



**HAL**  
open science

# L'algorithme HyperCASL: une nouvelle approche pour la simulation des écoulements géophysiques

Jérôme Fontane, David Dritschel

► **To cite this version:**

Jérôme Fontane, David Dritschel. L'algorithme HyperCASL: une nouvelle approche pour la simulation des écoulements géophysiques. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. <hal-03391505>

**HAL Id: hal-03391505**

**<https://hal.science/hal-03391505v1>**

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# L'algorithme HyperCASL : une nouvelle approche pour la simulation des écoulements géophysiques

JÉRÔME FONTANE & DAVID G. DRITSHEL

*School of Mathematics and Statistics  
University of St Andrews, North Haugh, St Andrews KY16 9SS, UK*

## Résumé :

*HyperCASL est un nouvel algorithme Lagrangien qui combine méthodes vortex et advection de contours. Après une description de l'algorithme, une étude comparative avec d'autres méthodes est menée au travers d'un cas test : la décroissance libre d'une turbulence bidimensionnelle. Cette analyse illustre les avantages de ce nouvel algorithme en termes de résolution, de convergence, de précision et de coût de calcul par rapport à d'autres méthodes existantes.*

## Abstract :

*HyperCASL is a new fully Lagrangian algorithm combining Contour Dynamics and Vortex-In-Cell methods. After a description of the algorithm, an inter-code comparison is conducted using a two-dimensional inviscid unforced turbulence test-case. This enables us to point out the advantages of this new algorithm in terms of resolution, convergence, accuracy and computational efficiency compared to other existing methods.*

**Mots clés :** écoulements géophysiques, advection de contours, méthodes vortex

## 1 Introduction

Un bon outil de simulation numérique destiné à la simulation d'écoulements géophysiques (modélisation du climat, prévisions météorologiques, dispersion de polluants...) doit allier précision et faible coût de calcul car des prédictions précises (en particulier les fluctuations de concentration) sont requises à la fois sur de courtes périodes de temps et sur de larges domaines de calcul. L'algorithme HyperCASL [1, 2] présenté ici est une extension de CASL [3, 4] conçu à cet effet. C'est une méthode purement Lagrangienne combinant les méthodes vortex (VIC) [5] et l'advection de contours. Les nouveautés de l'algorithme sont présentées en §2. Le paragraphe suivant constitue une étude comparative avec d'autres méthodes (CASL, VIC et les méthodes spectrales PS) menée au travers d'un cas test : la décroissance libre d'une turbulence bidimensionnelle. Cette analyse illustre les avantages de ce nouvel algorithme en termes de résolution, de convergence, de précision et de coût de calcul par rapport aux autres méthodes existantes. L'article se termine par une discussion sur les applications potentielles et la perspective de travaux futurs.

## 2 Description de l'algorithme

Le champ scalaire de vorticité potentielle (VP)  $q$  est décomposé en une partie 'adiabatique'  $q_a$  conservée le long des lignes matérielles et une partie 'diabatique'  $q_d$  qui varie en réponse à un terme source. On obtient ainsi deux équations d'évolution :

$$\frac{Dq_a}{Dt} = 0 \quad ; \quad \frac{Dq_d}{Dt} = S \quad (1)$$

où  $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  désigne la dérivation particulaire et  $S(\mathbf{x}, t)$  représente un terme source<sup>1</sup>. En les combinant, on retrouve l'équation exacte satisfaite par la VP, *i.e.*  $Dq/Dt = S$ . Ces deux équations sont couplées puisque le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  est obtenu par l'inversion du champ total  $q = q_a + q_d$ . Comme pour l'algorithme CASL [3], la partie adiabatique  $q_a$  est modélisée par des contours permettant de représenter des détails extraordinairement fins de l'écoulement pour une petite fraction du temps de calcul requis par l'utilisation de méthodes spectrales [6, 7]. Dans ce cas, la dissipation numérique provient essentiellement de la régularisation des contours ('chirurgie' des contours [8, 9]) intervenant à une échelle bien plus petite que la taille du maillage. En revanche, la partie non conservative  $q_d$  n'est pas traitée correctement par les contours, d'où l'emploi des méthodes spectrales dans CASL [4]. La nouveauté réside ici dans l'utilisation d'un ensemble

1. La source  $S$  peut être de nature physique (pompage d'Eckman, relaxation thermique) ou numérique (résidu issu de la régularisation des contours [4]).

de tourbillons ponctuels à circulation variable pour satisfaire exactement l'équation  $Dq_d/Dt = S$  au niveau de la grille.

La méthode de conversion du terme source  $S$  vers les tourbillons ponctuels est une méthode itérative pour inverser l'équation

$$S_{ij} = \sum_{k \in G_{ij}} w_{i,j,k} \frac{d\tilde{q}_k}{dt}, \quad (2)$$

où  $d\tilde{q}_k/dt$  désigne la variation de la circulation  $\tilde{q}_k = \Gamma_k \Delta x \Delta y$  du tourbillon ponctuel  $k$ ,  $S_{ij}$  la valeur du terme source au noeud  $(i, j)$  du maillage,  $G_{ij}$  le domaine composé des cellules entourant le noeud  $(i, j)$  et  $w_{i,j,k}$  les poids du schéma d'interpolation (bilinéaire ici). La solution de (2) est cherchée comme l'interpolation d'un champ de VP inconnu  $F$  divisé par la densité locale de tourbillons ponctuels  $\rho_k = w_{i,j,k} D_{i,j} + w_{i+1,j,k} D_{i+1,j} + w_{i,j+1,k} D_{i,j+1} + w_{i+1,j+1,k} D_{i+1,j+1}$ , avec  $D_{ij} = \sum_{k \in G_{ij}} w_{i,j,k}$  la densité de tourbillons ponctuels au noeud  $(i, j)$ . La solution de (2) s'écrit :

$$\rho_k \frac{d\tilde{q}_k}{dt} = w_{i,j,k} F_{i,j} + w_{i+1,j,k} F_{i+1,j} + w_{i,j+1,k} F_{i,j+1} + w_{i+1,j+1,k} F_{i+1,j+1}. \quad (3)$$

Partant d'une première estimation de  $F$ , une matrice résidu  $R$  est initialisée avec le terme source  $S$ . Le membre de droite de (2) est soustrait au résidu  $R$ . Puis le membre de droite de (3) avec  $F = R$ , divisé par la densité locale de tourbillons ponctuels  $\rho_k$ , est ajouté à  $d\tilde{q}_k/dt$ . Cette procédure est reproduite itérativement jusqu'à ce que la norme  $L_\infty$  du résidu soit plus petite qu'une précision fixée à  $\varepsilon = 10^{-6} \|S\|_2$ . Toute la difficulté revient à choisir convenablement la première valeur de  $F$  pour assurer une convergence rapide. En général la valeur de  $F$  au pas de temps précédent est utilisée, mais lorsque celle-ci est indisponible, la valeur initiale est choisie égale à (3) avec  $F = S$ . Plusieurs tests ont montré que cette première estimation grossière n'alourdit pas outre mesure la convergence de la procédure itérative.

Initialement,  $m \times m$  tourbillons ponctuels sont disposés selon un motif régulier dans chaque cellule du maillage de manière à ce qu'un tourbillon coïncide avec chacun des noeuds (voir figure 1). Cependant, le motif se désorganise progressivement sous l'action de l'écoulement, rendant la procédure d'inversion de (2) moins efficace. En effet, à partir d'un champ source  $S$  aléatoire illustré en figure 1, l'influence d'un déplacement aléatoire  $\phi$  (normalisé par la taille de la maille) des tourbillons se traduit par une augmentation significative du nombre d'itérations avant convergence, en particulier pour  $m = 2$  (voir figure 1). Pour garantir une convergence rapide, les tourbillons sont donc réorganisés régulièrement selon une cadence imposée par l'intensité de l'écoulement. On définit le paramètre  $\tau$  comme l'intégrale du maximum de vorticité relative entre l'instant  $t$  et la dernière régularisation à  $t_0$ , i.e.  $\tau = \int_{t_0}^t |\omega|_{\max} dt$ . Chaque fois que  $\tau \gtrsim 0.5$ , le motif des tourbillons ponctuels est réarrangé. Cette valeur seuil est issue de nombreux tests et constitue un compromis entre précision et temps de calcul.

L'utilisation des tourbillons ponctuels constitue la nouveauté principale de l'algorithme. Cependant quelques autres améliorations mineures ainsi qu'une étude exhaustive de l'influence de tous les paramètres numériques sur la précision et l'efficacité de la méthode sont détaillés dans [2].

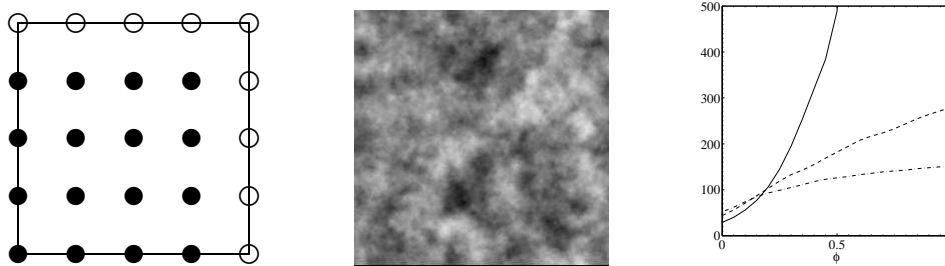


FIGURE 1 – Gauche : organisation initiale des tourbillons ponctuels au sein d'une cellule du maillage pour  $m = 4$ , les noirs appartiennent à la cellule dessinée et les blanc aux cellules voisines. Centre : champ aléatoire de VP utilisé pour tester la convergence de la méthode itérative d'inversion de (2). Droite : nombre d'itérations avant convergence fonction de  $\phi$  pour  $m = 2$  (trait solide),  $m = 3$  (trait discontinu) et  $m = 4$  (trait mixte).

### 3  tude comparative

L'étude comparative se base sur le cas test classique de la décroissance libre d'une turbulence bidimensionnelle. Le système dynamique est régi par l'équation  $\partial_t \omega - \partial_x \psi \partial_x \omega + \partial_x \psi \partial_y \omega = 0$  où la vorticité  $\omega$  et la fonction courant  $\psi$  sont reliées par la relation  $q = \Delta \psi$ . L' tat initial est un champ de vorticité à phase aléatoire dont le

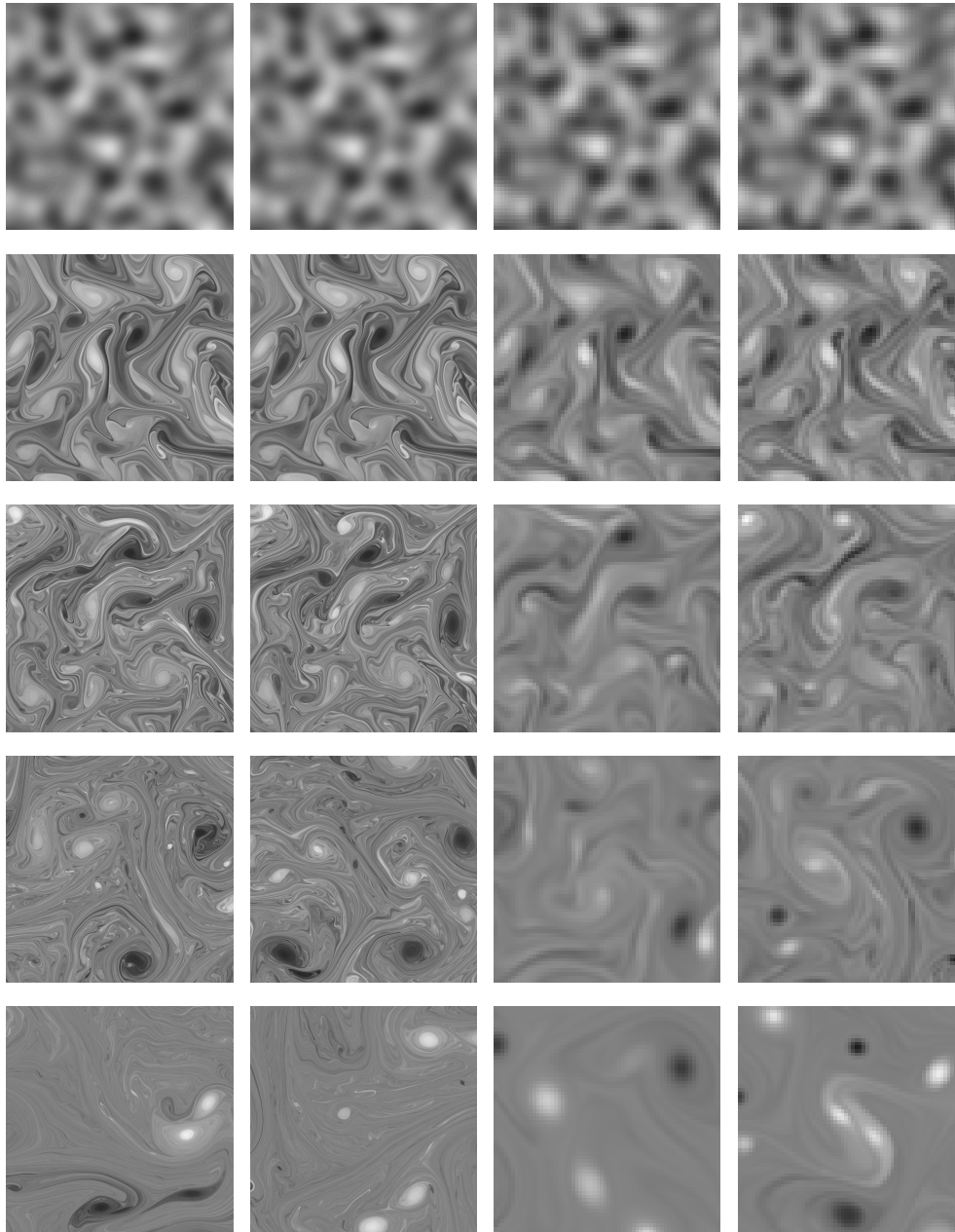


FIGURE 2 – Le champ de vorticité  $\omega$  à  $t = 0, 5, 10, 20$  et  $50$  de haut en bas pour HCASL, CASL, PS et VIC (respectivement en colonne 1, 2, 3 et 4). Un seizième du domaine est représenté. Une palette de gris est utilisée, le blanc indiquant la valeur maximale et le noir la valeur minimale.

spectre énergétique est  $E(k) = ck^{2p-3}e^{-(p-1)(\frac{k}{k_0})^2}$ , où  $k_0$  est le centroïde d'entrophie-énergie,  $p$  est un entier supérieur à 1 et  $c$  une constante ajustée pour fixer le maximum de vorticité à une valeur donnée. Sauf mention contraire,  $k_0 = 4$ ,  $p = 3$  et la vorticité maximale est  $4\pi$ . Toutes les simulations sont réalisées dans un domaine périodique de taille  $2\pi \times 2\pi$  pour  $t \in [0, 500]$  avec un schéma temporel de Runge-Kutta d'ordre 4.

L'évolution aux temps courts (de  $t = 0$  à  $t = 50$ ) du champ de vorticité est illustrée en figure 2 pour chacune des méthodes et pour une résolution  $N = 256$ . Bien que le champ initial (ici  $k_0 = 16$ ) soit identique, les écoulements deviennent différents passé le pic de palentrophie autour de  $t = 5$ . L'utilisation pour la représentation des contours d'une échelle de longueur (échelle chirurgicale [8, 9]) seize fois plus petite que la taille de la maille [2] donne une meilleure résolution pour HCASL et CASL comparée à celle de PS et VIC. Ce surcroît de résolution effective permet à HCASL et CASL de mieux décrire les propriétés de l'écoulement que ne le font PS et VIC, comme par exemple les caractéristiques de la population de tourbillons. Une analyse théorique [10] basée sur une population de tourbillons auto similaire en taille montre que la densité des tourbillons est inversement proportionnelle à leur aire, *i.e.*  $n(A) \sim A^{-1}$ . La figure 3 compare cette prédiction

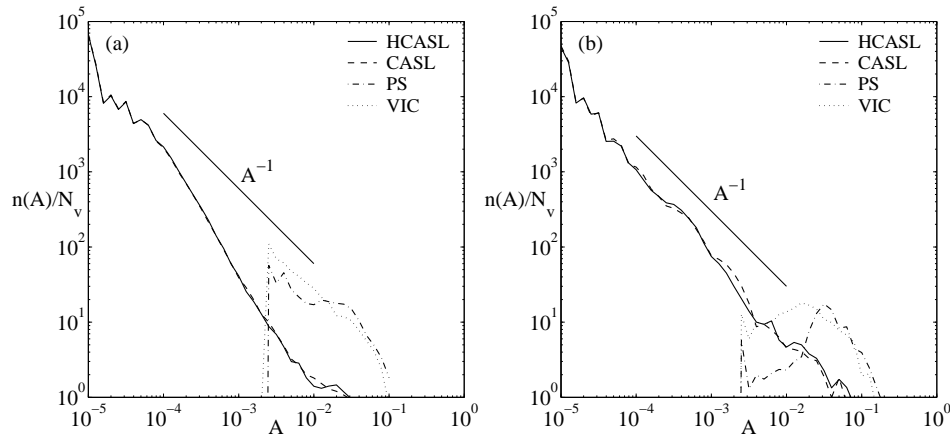


FIGURE 3 – Moyenne temporelle de la densité de tourbillons  $n(A)$  normalisée par le nombre total de tourbillons  $N_v$  en fonction de l'aire  $A$  pour les quatre algorithmes. Les courbes correspondent aux données collectées sur la période (a)  $t \in [10, 100]$  et (b)  $t \in [100, 500]$ .

théorique aux données obtenues avec les simulations. Les courbes représentent la moyenne temporelle de la densité des tourbillons  $n(A)$  normalisée par le nombre total de tourbillons  $N_v = \int n(A)dA$  sur deux intervalles distincts, à savoir  $t \in [10, 100]$  et  $t \in [100, 500]$ . Cette figure montre clairement la supériorité de HCASL et CASL à reproduire correctement la population de tourbillons par rapport aux méthodes PS et VIC. Alors que les résultats numériques obtenus avec HCASL et CASL sont conformes à la prédiction théorique pour  $t \in [100, 500]$ , la pente mesurée est un peu plus raide que  $A^{-1}$  pour  $t \in [10, 100]$ . Cette différence s'explique par le fait que la distribution de tourbillons n'est pas complètement auto-similaire pour  $t \in [10, 100]$ . En effet, les tourbillons les plus larges n'apparaissent qu'aux temps longs suite aux fusions successives de tourbillons plus petits. La comparaison des deux figures 3(a) et 3(b) montre que la probabilité d'existence des larges tourbillons augmente avec le temps. De plus, l'aire maximale observable est de  $A_{\max} = 0.03$  à  $t = 100$  et elle augmente jusqu'à  $A_{\max} = 0.07$  pour  $t = 500$ .

En général, dans les applications géophysiques, les simulations d'écoulements sont faites pour de modestes résolutions car une grande partie des ressources de calcul sont dédiées à d'autres phénomènes physiques tels que les réactions chimiques ou les schémas de radiation. De fait, un algorithme performant doit présenter une convergence rapide. Une comparaison visuelle directe de la convergence de chaque méthode est présentée en figure 4 par la représentation des contours de vorticité pour des résolutions croissantes (de  $N = 32$  à 512) à  $t = 5$  quand les simulations sont encore comparables. Alors que les caractéristiques essentielles de l'écoulement sont capturées par HCASL et CASL pour  $N = 64$ , la convergence ne semble être atteinte qu'à  $N = 512$  pour les méthodes PS et VIC. De plus, à iso-résolution, les gradients de vorticité sont bien plus raides avec HCASL et CASL qu'avec PS et VIC. Ces figures montrent clairement que les deux algorithmes utilisant les contours convergent plus rapidement que PS et VIC.

Un moyen de mesurer la précision des méthodes est de regarder leur capacité à conserver les aires entre deux iso-contours de vorticité (conséquence directe du théorème de Kelvin). L'aire est calculée comme fait précédemment fait par [6]. Le champ de vorticité est divisé en régions  $\mathcal{R}_j, j \in [-M, M]$ , chacune associée à un niveau de vorticité  $\omega_j$ . En théorie, l'aire  $A_j$  de ces régions doit être conservée mais en pratique, les erreurs numériques se traduisent par des variations de l'aire. L'incrément de vorticité  $\delta\omega = \omega_{j+1} - \omega_j$  est choisi constant et égal à  $4\pi/20$ . Le nombre de régions en découle directement, *i.e.*  $M = (\omega_{\max} - \omega_{\min})/2\delta\omega$ . Pour chaque noeud du maillage, la région  $\mathcal{R}_j$  à laquelle il appartient est déterminée par l'entier  $j$  tel que  $(j - \frac{1}{2})\delta\omega < \omega \leq (j + \frac{1}{2})\delta\omega$ . La précision de la méthode est ensuite donnée par l'erreur sur l'aire définie comme la valeur moyenne de la différence entre  $A_j(t)$  et  $A_j(0)$  normalisée par l'aire initiale :

$$\varepsilon_A(t) = \sqrt{\frac{\sum_{j=-M}^M (A_j(t) - A_j(0))^2}{\sum_{j=-M}^M A_j^2(0)}}. \quad (4)$$

Le meilleur algorithme n'étant pas simplement le plus précis, la précision des méthodes doit être accompagnée d'une information sur leur coût pour faire une comparaison juste entre les différentes méthodes. Le coût est ici donné par le temps de calcul (en secondes cpu) par unité de temps simulée. La figure 5 présente l'erreur  $\varepsilon_A$  aux temps  $t = 5$  et  $t = 10$  en fonction du coût de calcul pour les quatre algorithmes. À résolution égale, l'erreur produite par HCASL et CASL est bien plus faible que celle donnée par les méthodes PS et VIC. Il faut augmenter la résolution jusqu'à  $N = 1024$  pour que les deux méthodes PS et VIC présentent une

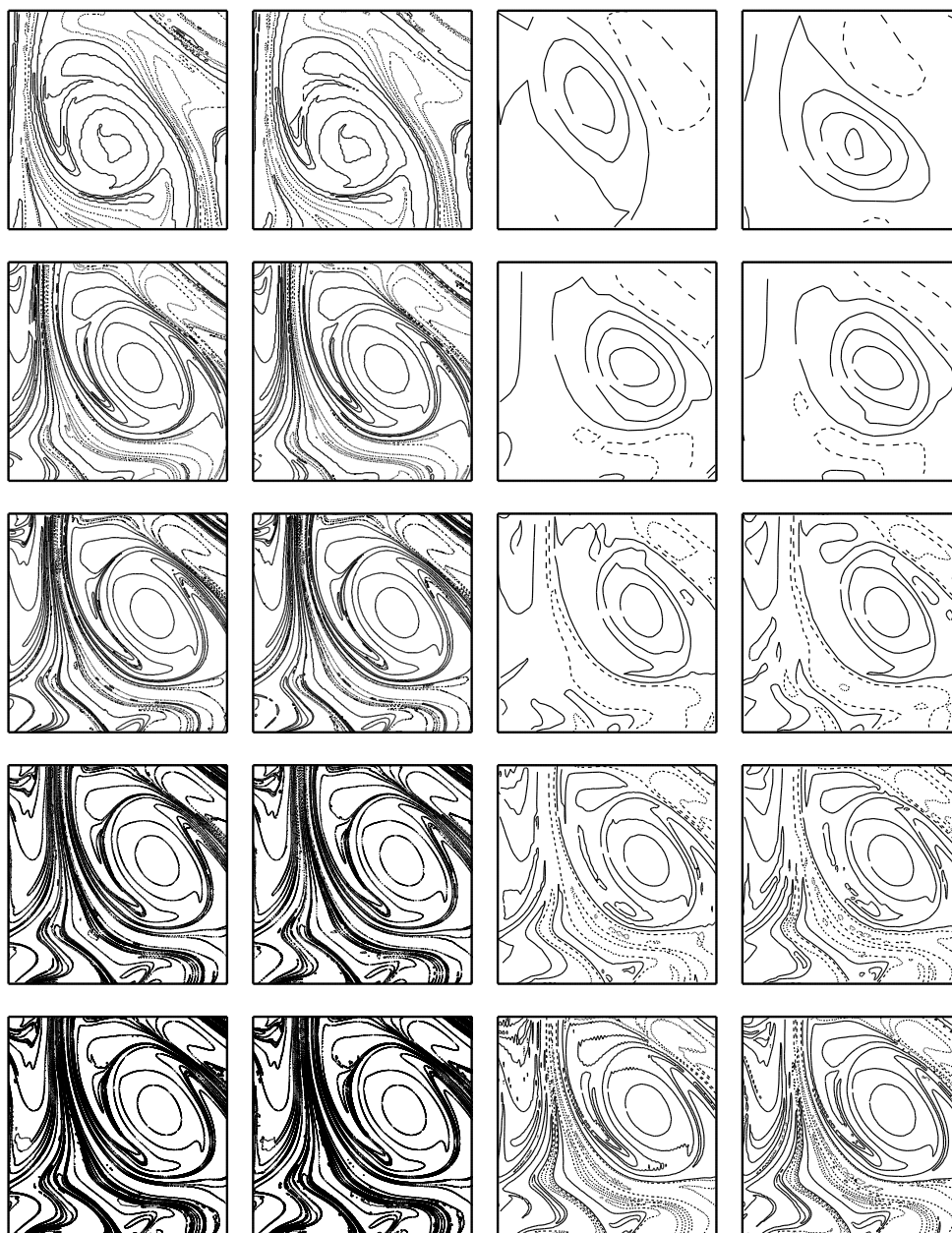


FIGURE 4 – Contours de vorticité à  $t = 5$  dans une seizième du domaine pour des résolutions croissantes de haut en bas ( $N = 32, 64, 128, 256$  et  $512$ ) avec HCASL, CASL, PS et VIC (respectivement en colonne 1, 2, 3 et 4). L'incrément est  $\Delta\omega = 4\pi/5 = 2.513$  et les lignes discontinues représentent les valeurs négatives.

précision au moins égale à celle obtenue avec HCASL et CASL pour  $N = 64$ , et ce, avec un temps de calcul respectivement 205 et 42 plus long. Une comparaison des deux méthodes utilisant les contours montre la supériorité de HCASL sur CASL : l'absence d'une contrainte CFL sur le pas de temps dans HCASL en raison de sa nature Lagrangienne, le rend plus rapide que CASL lorsque la résolution augmente. À la vue de ces résultats, HCASL présente les meilleures propriétés numériques.

## 4 Conclusions

L'algorithme HyperCASL est une nouvelle méthode Lagrangienne pour la simulation des écoulements géophysiques, combinant méthodes vortex et advection de contours. La vorticité potentielle est décomposée en deux champs : une partie conservative représentée par les contours et une partie non conservative modélisée par des tourbillons ponctuels dont la circulation varie dynamiquement pour tenir compte de tout champ source. Cette nouvelle technique permet de supprimer toute diffusion jusqu'au niveau de la maille de la grille, reléguant les erreurs numériques à une échelle inférieure à celle-ci.

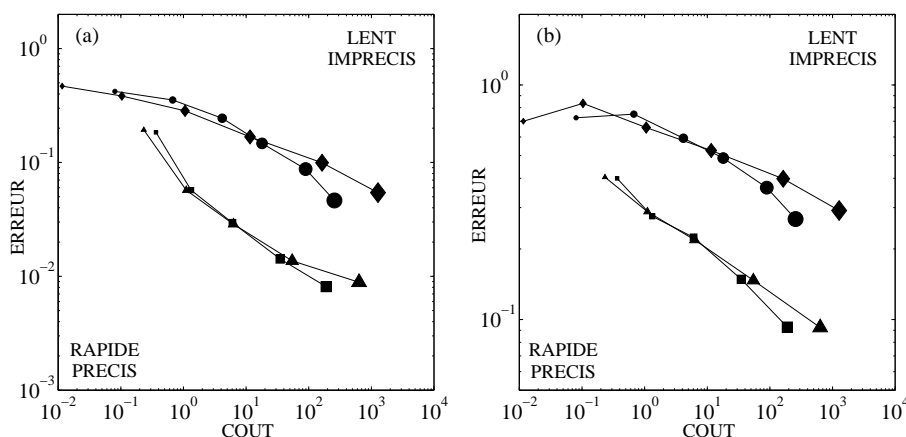


FIGURE 5 – Erreur  $\varepsilon_A$  à (a)  $t = 5$  et (b)  $t = 10$  en fonction du coût par unité de temps (en sec. cpu) pour les quatre algorithmes (■ pour HCASL, ▲ pour CASL, ◆ pour PS et ● pour VIC). La taille des symboles augmente avec la résolution, de  $N = 32$  à  $N = 512$  pour HCASL et CASL, et de  $N = 32$  à  $N = 1024$  pour PS et VIC.

À l'aide du cas test de la décroissance libre d'une turbulence bidimensionnelle, une comparaison de HCASL avec d'autres méthodes existantes (CASL, PS et VIC) montre la supériorité de l'algorithme en terme de convergence, de précision et de temps de calcul. À la lumière de ces résultats, l'algorithme HyperCASL représente une nouvelle opportunité pour modéliser efficacement les écoulements géophysiques complexes. Son extension à un système plus complet d'équations est envisageable comme la prochaine étape [11], et l'adaptation de la méthode à la géométrie sphérique et aux océans représente une opportunité pour de futurs travaux. Enfin, de par sa nature, HyperCASL n'est pas limité à la VP, il peut s'appliquer à d'autres traceurs (espèces chimiques présentes dans l'atmosphère) comme la vapeur d'eau dont une meilleure modélisation permettrait d'améliorer les prévisions concernant les précipitations [12].

## Références

- [1] Dritschel D. and Fontane J. The hypercasl algorithm. In IUTAM Proc. Symposium on Turbulence in the Atmosphere and Oceans, 2009. (to be published).
- [2] Fontane J. and Dritschel D. The hypercasl algorithm : a new approach to the numerical simulation of geophysical flows. *J. Comp. Phys.*, 2009. (submitted).
- [3] Dritschel D. and Ambaum M. A contour-advective semi-lagrangian numerical algorithm for simulating fine-scale conservative dynamical fields. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 123, 1097–1130, 1997.
- [4] Dritschel D. and Ambaum M. The diabatic contour advective semi-lagrangian algorithm. *Mon. Weather Rev.*, 134(9), 2503–2514, September 2006.
- [5] Christiansen J. and Zabusky N. J. Instability, coalescence and fission of finite-area vortex structures. *J. Fluid Mech.*, 61, 219–243, 1973.
- [6] Dritschel D., Polvani L., and Mohebalhojeh A. The contour-advective semi-lagrangian algorithm for the shallow water equations. *Mon. Wea. Rev.*, 127(7), 1551–1565, 1999.
- [7] Dritschel D. and Scott R. On the simulation of nearly inviscid two-dimensional turbulence. *J. Comp. Phys.*, 2009. (in press).
- [8] Dritschel D. Contour surgery : a topological reconnection scheme for extended integrations using contour dynamics. *J. Comput. Phys.*, 77, 240–266, 1988.
- [9] Dritschel D. Contour dynamics and contour surgery : numerical algorithms for extended, high-resolution modelling of vortex dynamics in two-dimensional, inviscid, incompressible flows. *Computer Phys. Rep.*, 10(3), 77–146, August 1989.
- [10] Dritschel D., Scott R., Macaskill C., Gottwald G., and Tran C. A unifying scaling theory for vortex dynamics in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 101(9), 094501, August 2008.
- [11] Dritschel D. and Viúdez A. A balanced approach to modelling rotating stably-stratified geophysical flows. *J. Fluid Mech.*, 488, 123–150, 2003.
- [12] Pierrehumbert R. T. The hydrologic cycle in deep time climate problems. *Nature*, 419, 191–198, September 2002.