



HAL
open science

Synthèse de filtres H_∞ de type Takagi-Sugeno avec commutations asynchrones pour les systèmes non linéaires à commutations

Issam Chekakta, Djamel E.C. Belkhiat, Koffi Motchon, Kevin Guelton, Dalel Jabri

► To cite this version:

Issam Chekakta, Djamel E.C. Belkhiat, Koffi Motchon, Kevin Guelton, Dalel Jabri. Synthèse de filtres H_∞ de type Takagi-Sugeno avec commutations asynchrones pour les systèmes non linéaires à commutations. Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA 2021), Oct 2021, Paris, France. pp.103-110. hal-03398820

HAL Id: hal-03398820

<https://hal.science/hal-03398820v1>

Submitted on 23 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Synthèse de filtres H_∞ de type Takagi-Sugeno avec commutations asynchrones pour les systèmes non linéaires à commutations

Issam Chekakta¹ Djamel E.C. Belkhiat¹ Koffi M.D. Motchon² Kevin Guelton² Dalel Jabri¹

¹ Laboratoire DAC HR, Université Ferhat Abbas Sétif 1, Sétif Algérie.

² Université de Reims Champagne Ardenne, CReSTIC EA 3804, 51097 Reims, France.

{issam.chekakta, djamel.belkhiat, dalel.jabri}@univ-setif.dz

{koffi.motchon, kevin.guelton}@univ-reims.fr

Résumé :

Cet article traite de la synthèse de filtres H_∞ pour les systèmes décrits par des modèles Takagi-Sugeno (T-S) à commutations. En utilisant une approche basée sur la redondance des descripteurs pour décrire l'erreur dynamique, de nouvelles conditions LMIs sont proposées. Ces conditions s'appliquent dans les deux cas où les signaux de commutations du filtre et du système sont synchrones ou asynchrones. Comparées aux résultats de la littérature, les conditions LMIs proposées présentent l'intérêt de ne pas être dépendantes du temps de séjour des modes, ainsi que d'être moins conservatives. Ceci est illustré au travers d'un exemple académique en simulation, dans le cas où les commutations du système et celles du filtre surgissent de manière asynchrone.

Mots-clés :

Filtrage H_∞ , Systèmes Takagi-Sugeno à commutations, Modes asynchrones, Fonctions de Lyapunov multiples, LMIs.

1 Introduction

Les systèmes à commutations représentent une classe particulière importante de systèmes dynamiques hybrides. Ils sont adaptés pour modéliser les systèmes physiques possédant plusieurs modes de fonctionnement ou sous-systèmes et dont le comportement global résultant du passage d'un mode de fonctionnement à un autre est régi par une loi de commutation pouvant être décrite par une fonction constante par morceaux. C'est le cas par exemple de nombreux systèmes complexes rencontrés en robotique, en électronique de puissance ou en informatique [30]. L'identification, l'analyse de la stabilité, la commande et

l'estimation d'état des systèmes à commutations linéaires et non-linéaires sont largement abordées dans la littérature (voir par exemple les références [17, 2, 13, 16, 9, 30, 8, 11]). Pour les systèmes à commutations présentant des comportements non-linéaires, les modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) peuvent être utilisés afin de représenter les non-linéarités [25], donnant naissance à la classe des systèmes T-S à commutations. L'analyse de la stabilité, la stabilisation et la synthèse d'observateurs de cette classe de systèmes ont également fait l'objet de récentes études, e.g. [29, 14, 1, 7, 6].

Dans cet article, on s'intéresse au problème de filtrage H_∞ pour les systèmes T-S à commutations. Ces filtres permettent d'estimer les sorties non mesurées ou bruitées d'un système non linéaire donné [5], tout en garantissant la robustesse de la convergence de l'erreur d'estimation vis-à-vis des dynamiques non-linéaires [27]. Le filtrage H_∞ des systèmes T-S à commutations a été récemment traité, en considérant un temps de séjour persistant et de commutations synchrones entre le filtre et le système [24]. Avec un temps de séjour minimum, le cas du filtrage H_∞ avec commutations asynchrones, plus réaliste dans la pratique que le cas synchrone, a quant à lui été considéré dans [12] et [18].

Notons que les travaux récents, mentionnés ci-dessus, relatifs au filtrage H_∞ des modèles T-S à commutations ne s'appliquent que lorsqu'un temps de séjour est considéré [24, 12, 18]. De ce fait, le cas des systèmes T-S à commutations arbitraires, inconnues ou non

contrôlables, nécessite d'être examiné. Les travaux de cet article s'inscrivent dans ce cadre. Plus précisément, l'objectif est d'établir des conditions de synthèse LMIs, indépendantes du temps de séjour, de filtres H_∞ . De plus, afin d'obtenir des conditions de synthèse moins conservatives, nous proposons d'utiliser des techniques de relaxation LMI [20, 26], ainsi qu'une approche basée sur la redondance des descripteurs [22, 3, 10, 23, 4, 15]. La méthodologie de synthèse proposée est illustrée en simulation au travers d'un exemple académique. Sur la base de cet exemple, l'efficacité de cette méthode, comparé aux méthodes existantes de filtrage pour les systèmes T-S à commutations, est également soulignée.

2 Formulation du problème

Considérons le système T-S à commutations décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{i_j=1}^{r_j} \sigma_j(t) h_{i_j}(\xi_j(t)) (A_{i_j} x(t) + B_{i_j} w(t)) \\ z(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{i_j=1}^{r_j} \sigma_j(t) h_{i_j}(\xi_j(t)) F_{i_j} x(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \quad (1)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^{v_2}$ le vecteur des sorties mesurées, $z(t) \in \mathbb{R}^{v_1}$ le vecteur des sorties non mesurées que l'on souhaite estimer, $w(t) \in L_2([0, +\infty))$ est un vecteur de perturbations. Le nombre de modes du système est noté m et le nombre de règles floues associées au $j^{\text{ième}}$ mode est noté r_j ($j = 1, \dots, m$), $\xi_j(t)$ sont les vecteurs des variables de prémisse (supposées mesurables) dans chaque mode. Pour $i_j = 1, \dots, r_j$, $h_{i_j}(\xi_j(t))$ sont les fonctions d'appartenance normalisées vérifiant les conditions de convexité $h_{i_j}(\xi_j(t)) > 0$ et $\sum_{i_j=1}^{r_j} h_{i_j}(\xi_j(t)) = 1$. Les matrices constantes $A_{i_j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{i_j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{v_2 \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{v_2 \times m}$, $F_{i_j} \in \mathbb{R}^{v_1 \times n}$ définissent les sommets du système T-S à commutations dans chaque mode de fonctionnement. Le signal de commutations est $\sigma_j(t)$, défini tel que, si le mode j est actif à l'instant t , $\sigma_j(t) = 1$ et $\sigma_l(t) = 0$ pour tout $l \neq j$.

Dans la suite, pour traiter le problème de filtrage H_∞ du système T-S à commutations (1), i.e. l'estimation des sorties non mesurées $z(t)$, considérons le filtre T-S à commutations asynchrones suivant :

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \sum_{\hat{j}=1}^m \sum_{\hat{i}_j=1}^{r_{\hat{j}}} \hat{\sigma}_{\hat{j}}(t) h_{\hat{i}_j}(y(t)) (A_{\hat{i}_j}^f \hat{x}(t) + B_{\hat{i}_j}^f y(t)) \\ \hat{z}(t) = \sum_{\hat{j}=1}^m \sum_{\hat{i}_j=1}^{r_{\hat{j}}} \hat{\sigma}_{\hat{j}}(t) h_{\hat{i}_j}(y(t)) F_{\hat{i}_j}^f \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2)$$

avec $\hat{x}(t)$ le vecteur d'état du filtre, $\hat{z}(t)$ l'estimée du vecteur $z(t)$, $A_{i_j}^f$, $B_{i_j}^f$, $F_{i_j}^f$ les matrices à synthétiser, $\hat{\sigma}_{\hat{j}}(t)$ le signal de commutations du filtre, asynchrones par rapport à celle du système (1).

Dans la suite, pour alléger les notations, la dépendance du temps t sera omise lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. De plus, les sommes convexes de matrices seront notées sous la forme $X_{h_\sigma} = \sum_{j=1}^m \sum_{i_j=1}^{r_j} \sigma_j(t) h_{i_j}(\xi_j(t)) X_{i_j}$ et $X_{h_{\hat{\sigma}}} = \sum_{\hat{j}=1}^m \sum_{\hat{i}_j=1}^{r_{\hat{j}}} \hat{\sigma}_{\hat{j}}(t) h_{\hat{i}_j}(\xi_{\hat{j}}(t)) X_{\hat{i}_j}$. Enfin, X^\dagger est la pseudo-inverse de X .

Soient $e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ et $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ les erreurs d'estimation des sorties non mesurées et du vecteur d'état. En introduisant les vecteurs augmentés $e(t) = [e_x^T(t) \ e_z^T(t)]^T$ et $\tilde{w}(t) = [x^T(t) \ \hat{x}^T(t) \ w^T(t)]^T$, la dynamique de l'erreur de filtrage peut être décrite par la forme descripteur suivante :

$$E\dot{e}(t) = \tilde{A}_{h_\sigma} e(t) + \tilde{B}_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}} \tilde{w}(t) \quad (3)$$

$$\text{avec } E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{h_\sigma} = \begin{bmatrix} A_{h_\sigma} & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \tilde{B}_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}} = \begin{bmatrix} -B_{h_{\hat{\sigma}}}^f C & A_{h_\sigma} - A_{h_{\hat{\sigma}}}^f & B_{h_\sigma} - B_{h_{\hat{\sigma}}}^f D \\ F_{h_\sigma} & -F_{h_{\hat{\sigma}}}^f & 0 \end{bmatrix}.$$

Problème : Déterminer des conditions LMIs de synthèse du filtre T-S à commutations asynchrone (2), indépendantes du temps de séjour, telles que :

- i. Sous l'hypothèse que $\tilde{w}(t) = 0$, la dynamique (3) de l'erreur de filtrage $e(t)$ converge asymptotiquement vers 0.
- ii. $\forall \tilde{w}(t) \neq 0$, le transfert entre $\tilde{w}(t)$ et l'erreur d'estimation des sorties mesurées $e_z(t)$

soit minimisé avec un taux d'atténuation γ , tel que :

$$\frac{\|e_z\|_2^2}{\|\tilde{w}\|_2^2} \leq \gamma^2, \quad (4)$$

c'est-à-dire, selon le critère H_∞ :

$$\int_0^\infty e_z^T(t)e_z(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t)dt \quad (5)$$

Rappelons que les résultats existants sur le filtrage H_∞ des systèmes T-S à commutations ne traitent que du cas des signaux de commutations avec un temps de séjour [12, 24, 18]. Dans la suite, nous proposerons des conditions LMIs de synthèse du filtre indépendantes du temps de séjour, ce qui constitue la contribution principale de ce papier. Pour établir ces conditions LMIs, nous utiliserons les lemmes suivants.

Lemme 1 [20] Soient N , P et Q des matrices de dimensions appropriées. L'inégalité $N^T P + P^T N + Q < 0$ est vérifiée si :

$$\exists R, \exists L \mid \begin{bmatrix} N^T L^T + L N + Q & (*) \\ P - L^T + R^T N & -R^T - R \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

Lemme 2 [26] $\forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2$, soient $\delta_i > 0$ des fonctions scalaires convexes vérifiant $\sum_{i=1}^r \delta_i = 1$ et Γ_{ij} des matrices symétriques de même taille. L'inégalité matricielle $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \delta_i \delta_j \Gamma_{ij} < 0$ est vérifiée si :

$$\frac{1}{r-1} \Gamma_{ii} + \frac{1}{2} (\Gamma_{ji} + \Gamma_{ij}) < 0 \quad (7)$$

3 Conditions de synthèse LMI

Les conditions LMIs (indépendantes du temps de séjour) proposées pour la synthèse du filtre H_∞ de type T-S à commutations asynchrones (2) pour les systèmes (1) sont données par le théorème suivant.

Théorème 1 $\forall (j, \hat{j}) \in \{1, \dots, m\}^2$, $\forall (i_j, k_j) \in \{1, \dots, r_j\}^2$ et $\forall q_j \in \{1, \dots, r_j\}$, les conditions i. et ii. du problème défini ci-dessus pour la synthèse du filtre H_∞ (2) sont vérifiées s'il

existe un réel γ et des matrices $A_{k_j}^f$, $B_{k_j}^f$, $E_{k_j}^f$, $G_{\hat{j}}$, $L_{k_j q_j}$, $R_{k_j q_j}$ et $P_{\hat{j}}^1 = P_{\hat{j}}^{1T}$, $P_{\hat{j}}^2$ et $P_{\hat{j}}^3$, vérifiant le problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \min \gamma^2, \\ \text{s.c. (9), (10) et } P_{\hat{j}}^1 > 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$P_{\hat{j}+}^1 = P_{\hat{j}}^1 + G_{\hat{j}}^T C + C^T G_{\hat{j}} \quad (9)$$

$$\frac{1}{r-1} \Gamma_{i_j i_j q_j} + \frac{1}{2} (\Gamma_{i_j k_j q_j} + \Gamma_{k_j i_j q_j}) < 0 \quad (10)$$

avec :

$$\Gamma_{i_j k_j q_j} = \begin{bmatrix} \Phi_{i_j k_j q_j}^1 & (*) & (*) & (*) \\ \Phi_{i_j k_j q_j}^2 & -R_{i_j q_j}^T - R_{i_j q_j} & (*) & (*) \\ \tilde{B}_{i_j q_j}^T & 0 & -\gamma^2 I & (*) \\ P_{\hat{j}}^3 \phi & 0 & 0 & -I \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{i_j k_j q_j}^1 = \tilde{A}_{i_j} L_{k_j q_j}^T + L_{k_j q_j} \tilde{A}_{i_j}^T, \quad \Phi_{i_j k_j q_j}^2 = P_{\hat{j}} - L_{k_j q_j}^T + R_{k_j q_j}^T \tilde{A}_{i_j}^T, \quad P_{\hat{j}} = \begin{bmatrix} P_{\hat{j}}^1 & 0 \\ P_{\hat{j}}^2 & P_{\hat{j}}^3 \end{bmatrix},$$

$$\phi = [0 \ I], \quad \tilde{A}_{i_j} = \begin{bmatrix} A_{i_j} & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{B}_{i_j q_j} = \begin{bmatrix} -B_{q_j}^f C & A_{i_j} - A_{q_j}^f & B_{i_j} - B_{q_j}^f D \\ F_{i_j} & -F_{q_j}^f & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, la mise à jour des états du filtre se fait suivant la relation :

$$\hat{x}^+ = (I - Q_j^{-1} (C Q_j^{-1})^\dagger C) \hat{x} + Q_j^{-1} (C Q_j^{-1})^\dagger y \quad (11)$$

avec $Q_j = V_j \sqrt{\Lambda_j} V_j^T$, où $V_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est formée des vecteurs propres orthonormés de $P_{\hat{j}}^1$, et où $\Lambda_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice diagonale formée des valeurs propres de $P_{\hat{j}}^1$.

Preuve 1 Soit la fonction candidate multiple quadratique de Lyapunov définie par :

$$V(t, e(t)) = e(t)^T E^T P_{\hat{\sigma}}^{-1} e(t) \quad (12)$$

où $E P_{\hat{\sigma}} = P_{\hat{\sigma}}^T E$, $P_{\hat{\sigma}} = \sum_{\hat{j}=1}^m \hat{\sigma}_{\hat{j}}(t) P_{\hat{j}}$ avec $P_{\hat{j}} = \begin{bmatrix} P_{\hat{j}}^1 & 0 \\ P_{\hat{j}}^2 & P_{\hat{j}}^3 \end{bmatrix}$ et $P_{\hat{j}}^1 = P_{\hat{j}}^{1T} > 0$.

La dérivée temporelle de (12) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, e(t)) &= \dot{e}^T(t) E^T P_{\hat{\sigma}}^{-1} e(t) + e^T(t) P_{\hat{\sigma}}^{-T} E \dot{e}(t) \\ &= 2e^T(t) P_{\hat{\sigma}}^{-T} (\tilde{A}_{h_\sigma} e(t) + \tilde{B}_{h_\sigma h_\sigma} \tilde{w}(t)) \end{aligned} \quad (13)$$

De ce fait, les assertions i. et ii. du problème de synthèse du filtre H_∞ sont vérifiées si :

$$\begin{aligned} & \dot{V}(t, e(t)) + e_z(t)^T e_z(t) - \gamma^2 \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) \\ & = \begin{bmatrix} e \\ \tilde{w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_{h_\sigma}^T P_{\hat{\sigma}}^{-1} + P_{\hat{\sigma}}^{-T} \tilde{A}_{h_\sigma} + \psi & (*) \\ \tilde{B}_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \tilde{w} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{avec } \psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

$\forall [e^T \ \tilde{w}^T] \neq 0$, après congruence par $\begin{bmatrix} P_{\hat{\sigma}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, l'inégalité (14) est satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} P_{\hat{\sigma}}^T \tilde{A}_{h_\sigma}^T + \tilde{A}_{h_\sigma} P_{\hat{\sigma}} + P_{\hat{\sigma}}^T \psi P_{\hat{\sigma}} & (*) \\ \tilde{B}_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

En appliquant le lemme 1, l'inégalité (15) est satisfaite si $\exists L_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}$ et $\exists R_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}$ telles que :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{h_\sigma h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^1 + P_{\hat{\sigma}}^T \psi P_{\hat{\sigma}} & (*) & (*) \\ \Phi_{h_\sigma h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^2 & \Phi_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^3 & (*) \\ \tilde{B}_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \Phi_{h_\sigma h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^1 &= \tilde{A}_{h_\sigma} L_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^T + L_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}} \tilde{A}_{h_\sigma}^T, \\ \Phi_{h_\sigma h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^2 &= P_{\hat{\sigma}} - L_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^T + R_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^T \tilde{A}_{h_\sigma}^T, \\ \Phi_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^3 &= -R_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^T - R_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}} \end{aligned}$$

En appliquant le complément de Schur, l'inégalité (16) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} \Phi_{h_\sigma h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^1 & (*) & (*) & (*) \\ \Phi_{h_\sigma h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^2 & \Phi_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^3 & (*) & (*) \\ \tilde{B}_{h_\sigma h_{\hat{\sigma}}}^T & 0 & -\gamma^2 I & (*) \\ P_{\hat{\sigma}}^T \phi & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

$$\text{avec } \phi = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}.$$

En appliquant le Lemme 2, l'inégalité (17) est satisfaite par les LMIs (10).

En s'inspirant de [21], afin de s'affranchir des conditions de temps de séjour, il reste maintenant à donner les conditions permettant de démontrer la décroissance de la fonction de Lyapunov (en l'absence de perturbation, i.e. $w(t) = 0$) aux instants de commutations du filtre. Celle-ci est garantie si :

$$(x - \hat{x}^+)^T P_{j^+}^1 (x - \hat{x}^+) \leq (x - \hat{x})^T P_j^1 (x - \hat{x}) \quad (18)$$

avec $\hat{x}^+(t)$ la valeur de l'état du filtre qui est mise à jour après la commutation du mode j du filtre à son mode successeur j^+ .

En supposant que \hat{x}^+ vérifie $y = C\hat{x}^+$ et, en l'absence de perturbation, puisque $y = Cx$, on obtient $C(x - \hat{x}^+) = 0$. De ce fait, pour toute matrice G_j , l'égalité suivante est vérifiée :

$$(x - \hat{x}^+)^T \left(G_j^T C + C^T G_j \right) (x - \hat{x}^+) = 0 \quad (19)$$

Par conséquent, en imposant (9), l'inégalité (18) devient :

$$(x - \hat{x}^+)^T P_j^1 (x - \hat{x}^+) \leq (x - \hat{x})^T P_j^1 (x - \hat{x}) \quad (20)$$

Ce qui assure la décroissance de la fonction de Lyapunov aux instants de commutations du filtre si les états du filtre sont convenablement mis à jour à ces instants. Pour ce faire, considérons la décomposition spectrale $P_j^1 = Q_j^T Q_j$ avec $Q_j = \mathbf{V}_j \sqrt{\Lambda_j} \mathbf{V}_j^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ [21], l'inégalité (20) est vérifiée si :

$$\|Q_j(x - \hat{x}^+)\| \leq \|Q_j(x - \hat{x})\| \quad (21)$$

Afin de calculer la valeur de mise à jour de l'état du filtre \hat{x}^+ appartenant à l'hyperplan $y = C\hat{x}^+$ et minimisant la distance $\|Q_j(\hat{x}^+ - \hat{x})\|$, le problème d'optimisation suivant est considéré :

$$\begin{cases} \min_{\hat{x}^+} \|Q_j(\hat{x}^+ - \hat{x})\| \\ \text{s.c. } C\hat{x}^+ = y \end{cases} \quad (22)$$

En introduisant $\nu_j = Q_j(\hat{x}^+ - \hat{x})$, on a $Q_j \hat{x}^+ = \nu_j + Q_j \hat{x}$. Le problème d'optimisation précédemment posé devient :

$$\begin{cases} \min_{\hat{x}^+} \|\nu_j\| \\ \text{s.c. } CQ_j^{-1} \nu_j = y - C\hat{x} \end{cases} \quad (23)$$

dont la solution est donnée par :

$$\nu_j = \left(CQ_j^{-1} \right)^\dagger (y - C\hat{x}) \quad (24)$$

d'où $Q_j \hat{x}^+ = Q_j \hat{x} + \left(CQ_j^{-1} \right)^\dagger (y - C\hat{x})$ et qui conduit à (11) après multiplication à gauche par Q_j^{-1} . Ce qui achève la preuve du Théorème 1.

Remarque 1 Les conditions LMIs du Théorème 1 sont génériques et sont à tester pour toutes séquences arbitraires de commutations. Cependant, lorsque la séquence de commutations est connue, c'est-à-dire en considérant l'ensemble $S_{j,j+}$ des commutations possibles du système T-S à commutations et l'ensemble $\hat{S}_{j,\hat{j}+}$ des commutations possibles du filtre T-S à commutations, on obtient moins de conditions LMIs à tester. Par ailleurs, pour la synthèse de filtre T-S à commutations synchrones, un cas particulier du Théorème 1 s'applique avec $\hat{j} = j \in \{1, \dots, m\}$.

4 Exemple illustratif

Pour montrer l'efficacité de la méthode de synthèse de filtre proposée, considérons un modèle T-S à commutations (1), inspiré de [28, 18, 24], avec trois modes de commutations ($j \in \{1, 2, 3\}$) et deux règles floues par mode ($r_j = 2$), donné par les matrices :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5a & 1 \\ -4.9 & 3(b+a) \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} a & -b \\ -4.2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.3 & -3.4 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2b-0.5 & -3.4 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5.5 & -3.2 \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.9 & b-2.2 \end{bmatrix},$$

$$\forall i_j, B_{i_j} = [0 \ 0.1]^T, C = [1 \ 0], D = 0.2, F_{i_j} = [0 \ 1],$$

et les fonctions d'appartenance définies par $h_{1_j}(x_1(t)) = \sin^2(x_1(t))$ et $h_{2_j}(x_1(t)) = \cos^2(x_1(t))$ dans chaque mode j .

Notons que a et b sont des paramètres introduits dans le modèle pour faire une étude comparative des domaines de faisabilité des conditions LMIs (le cas $a = 0$ et $b = -1$ correspond au cas considéré dans [28, 18, 24]). Dans ce contexte, en utilisant Matlab et la toolbox YALMIP [19] avec le solveur SeDuMi, la Figure 4 compare le domaine de faisabilité obtenu avec le Théorème 1 à ceux obtenus en appliquant le Théorème 1 de [12], le Théorème 3 de [24] et le Théorème 1 de [18]. On constate que le domaine de faisabilité obtenu en appliquant les conditions LMIs du Théorème 1 (56.6%, 227

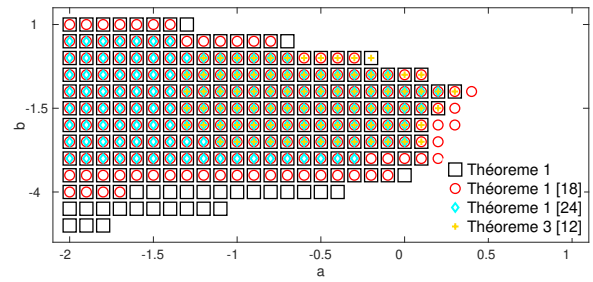


Figure 1 – Comparaison des domaines de faisabilité des conditions Théorème 1 par rapport aux résultats de la littérature.

solutions) est proche de celui donné par le Théorème 1 de [18] (50.4%, 203 solutions). Cependant, notons que les conditions de [18] sont établies sous l'hypothèse de l'existence d'un temps de séjour, ce qui n'est pas le cas des conditions LMIs proposées dans le présent article. Comparé aux résultats des deux autres articles ([12] et [24]), le domaine de faisabilité généré à partir des conditions LMIs établies ici contient les domaines de faisabilité obtenus en utilisant le Théorème 1 de [12] et le Théorème 3 de [24]. Les conditions LMIs du Théorème 1 sont donc moins conservatives que celles de [12] et [24]. Notons finalement que, bien que les LMIs du Théorème 1 présentent une complexité de calcul plus grande que celles proposées dans [12, 24, 18], elles sont résolues hors ligne et ne présentent donc aucune difficulté en terme d'implantation.

Dans le cas particulier où $a = 0$ et $b = -1$, le taux minimum de performance H_∞ obtenu en résolvant les LMIs du Théorème 1 est $\gamma = 1.41$, avec les matrices de gain du filtre :

$$A_{11}^f = \begin{bmatrix} 0.111 & 1.0 \\ -4.243 & -3.220 \end{bmatrix}, A_{12}^f = \begin{bmatrix} 0.112 & 0.996 \\ -4.244 & -3.220 \end{bmatrix},$$

$$A_{21}^f = \begin{bmatrix} 0.112 & 0.994 \\ -4.245 & -3.225 \end{bmatrix}, A_{22}^f = \begin{bmatrix} 0.112 & 0.995 \\ -4.242 & -3.225 \end{bmatrix},$$

$$A_{31}^f = \begin{bmatrix} 0.113 & 0.995 \\ -4.244 & -3.225 \end{bmatrix}, A_{32}^f = \begin{bmatrix} 0.112 & 0.994 \\ -4.243 & -3.225 \end{bmatrix},$$

$$E_{i_j}^f = [0 \ 1], B_{i_j}^{fT} = [0.0 \ 0.5], (\forall i_j).$$

Pour les résultats de simulation présentés ci-dessous, les conditions initiales considérées pour le système et le filtre sont respecti-

vement $x(0) = [0.03 \ 0.1]^T$ et $\hat{x}(0) = [0.01 \ -0.2]^T$. De plus, le système est supposé soumis à des perturbations de la forme $w(t) = 20 \cos(6t)e^{-0.4t} + v(t)$, où $v(t)$ est un bruit suivant une distribution normale, mis à jour à une période de $0.0005s$.

Les figures 2 à 4 présentent les résultats de simulation obtenus lorsque le signal de commutations du filtre est une version retardée (retard de 125 ms) du signal de commutations du système qui est supposé connu. Ce phénomène d'asynchronisme modélise un retard de détection du mode actif du système. La sortie non mesurée $z(t)$ du système et son estimation $\hat{z}(t)$ obtenue avec le filtre proposé est représenté sur la Figure 2. Les sorties mesurables du système et le signal de perturbation sont donnés par la Figure 3. La Figure 4 présente l'évolution de l'erreur d'estimation $e_z(t)$ ainsi que les signaux de commutations du filtre et du système. On notera que l'erreur quadratique moyenne de filtrage est relativement faible ($RMS(z - \hat{z}) = 0.0329$). Ces résultats de simulation montrent que le filtre produit une bonne estimation des sorties non mesurées malgré les perturbations et le délai de détection du mode actif du système.

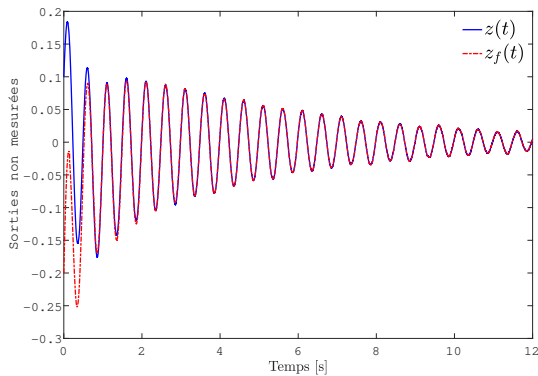


Figure 2 – Évolution de la sortie non mesurée $z(t)$ et de son estimée $\hat{z}(t)$ states

Supposons maintenant que le signal de commutations du système n'est pas mesuré/connu ou estimé, mais que son évolution est donnée par les domaines de commutations définis par les

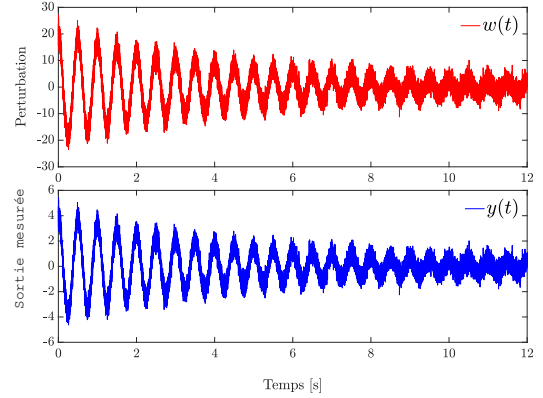


Figure 3 – Évolution de la sortie mesurée $y(t)$ et de la perturbation $w(t)$

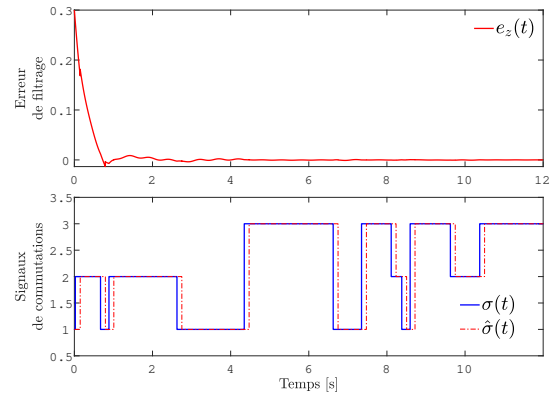


Figure 4 – Evolution de l'erreur d'estimation (haut) et des modes de commutations (bas).

hyperplans suivants :

$$S_{j,j^+} = \{x \in \mathbb{R}^n | s_{j,j^+} x = 0\} \quad (25)$$

où j and j^+ sont respectivement les modes actifs avant et après les instants de commutations, $s_{1,2} = [-0.5 \ 1]$, $s_{2,3} = [1 \ -40]$, $s_{3,1} = [1 \ 6]$, $s_{1,3} = [-1 \ 1]$, $s_{3,2} = [1 \ 10]$ et $s_{2,1} = [4 \ 1]$.

Considérons de plus le cas complexe où les hyperplans suivant définissant la dynamique discrète du filtre sont propres au filtre et différents des hyperplans associés à la dynamique discrète du système :

$$\hat{S}_{\hat{j},\hat{j}^+} = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n | \hat{s}_{\hat{j},\hat{j}^+} \hat{x} = 0\} \quad (26)$$

avec $\hat{s}_{1,2} = [-0.8 \ 1]$, $\hat{s}_{2,3} = [1 \ -50]$, $\hat{s}_{3,1} = [3 \ 8]$, $\hat{s}_{1,3} = [-1.5 \ 1]$, $\hat{s}_{3,2} = [2 \ 15]$ et $\hat{s}_{2,1} = [4 \ 2]$.

Les résultats de simulation obtenus dans ce cas sont donnés par les figures 5 et 6.

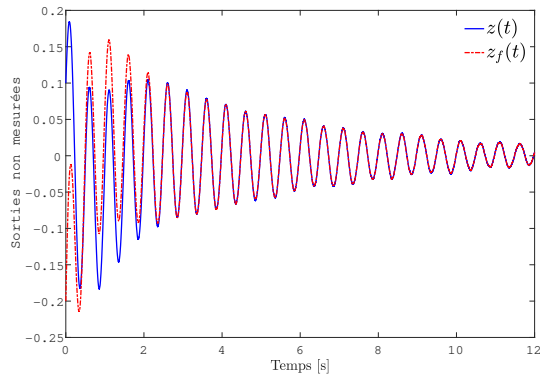


Figure 5 – Évolution de la sortie non mesurée $z(t)$ et de son estimée $\hat{z}(t)$

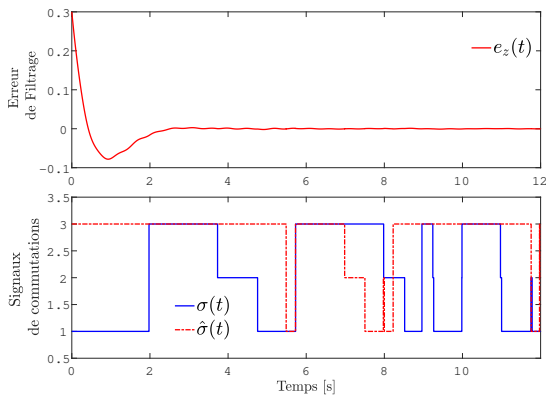


Figure 6 – Évolution de l'erreur d'estimation (haut) et des modes de commutations (bas).

La Figure 5 présente la sortie non mesurée $z(t)$ du système et son estimation $\hat{z}(t)$. L'erreur d'estimation $e_z(t)$ ainsi que les signaux de commutations du filtre et du système sont représentés sur la Figure 6. On note, dans ce cas, que l'erreur quadratique moyenne de filtrage est également faible ($RMS(z - \hat{z}) = 0.0348$). Ces résultats montrent clairement que l'estimation de la sortie $z(t)$ reste correcte même quand la perte de synchronisme entre les signaux de commutations du système et du filtre est arbitraire, ce qui confirme l'efficacité de la méthode de filtrage asynchrone proposée.

5 Conclusion

De nouvelles conditions LMIs pour la synthèse de filtres H_∞ de type T-S à commutations asynchrones pour les systèmes T-S à commutations sans hypothèse de temps séjour des modes sont proposées. Ces conditions ont été établies en utilisant des fonctions de Lyapunov multiples et une approche basée sur la redondance des descripteurs. L'application des conditions LMIs de synthèse du filtre sur un modèle académique a montré l'efficacité de la méthode proposée pour l'estimation des sorties non mesurées du modèle. Aussi, à travers cet exemple, une étude comparative des domaines de faisabilité a permis de prouver que les conditions LMIs de synthèse établies sont moins conservatives par rapport à celles proposées dans la littérature pour le filtrage H_∞ des systèmes T-S à commutations. Une généralisation des résultats de cet article aux systèmes T-S à commutations comportant des modes de fonctionnement instables ou des variables de prémisses non mesurées est envisagée dans nos futurs travaux.

Remerciements :

Ces travaux ont été partiellement réalisés dans le cadre du projet CPER FFCA, financé par la Région Grand-Est. Les auteurs souhaitent remercier Monsieur Phil Terède pour ses conseils avisés.

Références

- [1] D.E.C. Belkhiat, D. Jabri, K. Guelton, N. Manamanni, I. Chekakta. Asynchronous Switched Observers Design for Switched Takagi-Sugeno Systems Subject to Output Disturbances. *IFAC-PapersOnLine*, 52(11) : 49-54, 2019.
- [2] D.E.C. Belkhiat, N. Messai, N. Manamanni. Design of a robust fault detection based observer for linear switched systems with external disturbances. *Non-linear Analysis : Hybrid Systems*, 5(2) : 206-219, 2011.
- [3] T. Bouarar, K. Guelton, B. Mansouri, N. Manamanni. Lmi stability conditions for Takagi-Sugeno uncertain descriptors. *IEEE International Fuzzy Systems Conference*, London, UK, 1-6, 2007.
- [4] T. Bouarar, K. Guelton, N. Manamanni. Robust non-quadratic static output feedback controller design for Takagi-Sugeno systems using descriptor redundancy. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 26(2) : 739-756, 2013.
- [5] X.H. Chang. *Takagi-sugeno fuzzy systems non-fragile H-infinity filtering*. Springer, 2012.

- [6] I. Chekakta, D.E.C. Belkhiat, K. Guelton, D. Jabri, N. Manamanni. Asynchronous observer design for switched T–S systems with unmeasurable premises and switching mismatches. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 104 : 104371, 2021.
- [7] S. Du, X. Li, S. Sun, X. Li. Stability analysis and stabilization of discrete-time switched Takagi–Sugeno fuzzy systems. *ISA Transactions*, 2020.
- [8] L. Etienne, K.M.D. Motchon, E. Duviella, K. Guelton. Impulsive observer design for switched linear systems with time varying sampling and (a)synchronous switching rules. *21st IFAC World Congress, 2020*, pp. 6512-6517.
- [9] D. Gómez-Gutiérrez, S. Čelikovský, A. Ramírez-Treviño, B. Castillo-Toledo. On the observer design problem for continuous-time switched linear systems with unknown switchings. *Journal of the Franklin Institute*, 352(4) : 1595-1612, 2015.
- [10] K. Guelton, T. Bouarar, N. Manamanni. Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi–Sugeno systems—A descriptor redundancy approach. *Fuzzy sets and systems*, 160(19) : 2796-2811, 2009.
- [11] M. Han, R. Zhang, L. Zhang, Y. Zhao, W. Pan. Asynchronous observer design for switched linear systems : A tube-based approach. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 7(1) : 70-81, 2020.
- [12] Y. Hong, H. Zhang, Q. Zheng. Asynchronous H_∞ Filtering for Switched T–S Fuzzy Systems and Its Application to the Continuous Stirred Tank Reactor. *International Journal of Fuzzy Systems*, 20(5) : 1470-1482, 2018.
- [13] M.N. Iqbal, J. Xiao, W. Xiang. Finite-time H_∞ state estimation for discrete-time switched control systems under asynchronous switching. *Asian Journal of Control*, 13(4) : 1112-1121, 2014.
- [14] D. Jabri, K. Guelton, D.E.C. Belkhiat, N. Manamanni. Output-Tracking Controller Design for Switched T–S Systems Subject to External Disturbances. *2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2018*, pp. 1-6.
- [15] D. Jabri, K. Guelton, D.E.C. Belkhiat, N. Manamanni. Decentralized static output tracking control of interconnected and disturbed Takagi–Sugeno systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 30(2) : 225-238, 2020.
- [16] S. Li, C.K. Ahn, Z. Xiang. Sampled-Data Adaptive Output Feedback Fuzzy Stabilization for Switched Nonlinear Systems with Asynchronous Switching. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1-18, 2018.
- [17] D. Liberzon. *Switching in systems and control*. Birkhäuser Basel, 2003.
- [18] C. Liu, Y. Li, Q. Zheng, H. Zhang. Non-weighted Asynchronous H_∞ Filtering for Continuous-Time Switched Fuzzy Systems. *International Journal of Fuzzy Systems*, 22(6) : 1892-1904, 2020.
- [19] J. Lofberg. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508), 2004*, pp. 284-289.
- [20] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier and J. Bernussou. A new robust script D sign-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems and Control Letters*, 40(1) : 21-30, 2000.
- [21] S. Pettersson. Switched state jump observer for switched systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 38(1) : 127-132, 2005.
- [22] H. Schulte, K. Guelton. Descriptor modelling towards control of a two link pneumatic robot manipulator : AT–S multimodel approach. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 3(2) : 124-132, 2009.
- [23] L. Seddiki, K. Guelton, J. Zaytoon. Concept and Takagi–Sugeno descriptor tracking controller design of a closed muscular chain lower-limb rehabilitation device. *IET control theory & applications*, 4(8) : 1407-1416, 2010.
- [24] S. Shi, Z. Fei, T. Wang and Y. Xu. Filtering for switched T–S fuzzy systems with persistent dwell time. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 49(5) : 1923-1931, 2019.
- [25] K. Tanaka, H.O. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis : A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [26] H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, Y. Yamamoto. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 9(2) : 324-332, 2001.
- [27] H.D. Tuan, P. Apkarian, T.Q. Nguyen. Robust and reduced-order filtering : New LMI-based characterizations and methods. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(12) : 2975-2984, 2001.
- [28] G. Wang, R. Xie, H. Zhang, G. Yu, C. Dang. Robust Exponential H_∞ Filtering for Discrete-Time Switched Fuzzy Systems with Time-Varying Delay. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 35(1) : 117-138, 2016.
- [29] D. Zhai, A.Y. Lu, J. Dong, Q. Zhang. Adaptive Tracking Control for a Class of Switched Nonlinear Systems Under Asynchronous Switching. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26(3) : 1245-1256, 2018.
- [30] X. Zhao, Y. Kao, B. Niu, T. Wu. *Control synthesis of switched systems*. Springer International Publishing, 2017.