



HAL
open science

Flambage et vibrations non-linéaires d'une plaque stratifiée piézoélectrique. Application à un capteur de masse MEMS

Olivier Thomas, Liviu Nicu, Cyril Touzé

► **To cite this version:**

Olivier Thomas, Liviu Nicu, Cyril Touzé. Flambage et vibrations non-linéaires d'une plaque stratifiée piézoélectrique. Application à un capteur de masse MEMS. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03391423

HAL Id: hal-03391423

<https://hal.science/hal-03391423v1>

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Flambage et vibrations non-linéaires d'une plaque stratifiée piézoélectrique. Application à un capteur de masse MEMS

O. THOMAS^a, L. NICU^b ET C. TOUZÉ^c

a. Lab. de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés, EA 3196, Cnam, 2 rue Conté, 75003 Paris

b. Lab. d'Analyse et Architecture des Systèmes, UPR 8001, 7 av. du Colonel Roche, 31077 Toulouse

c. Unité de Mécanique, ENSTA, Ch. de la Hunière, 91761 Palaiseau Cedex

Résumé :

L'objet de ce travail est de présenter les premiers résultats de modélisation et simulation du comportement vibratoire non-linéaire d'une plaque circulaire stratifiée munie de couches en matériau piézoélectrique, élément principal d'un capteur de masse MEMS. La modélisation permet de prendre en compte (i) le couplage électromécanique lié à la pastille piézoélectrique, (ii) la structure stratifiée des membranes, (iii) l'état précontraint au repos de la membrane et le flambage éventuel et (iv) les vibrations non-linéaires qui produisent un effet raidissant ou assouplissant. Le modèle non-linéaire et sa résolution, par méthode de continuation et équilibrage harmonique, seront présentés, pour dégager le comportement de la membrane en régime forcé.

Abstract :

This study proposes a model of a circular, non-symmetrically laminated, piezoelectric plate, subjected to non-linear large amplitude vibrations. This model is built to simulate the behavior of a MEMS bio-sensor, designed to detect, automatically and autonomously, the presence of a given molecule in an aqueous solution. Because of both the laminated structure and the fabrication process, prestresses are observed, with different signs and intensities from one layer to another. This is responsible of a non-planar deformed geometry of the plate at rest. Moreover, experimental results show that a geometrically non-linear response is observed, with curved frequency responses. A continuous non-linear model of the von-Kármán type is used and discretized by an expansion of the solution onto the mode shape basis of the plate without prestresses. Its response is numerically computed by a continuation method, in order to predict the system's non-linear behavior.

Mots clefs : plaque stratifiée, non-linéarités géométriques, flambage, vibrations, piézoélectrique.

1 Introduction

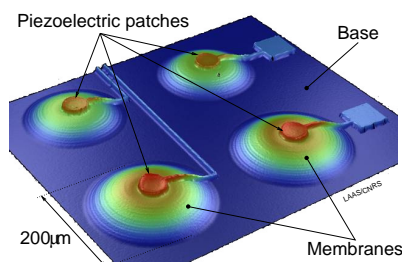


FIG. 1 – Un bio-capteur constitué d'une matrice 2×2 de membranes résonantes

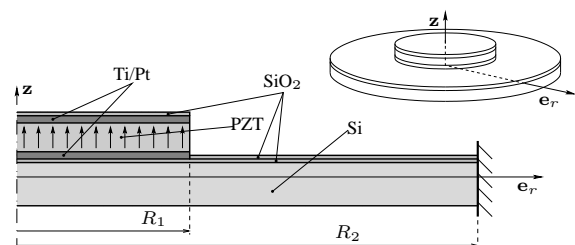


FIG. 2 – Section droite d'une membrane stratifiée.

Dans ce travail, on se propose d'étudier le comportement vibratoire non-linéaire d'une plaque circulaire stratifiée en matériau piézoélectrique. Il s'agit de modéliser et de simuler le fonctionnement d'un bio-capteur MEMS (Micro-Electro Mechanical System) permettant de détecter, de façon automatique et autonome, la présence d'une molécule donnée contenue dans une solution aqueuse.

Le bio-capteur qu'il s'agit d'étudier est constitué de plusieurs membranes circulaires, d'environ $200 \mu\text{m}$ de diamètre et d'épaisseur de l'ordre du μm , inscrites dans une plate-forme de silicium (fig. 1). Ces membranes

sont entraînées en vibration sur leur mode fondamental grâce à l'action d'une pastille piézoélectrique. Elles sont de plus recouvertes d'une espèce biologique (le ligand) capable de reconnaître et d'immobiliser une molécule donnée (la biomolécule). Lorsque les membranes sont en contact avec une solution aqueuse contenant des biomolécules, celles-ci sont captées par le ligand et les membranes s'en trouvent alors alourdies. En détectant les vibrations des membranes, on peut mesurer la variation de fréquence de résonance qui s'ensuit et ainsi estimer la quantité de biomolécule présente dans le liquide. Il est possible d'utiliser d'autres géométries de capteur, notamment en forme de poutre encastrée/libre [1]. Néanmoins, le choix de membranes circulaires paraît être prometteur, notamment en terme de facteur de qualité, et c'est ce qui motive la présente étude [2].

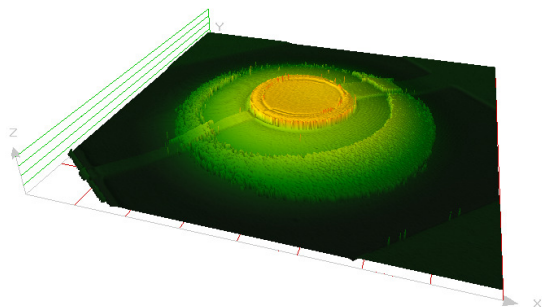


FIG. 3 – Géométrie flambée de la membrane au repos (résultats expérimentaux)

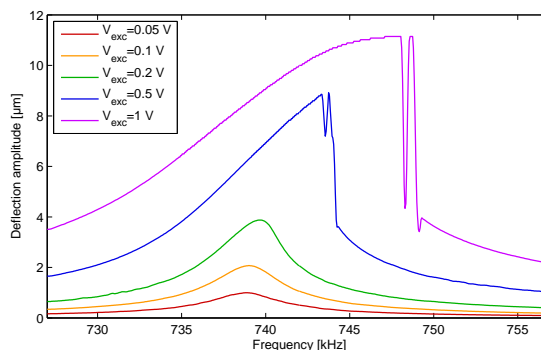


FIG. 4 – Réponse dynamique vibratoire non-linéaires (résultats expérimentaux)

À l'heure actuelle, alors que les technologies pour fabriquer un tel système sont bien maîtrisées [3], son comportement mécanique est encore mal connu et une modélisation mécanique complète est nécessaire pour affiner sa mise au point [2]. La première difficulté vient de la structure stratifiée des membranes (fig. 2). En effet, du fait du procédé de fabrication, des précontraintes positives et négatives, différentes d'une couche à l'autre, sont présentes à l'état de repos. La seconde difficulté provient de la pastille piézoélectrique circulaire placée au milieu de la membrane, qui est polarisée *après* insertion dans le système, produisant ainsi des précontraintes additionnelles. La première conséquence de ces diverses précontraintes est que l'état de repos de la membrane n'est pas plan (fig. 3). C'est cette position flambée qu'il s'agit de décrire en premier lieu.

Ensuite, le fonctionnement de la membrane consiste à l'exciter en vibration sur son mode fondamental, grâce à la pastille piézoélectrique, pour mesurer une variation de fréquence de résonance produite par un alourdissement de la membrane, dû à la capture de molécules à doser. Le modèle que l'on cherche à établir doit donc permettre d'évaluer les fréquences de résonance de la structure autour de la position de repos flambée.

Enfin, pour obtenir une mesure de variation de fréquence de résonance avec un rapport signal sur bruit correct, des premières mesures ont montré qu'il était nécessaire de faire fonctionner la membrane en régime de vibration non-linéaire de grande amplitude. Notamment, des courbes de résonance incurvées ont été observées (fig. 4), montrant des effets raidissant (courbes incurvées vers les hautes fréquences) et assouplissant (courbe incurvée vers les basses fréquences) non-négligeables.

Dans cette étude, on se propose de mettre en place le cadre général de modélisation. Ensuite, des résultats de simulations sont proposés, dans le cas d'une structure stratifiée symétrique dans l'épaisseur. La position flambée des membranes, sous l'action d'une précontrainte, est simulée, ainsi que la variation correspondante des fréquences propres et des déformées modales. Ensuite, le comportement en vibration non-linéaires autour de la position d'équilibre flambée est étudié, pour plusieurs valeurs de la précontrainte. On montre en particulier que le comportement des membranes est raidissant lorsque la membrane n'est pas flambée, alors qu'il devient assouplissant lorsque la membrane flambe.

2 Équations du mouvement

On considère une plaque circulaire stratifiée munie en son centre d'une pastille circulaire piézoélectrique (fig. 2). Les couches de silicium (Si), oxyde de silicium (SiO_2) et les électrodes de titane/platine (Ti/Pt) sont homogènes et isotropes. Ces deux électrodes, branchées à un générateur extérieur, permettent de créer dans la couche de matériau piézoélectrique (PZT) un champ électrique dirigé suivant z . Cela permet d'une part de polariser la couche PZT et d'autre part de la déformer dans la direction longitudinale (suivant e_r) pour entraîner le système en vibration. La couche PZT est constituée d'un matériau homogène et isotrope transverse dans le plan normal à z . Pour la partie mécanique, on utilise le modèle classique des plaques stratifiées [4] avec des déformations de type von Kármán. Pour la partie électrique, on suppose que le champ électrique est constant suivant z . Tout point du plan moyen de la plaque est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) . La géométrie du système est axisymétrique et composée de deux zones : la zone circulaire centrale $\mathcal{D}_1 = [0, R_1] \times [0, 2\pi[$ et la zone annulaire périphérique $\mathcal{D}_2 = [R_1, R_2] \times [0, 2\pi[$. Le domaine de la plaque est noté $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. La

plaque est supposée encadrée sur son pourtour, en $r = R_2$.

En supposant que la transformation que subit la plaque est axisymétrique, les déformations en un point de coordonnées (r, θ, z) s'écrivent $\varepsilon = \{\varepsilon_r \varepsilon_\theta\}^T = \varepsilon + z\kappa$, avec $\varepsilon = \{\varepsilon_r \varepsilon_\theta\}^T$ et $\kappa = \{\kappa_r \kappa_\theta\}^T$ et

$$\varepsilon_r = u_{r,r} + 1/2w_{,r}^2, \quad \varepsilon_\theta = u_r/r, \quad \kappa_r = -w_{,rr}, \quad \kappa_\theta = -w_{,r}/r, \quad (1)$$

où u_r est le déplacement radial et w le déplacement transverse d'un point du plan moyen. $\circ_{,r}$ représente la dérivée de \circ par rapport à r . La loi de comportement s'écrit :

$$\sigma = \mathbf{Q}(\varepsilon + z\kappa) - \sigma_{0P}\mathbf{1}, \quad \text{avec} \quad \sigma_{0P} = \sigma_0 + \frac{e_{31}}{h_p}V(t), \quad (2)$$

où $\sigma = \{\sigma_r \sigma_\theta\}^T$ est le vecteur des contraintes, \mathbf{Q} est l'opérateur de Hooke et $\mathbf{1} = \{1 \ 1\}^T$. σ_0 représente les précontraintes de fabrications, $V(t)$ est la différence de potentiel électrique entre les électrodes, e_{31} est la constante piézoélectrique et h_p est l'épaisseur de la couche PZT. En intégrant l'équation (2) suivant l'épaisseur, on obtient la loi de comportement, en terme des efforts de membrane $\mathbf{N} = \{N_r \ N_\theta\}^T$ et des moments fléchissant $\mathbf{M} = \{M_r \ M_\theta\}^T$ et des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{D} [4] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N_{0P}\mathbf{1} \\ M_{0P}\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

où N_{0P} et M_{0P} sont créés par les précontraintes et les efforts piézoélectriques issus de σ_{0P} . En inversant l'équation (3), on obtient [5] :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \\ -\mathbf{B}^{*T} & \mathbf{D}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \kappa \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}^+ N_{0P}\mathbf{1} \\ -M_{0P}\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

avec $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^* = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{D} = \mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{B}^*$, $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}_{11}^* + \mathbf{A}_{12}^*$, $\tilde{M}_{0P} = \mathbf{B}^+ N_{0P} + M_{0P}$ et $\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}_{11}^* + \mathbf{B}_{12}^*$. En injectant les équations (4) dans l'équation d'équilibre transverse et la condition de compatibilité, après adimensionnement et quelques calculs, on obtient :

$$\begin{cases} L_D(w) + \varepsilon L_B(F) + \Delta M_{0P} + \varepsilon \Delta(\mathbf{B}^+ N_{0P}) + \bar{m}\ddot{w} = \varepsilon L(w, F) + p, & (5a) \\ L_A(F) - L_B(w) + \Delta(\mathbf{A}^+ N_{0P}) = -1/2L(w, w). & (5b) \end{cases}$$

où L_A , L_B et L_D sont des opérateurs différentiels qui tiennent compte de la discontinuité des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{D} en $r = R_1$ et ε un paramètre adimensionné. Lorsque ces dernières sont indépendantes de r , $L_A(\circ) = \mathbf{A}_{11}^* \Delta \Delta \circ$, $L_B(\circ) = \mathbf{B}_{12}^* \Delta \Delta \circ$ et $L_D(\circ) = \mathbf{D}_{11}^* \Delta \Delta \circ$ avec Δ l'opérateur laplacien. $L(\circ, \circ)$ est l'opérateur bilinéaire classique associé aux équations de von Kármán [6]. \bar{m} est la masse surfacique de la plaque, \ddot{w} est la dérivée seconde de w par rapport au temps et p une pression extérieure. F est une fonction d'Airy, relié à \mathbf{N} par $N_r = F_{,r}/r$ et $N_\theta = F_{,rr}$.

Les conditions aux limites imposent d'une part que w et F soient finis en $r = 0$ et d'autre part que sur le bord, en $r = 1$: $w = 0$, $w_{,r} = 0$, $\varepsilon_\theta = 0$ et $\varepsilon_r - (r\varepsilon_\theta)_{,r} = 0$.

3 Développement modal

De la même manière que dans [6], on cherche le déplacement w et la fonction d'Airy F sous la forme des développements sur les modes propres de la structure :

$$w(r, t) = \sum_{i=1}^{N_w} \Phi_i(r) q_i(t), \quad F(r, t) = \sum_{i=1}^{N_w} \Psi_j(r) q_i(t) + \sum_{j=1}^{N_F} \Upsilon_j(r) \eta_j(t), \quad (6)$$

où N_w est le nombre de modes transverses et N_F le nombre de modes de membrane. Les $(\Phi_i, \Psi_i, \omega_i)$ sont précisément les modes propres de la structure en court-circuit ($V \equiv 0$) et non précontrainte ($N_{0P} = M_{0P} \equiv 0$). Ils sont solutions de :

$$\begin{cases} L_D(\Phi_s) + \varepsilon L_B(\Psi_s) - \bar{m}\omega_s^2 \Phi_s = 0, & (7) \\ L_A(\Psi_s) - L_B(\Phi_s) = 0, & (8) \end{cases}$$

associées de conditions aux limites encadrées. Les (Υ_j, ζ_j) sont solutions de :

$$L_A(\Psi_s) - \zeta_s^4 \Upsilon_s = 0, \quad (9)$$

associées de conditions aux limites appropriées.

En introduisant les équations (6) dans les équations du mouvement (5a) et (5b) et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes propres, on obtient le système suivant, vérifié dont les inconnues sont les coordonnées modales $q_i(t), \eta_j(t), i = 1 \dots N_w, j = 1 \dots N_F$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_j = -n_0^j - n_P^j V - \sum_{p,q=1}^{N_w} G_{pq}^j q_p q_q, \quad (10a) \\ \ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_s \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -A_0^i - A_P^i V - \sum_{p=1}^{N_F} C_p^i \eta_p + \sum_{p,q=1}^{N_w} D_{pq}^i q_p q_q + \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} E_{pq}^i q_p \eta_q + Q_i \quad (10b) \end{array} \right.$$

Un terme d'amortissement modal a été ajouté (ξ_i est le facteur d'amortissement du i -ième mode). Tous les coefficients qui apparaissent dans les équations précédentes ($n_0^j, n_P^j, G_{pq}^j, A_0^i, A_P^i, C_p^i, D_{pq}^i$ et E_{pq}^i) sont des fonctions des $(\Phi_i, \Psi_i, \omega_i, \Upsilon_j, \zeta_j)$, connues analytiquement, non précisés ici par souci de concision. Q_i correspond au forçage extérieur modal.

Les équations aux dérivées partielles initiales (5a,5b) ont été remplacées par le problème discrétisé (10a,10b) (équivalent si N_w et N_F sont infinis) constitués d'équations différentielles couplées par des termes non-linéaires quadratiques. Ces termes, qui couplent les équations de flexion (10b) et les équations de membrane (10a) représentent le couplage flexion/membrane à la source des non-linéarités géométriques du problème. On peut éliminer les coordonnées de membrane η_j entre les deux équations et obtenir un problème avec non-linéarités quadratiques et cubiques ne faisant intervenir que les q_i , formulation classique des équations de plaque et de coque de type von Kármán [6, 7]. Ici, c'est la résolution avec la méthode asymptotique numérique, qui impose les non-linéarités quadratiques, qui nous conduit à garder la formulation sous cette forme.

4 Résolution

Pour résoudre le problème et simuler à la fois le flambage et les vibrations non-linéaires, on décompose les variables en une partie statique ($\hat{q}_i, \hat{\eta}_j, \hat{V}$), qui représente la solution du problème soumis à la précontrainte, et en une partie dynamique ($\tilde{q}_i, \tilde{\eta}_j, \tilde{V}$), qui se rapporte aux oscillations autour de cette solution précontrainte. On écrit alors :

$$q_i(t) = \hat{q}_i + \tilde{q}_i(t), \quad \eta_j(t) = \hat{\eta}_j + \tilde{\eta}_j(t), \quad V(t) = \hat{V} + \tilde{V}(t), \quad (11)$$

La partie statique de la solution est obtenue en insérant les équations (11) dans (10a,10b) et en annulant tous les termes dépendant du temps. On obtient alors un système d'équations non-linéaires algébriques qui permet de calculer les \hat{q}_i et $\hat{\eta}_j$ et ainsi le déplacement statique \hat{w} de la membrane à partir des équations (6), sous l'action des précontraintes introduites par les termes n_0^j et A_0^i (les précontraintes de fabrication), $n_P^j \hat{V}$ et $A_P^i \hat{V}$ (le chargement statique piézoélectrique). Si une solution \hat{w} non-nulle est obtenue, alors il y a flambage. Ensuite, la partie dynamique du problème (les $\tilde{q}_i(t)$ et $\tilde{\eta}_j(t)$) est solution d'un système similaire aux équations (10), dont les coefficients dépendent des \hat{q}_i et $\hat{\eta}_j$.

D'un point de vue pratique, la méthode de résolution suivante est suivie. La première étape consiste à calculer numériquement les coefficients $n_0^j, n_P^j, G_{pq}^j, A_0^i, A_P^i, C_p^i, D_{pq}^i$ et E_{pq}^i . Pour cela, les $(\Phi_i, \Psi_i, \omega_i, \Upsilon_j, \zeta_j)$ sont calculés à partir d'expressions semi-analytiques (à partir de fonctions de Bessel), en considérant la structure comme deux plaques annulaires connectés en $r = R_1$. Dans une seconde étape, le système statique est résolu par la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) [8] implémentée dans le logiciel matlab [9]. Cela permet d'obtenir :

- la géométrie de la membrane *précontrainte*,
- les fréquences propres et les déformées modales de la structure *précontrainte*, en diagonalisant la partie linéaire du système dynamique.

La troisième étape est le calcul de la solution en régime forcé harmonique (les $\tilde{q}_i, \tilde{\eta}_j$). Pour cela, le forçage extérieur s'écrit soit $Q_i(t) = Q_{im} \cos \Omega t$ (si c'est une force) ou $\tilde{V}(t) = V_m \cos \Omega t$ (si le système est excité par la couche piézoélectrique) et on cherche une solution périodique du système dynamique par équilibre harmonique, sous la forme :

$$\tilde{q}_i(t) = q_i^{(0)} + \sum_{h=1}^H \left(q_i^{c(h)} \cos h\Omega t + q_i^{s(h)} \sin h\Omega t \right), \quad \tilde{\eta}_j(t) = \eta_j^{(0)} + \sum_{h=1}^H \left(\eta_j^{c(h)} \cos h\Omega t + \eta_j^{s(h)} \sin h\Omega t \right). \quad (12)$$

où H est le nombre d'harmoniques retenues. En introduisant les équations précédentes dans le système dynamique, on obtient un système algébrique non-linéaire d'inconnues $q_i^{(0)}, q_i^{c(h)}, q_i^{s(h)}, \eta_j^{(0)}, \eta_j^{c(h)}, \eta_j^{s(h)}, i = 1 \dots N_w, j = 1 \dots N_F, h = 1 \dots H$, que l'on résout avec la MAN [10]. Cela permet d'obtenir les courbes de résonance du système, présentées au paragraphe suivant.

5 Premiers résultats : structure à stratification symétrique

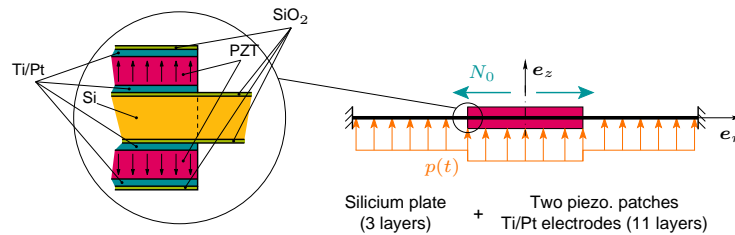


FIG. 5 – Schéma du système

On s'intéresse à la structure représentée sur la figure 5 : une plaque en silicium et oxyde de silicium munie de deux éléments piézoélectriques similaires. La région centrale est composée de 11 couches et la zone annulaire de 3 couches. Ce système, bien que difficile à réaliser de manière pratique, est considéré ici en préliminaire à des études futures, car sa stratification est symétrique, ce qui permet de simplifier les calculs (la matrice de couplage flexion/membrane B est nulle, ce qui impose aussi $C_p^s = D_{pq}^s = 0$). Le système est soumis à une précontrainte statique N_0 , en imposant la même différence de potentiel aux deux couches PZT. Ensuite, un chargement sinusoïdal sous la forme d'une pression uniforme $p(t) = p_0 \cos \Omega t$ est imposé.

La réponse statique de la membrane est représentée sur la figure 6. On montre que pour une valeur critique de N_0 (autour de 200), on observe un flambage de la structure. Les profils obtenus pour plusieurs valeurs de N_0 sont aussi représentés, montrant l'influence non-négligeable de la raideur des pastilles (on observe une brusque variation de la pente du profil aux alentours de $r = 0.3$, le rayon des pastilles).

La réponse dynamique, en terme de courbe de résonance, est représentée sur la figure 7, pour plusieurs valeurs de N_0 et de p_0 . On obtient des courbes incurvées vers les hautes fréquences (comportement raidissant) en dessous de la charge critique de flambage, lorsque la déformée statique est plane. On observe aussi que les fréquences propres diminuent lorsque N_0 augmente. Ensuite, lorsque la charge critique est dépassée (dans ce cas la première fréquence propre passe par zéro et se met à augmenter ensuite), le comportement non-linéaire devient assouplissant (courbe incurvée vers les basses fréquences). Cela est un résultat classique pour les structures non-planes comme les coques [11].

Enfin, la figure 7 montre aussi les oscillations du centre de la membrane au cours du temps, à la résonance, pour une valeur de N_0 provoquant le flambage. On observe une certaine dissymétrie, qui se retrouve sur l'évolution de profil de la membrane au cours d'une oscillation. Le diagramme de convergence montre que $H = 5$ harmoniques et $N_w = 3$ modes sont suffisants pour simuler correctement le comportement du système.

Références

- [1] Nicu L. and Bergaud C. Modeling of a tuning fork biosensor based on the excitation of one particular resonance mode. *J. Micromech. Microeng.*, 14, 1–10, 2004.
- [2] Ayela C. and Nicu L. Micromachined piezoelectric membranes with high nominal quality factors in newtonian liquid media : a lamb's model validation at the microscale. *Sens. Act. B Chem.*, 123(2), 860–868, 2006.
- [3] Nicu L., Guirardel M., Chambosse F., Rougerie P., Hinh S., Trevisiol E., François J.-M., Majoral J.-P., Caminade A.-M., Cattani E., and Bergaud C. Resonating piezoelectric membranes for microelectromechanically-based bioassay : detection of streptavidin-gold nanoparticles interaction with biotinylated dna. *Sens. Act. B Chem.*, 110(1), 125–136, 2005.
- [4] Reddy J. N. *Mechanics of laminated composite plates*. CRC press, 1997.
- [5] Chia C. Y. *Nonlinear analysis of plates*. Mc Graw Hill, 1980.
- [6] Thomas O. and Bilbao S. Geometrically non-linear flexural vibrations of plates : in-plane boundary conditions and some symmetry properties. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3), 269–590, 2008.
- [7] Camier C., Touzé C., and Thomas O. Non-linear vibrations of imperfect free-edge circular plates and shells. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 2009. In press.
- [8] Cochelin B., Damil N., and Potier-Ferry M. *Méthode asymptotique numérique*. Hermès, 2007. In french.
- [9] Arquier R. *Manlab : logiciel de continuation interactif (manuel utilisateur)*. Technical report, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS, <http://www.lma.cnrs-mrs.fr/~manlab>, 2005. In french.
- [10] Cochelin B. and Vergez C. A high order purely frequential harmonic balance formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 2009. To appear.
- [11] Touzé C. and Thomas O. Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells : effect of the geometry. *International Journal of non-linear Mechanics*, 41(5), 678–692, 2006.

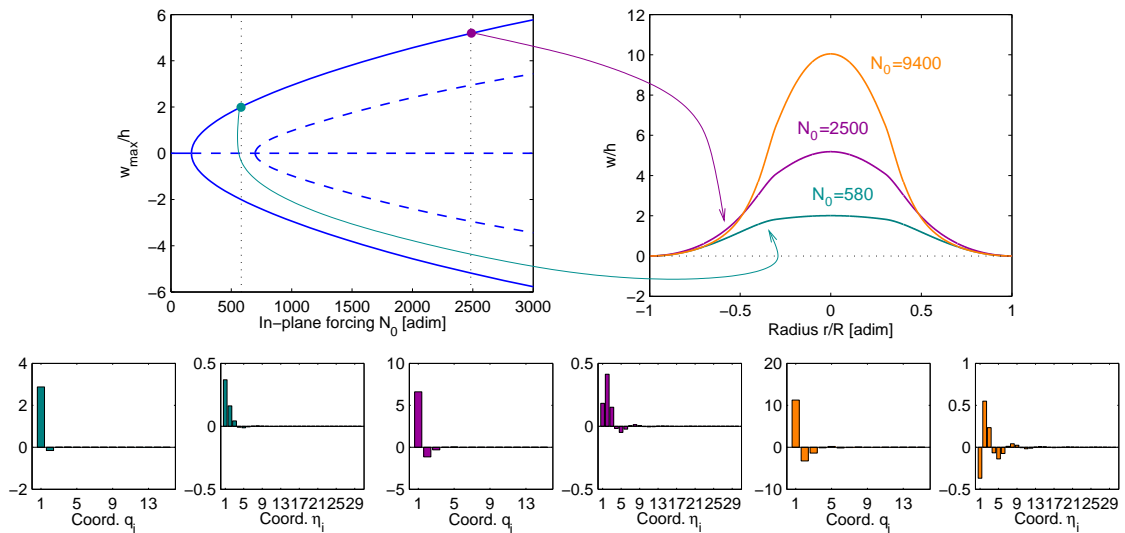


FIG. 6 – Déplacement transverse du centre de la membrane en fonction de la précontrainte N_0 . Déformées statiques en flambage, pour plusieurs précontraintes N_0 ; diagrammes de convergence (amplitude des \hat{q}_i et $\hat{\eta}_j$)

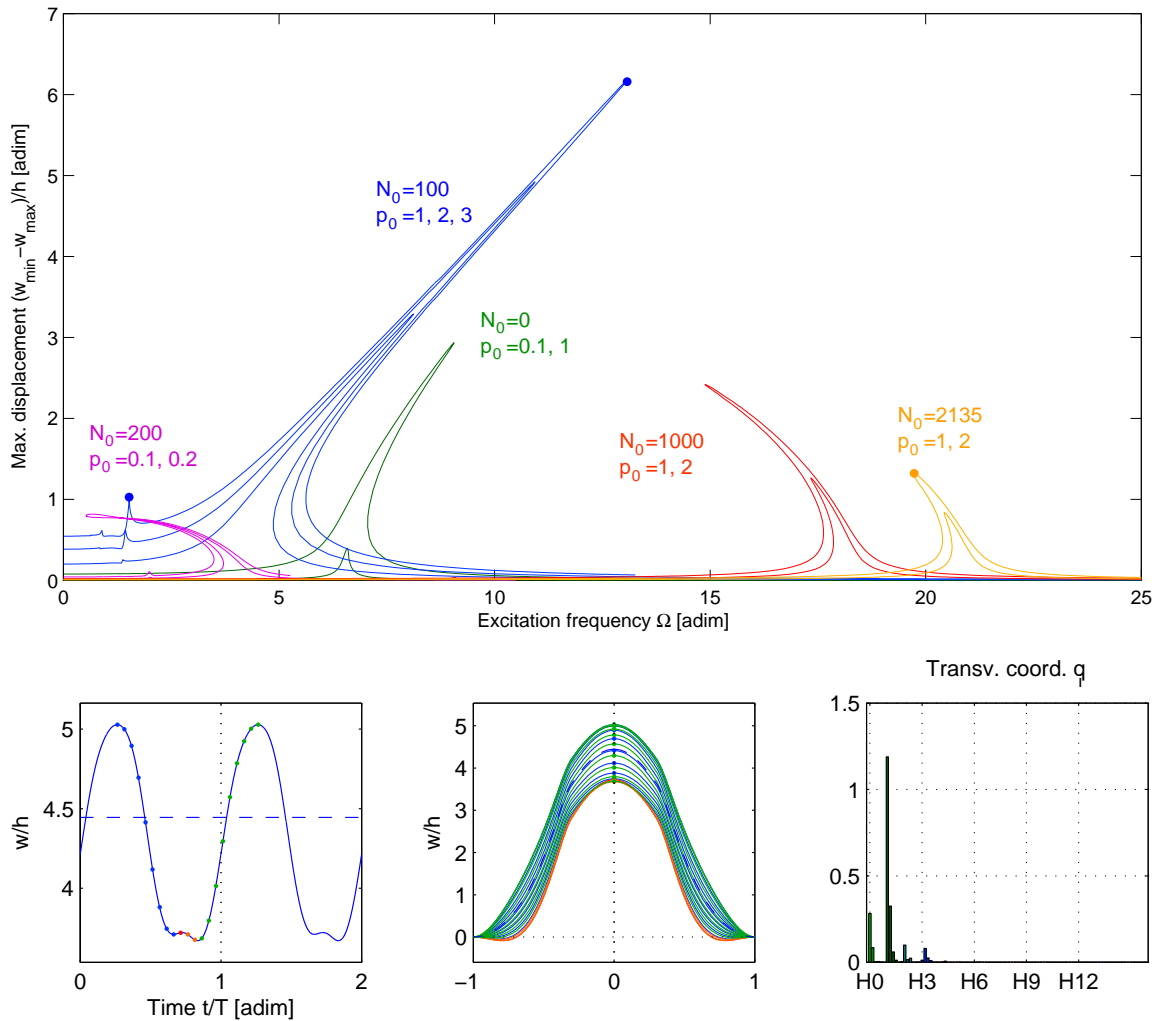


FIG. 7 – Réponse en fréquence autour de la première résonance, pour plusieurs précontraintes N_0 et plusieurs amplitudes p_0 du forçage. Oscillations à la résonance, autour de la position statique flambée, pour $N_0 = 2135$; profil de la déformé à différents instants ; convergence du calcul : amplitude des $q_i^{(0)}$, $q_i^{c(h)}$, $q_i^{s(h)}$.