temps des physiciens et le temps des mathématiciens. Quelle est, dans le travail mathématique, la part des traditions et des écoles, et celle des stimulants venus du monde extérieur ? Quelle est l'interaction actuelle entre les mathématiques, les autres sciences, les techniques ?

On peut aisément poursuivre. A moins de rester sourd et aveugle, le mathématicien rencontre nécessairement certaines de ces questions. Il les rencontre d'autant plus naturellement que les mathématiques, plus que toute autre science, ont un lien intime avec leur histoire et avec leur enseignement. Et comment les exprimer, y penser, autrement que dans la langue commune ?

Le mathématicien doit mettre sa pensée en forme. L'exposé est part intrinsèque du travail. Il doit parler mais aussi écrire, exposer des articles de synthèse et des ouvrages accessibles à un large public. C'est, en France en particulier, la tradition des grands traités, qui vont du cours d'analyse de Cauchy à Bourbaki. Là encore, c'est un vaste programme, qui serait une exigence nationale et internationale.

La vulgarisation mathématique devrait s'exprimer comme une grande expérience populaire : il est inadmissible qu'une science à l'efficacité aussi importante et actuelle soit, malgré et en partie à cause de l'enseignement, si largement méconnue. Le souci de la vulgarisation est d'ailleurs, comme le remarque Ivar Ekeland, singulièrement décapant pour le mathématicien, en l'obligeant à rechercher ce qui est essentiel.