



**HAL**  
open science

# Résolution de problèmes de contact avec la Méthode Asymptotique Numérique

Fabien Béchet, Hakim Boudaoud, Arnaud Lejeune, Michel Potier-Ferry

► **To cite this version:**

Fabien Béchet, Hakim Boudaoud, Arnaud Lejeune, Michel Potier-Ferry. Résolution de problèmes de contact avec la Méthode Asymptotique Numérique. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03391403

**HAL Id: hal-03391403**

**<https://hal.science/hal-03391403>**

Submitted on 21 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Résolution de problèmes de contact et de frottement avec la Méthode Asymptotique Numérique

F. BÉCHET<sup>a</sup>, H. BOUDAUD<sup>a</sup>, A. LEJEUNE<sup>a</sup>, M. POTIER-FERRY<sup>a</sup>

*a. Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux - Ile du Saulcy - 57045 Metz cedex 01*

## Résumé :

*Le transport de bandes minces métalliques apparaît dans divers procédés de fabrication : recuit continu, planage, galvanisation. Différents phénomènes non linéaires entrent en jeu dont notamment le contact avec frottement. Dans le cadre du projet ANR Instabande, nous développons une méthode pour résoudre ce type de problèmes de mécanique utilisant des éléments finis de coques et la Méthode Asymptotique Numérique. Nous présenterons les dernières avancées.*

## Abstract :

*Thin metallic sheets transportation is used in numerous manufacturing processes such as continuous annealing, levelling or galvanization. It involves various non linear phenomena and in particular contact with friction. Within the project ANR Instabande, we develop a method to solve this kind of mechanical problems, using shell finite elements and the Asymptotic Numerical Method. We will present the latest breakthroughs.*

**Mots clefs :** Mécanique du contact, Frottement, Coques, Méthode Asymptotique Numérique

## 1 Introduction

Dans les usines sidérurgiques, le transport de bandes métalliques fines est assuré par un système composé de rouleaux. Ce procédé met en jeu différents phénomènes non linéaires : grands déplacements, plasticité et contact avec frottement. Dans le cadre du projet ANR Instabande, nous développons un logiciel Eléments Finis traitant ces non linéarités par la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) [1][2]. L'objectif est de prédire l'apparition de plis (zones plastifiées) survenant lors du transport [3]. Ceux-ci sont dus à un phénomène de flambement provoqué par la mise sous tension de la tôle mince [4]. Il a été montré que le frottement qui existe entre le rouleau et la tôle joue un rôle majeur dans ce processus [5].

Notre travail se décompose en deux étapes principales. La première est la mise en place d'un modèle Eléments Finis de coques en grandes rotations avec prise en compte du contact unilatéral mais sans frottement. Le modèle de coques utilisé est détaillé dans [6][7]. Le problème est résolu avec la MAN. Cette technique a déjà été mise en œuvre séparément avec les éléments coques [7] et sur la modélisation du contact [8]. L'originalité du travail réside donc dans le couplage coque/contact.

La deuxième étape consiste à prendre en compte le frottement entre la coque et les rouleaux. La loi de frottement relie la vitesse de glissement à la réaction tangentielle. Le couplage de cette loi avec la formulation éléments finis de départ et la loi de contact conduit à résoudre un problème algébrique pour le contact normal et un problème différentiel pour le frottement. Cette difficulté n'est pas présente dans le cadre d'un comportement rigide viscoplastique pour lequel une formulation en vitesse a déjà été mise en œuvre avec la MAN [9]. On étudie tout d'abord un problème de frottement pour un système masse ressort afin de comprendre quelles sont déjà les difficultés rencontrées pour ce problème simplifié.

## 2 Implantation du contact dans le modèle de coques EAS

### 2.1 Formulation du problème

On se place dans le cadre d'une formulation tridimensionnelle de coque. Afin de limiter les effets du verrouillage numérique, nous utilisons une méthode mixte, nommée Enhanced Assumed Strain (EAS) [6]. A partir de la formulation de Hu-Washizu, une variable supplémentaire de déformation incompatible avec le déplacement est introduite. Le champ de déformation s'écrit alors sous la forme :

$$\gamma = \gamma_l + \gamma_{nl} + \tilde{\gamma} \quad (1)$$

où  $\gamma_l$  et  $\gamma_{nl}$ , désigne respectivement la partie compatible linéaire et la partie compatible non linéaire de la déformation,  $\tilde{\gamma}$  représentant la partie incompatible. Nous prenons en compte par la suite le contact à l'aide de

la méthode des multiplicateurs de Lagrange et sous une forme régularisée classique. Les équations d'équilibre en formulation quasi-statique et la loi de contact unilatéral, pour une coque en contact avec un corps rigide, se réduisent à la résolution du système :

$$\text{- Équation d'équilibre : } \int_{\Omega} S : \delta \gamma \, d\Omega = \lambda \left( \int_{\Omega} f_v \delta u \, d\Omega + \int_{\partial\Omega^s} f_s \delta u \, d\Gamma \right) + \int_{\partial\Omega^c} R^N \vec{n} \delta u \, d\Gamma \quad (2)$$

où  $S$  est le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff,  $R^N$  la réaction normale de contact et  $f_v$  et  $f_s$  les efforts appliqués.

$$\text{- Loi de contact pénalisée régularisée : } R^N \left( \frac{R^N}{K} + h \right) = \eta(\delta - h) \text{ sur } \partial\Omega^c \quad (3)$$

où  $K$  est un coefficient de pénalisation,  $\eta$  un paramètre de régularisation,  $h$  la distance entre un noeud et l'obstacle et  $\delta = h_{\text{initiale}}$ .

$$\text{- Orthogonalité de } \tilde{\gamma} \text{ avec } S : \int_{\Omega} S : \tilde{\gamma} \, d\Omega = 0 \text{ sur } \Omega \quad (4)$$

À ces équations, s'ajoute la loi de comportement (élastique linéaire à ce stade), les conditions aux limites et des équations géométriques permettant de déterminer  $h$  et  $\vec{n}$ . Nous résolvons le problème précédent au moyen de la MAN en utilisant les développements pour le contact unilatéral défini dans [2].

## 2.2 Exemple

Nous présentons ici un exemple proche de la simulation du transport de bandes : nous considérons le contact entre une plaque et un obstacle de forme cylindrique, indéformable et fixe (FIG. 1).

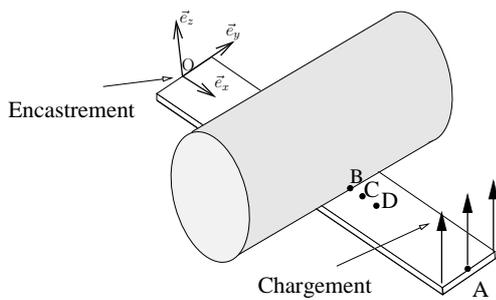


FIG. 1 – Problème considéré

### Données du problème

longueur de la coque = 2 m  
 largeur de la coque = 0,2 m  
 épaisseur de la coque = 0,0008 m  
 diamètre du cylindre = 1 m  
 centre du cylindre : (1; 0; 0,5001)  
 $E = 200\,000 \text{ MPa}$ ;  $\nu = 0,3$   
 $h_{\text{initiale}} = 0,0001 \text{ m}$   
 $K = 10^9 \text{ MPa/m}$ ;  $\eta = 10^{-2} \text{ MPa}$   
 $A = (2; 0; 0)$   $B = (1; 0; 0)$   
 $C = (1,1; 0; 0)$   $D = (1,2; 0; 0)$

La plaque est encadrée à une extrémité. Elle est soumise à son autre extrémité à trois forces ponctuelles de même intensité  $F = 10\lambda$  avec  $\lambda = 10^{-3} t$ . A titre de validation nous comparons tout d'abord le déplacement du point A suivant l'axe z obtenu au moyen de notre modèle à celui obtenu avec un modèle développé sous Abaqus utilisant des éléments de coque mince de type S8R. Les résultats des deux modèles sont très proches.

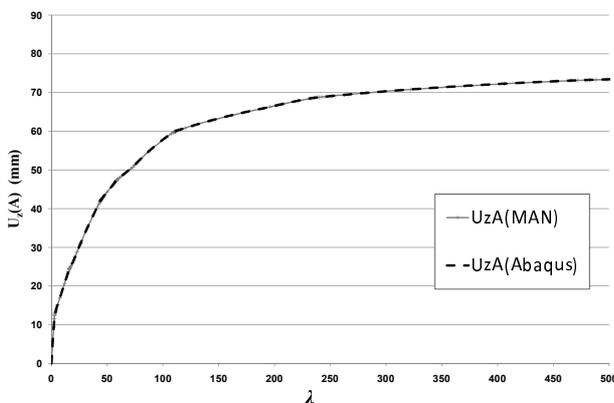


FIG. 2 – Comparaison du déplacement  $U_z$  en A

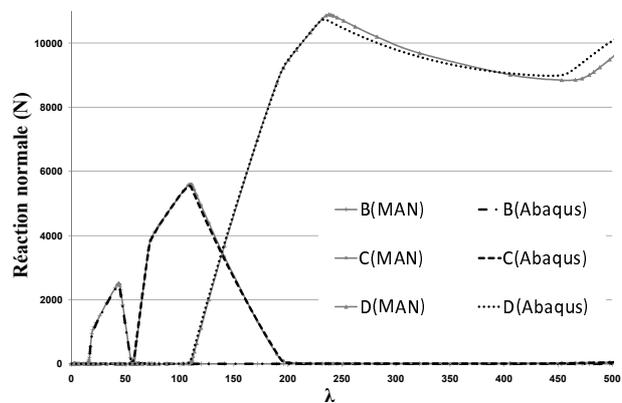


FIG. 3 – Comparaison des forces de contact

Finalement, nous comparons FIG. 3 les forces de contact obtenues aux noeuds B, C, D (FIG. 1) par les deux modèles en fonction du paramètre de chargement. Nous observons FIG. 3 une très bonne adéquation entre les forces de contact obtenues avec les deux modèles. Cela montre donc que l'approche proposée est valide et applicable à la simulation du transport de bandes. Il reste toutefois à prendre en compte le frottement.

### 3 Introduction des effets de frottement sec

Après avoir introduit le contact unilatéral dans le modèle de coque, la seconde étape consiste à prendre en compte les effets mécaniques dus au frottement sec. Classiquement, ces effets sont décrits par le modèle de type Coulomb reliant la force tangentielle  $R^T$ , la force normale  $R^N$  et la vitesse de glissement  $v^s$  entre les deux solides en question. La résolution de ce problème implique plusieurs difficultés :

- La loi de frottement classique n'est pas analytique.
- La vitesse intervient dans les équations de frottement. On doit alors résoudre une équation différentielle.
- Le frottement doit être traité dans un repère local qui bouge au cours du temps.

On s'attache ici à prendre en compte ces trois difficultés progressivement. Nous considérons tout d'abord des problèmes ponctuels de type masse-ressort en une dimension puis deux dimensions.

#### 3.1 Loi de frottement utilisée

Pour résoudre un problème de frottement avec la MAN, il faut que la loi de frottement soit analytique. Ainsi, on utilise une loi "puissance" régularisée [10] :

$$R^T = -fR^N \frac{|v^s|_{reg}^{q-1}}{V_c^q} v^s \quad (5)$$

où  $f$  et  $v^s$  représentent respectivement le coefficient de frottement et la vitesse de glissement entre ces deux solides. De plus, pour éviter la singularité en  $v^s = 0$ , la norme de  $v^s$  est régularisée :

$$|v^s|_{reg} = \sqrt{v^s \cdot v^s + \omega^2 V_c^2} \quad (6)$$

où  $\omega$  est un paramètre de régularisation et  $V_c$  une vitesse caractéristique du problème. Pour  $q \neq 0$ , la force de frottement dépend du module de la vitesse. Pour  $q = 0$ , on retrouve le modèle de Coulomb (voir FIG. 4).

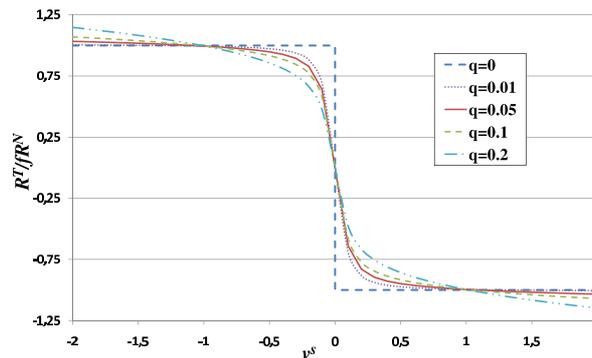


FIG. 4 – Loi de frottement pour différentes valeurs de  $q$

Ainsi, on a une loi analytique : elle est infiniment dérivable en 0 et ne présente plus de palier non-inversible. Les efforts de réaction se trouvent alors en dehors du cône de frottement (au sens de Coulomb) quand la vitesse de glissement est élevée (supérieure à  $V_c$ ).

#### 3.2 Résolution d'une équation différentielle avec la MAN

On considère en premier lieu un problème de frottement unidimensionnel : un système masse-ressort est posé sur un plan rigide mobile (de vitesse  $V = 1 \text{ m.s}^{-1}$ ). La réaction normale, notée  $R^N$ , est supposée connue. En considérant que  $v^x - V < 0$ , ce problème peut se ramener à une équation différentielle non linéaire du premier ordre en  $u^x$  (déplacement dans la direction  $x$ ) par rapport au temps  $t$  qui s'écrit

$$ku^x + fR^N \frac{|v^x - V|_{reg}^{q-1}}{V_c^q} (v^x - V) = 0 \quad (7)$$

Pour résoudre cette équation différentielle avec la MAN,  $u^x$  et  $v^x$  sont développés en séries entières :

$$u^x = \sum_{p=0}^N (u_p^x)(t - t_0)^p \quad \text{et} \quad v^x = \sum_{p=0}^N (v_p^x)(t - t_0)^p \quad (8)$$

La vitesse  $v^x$  est prise comme inconnue, qui, étant la dérivée de  $u^x$  satisfait la relation à l'ordre  $p$  :

$$v_p^x = (p + 1)u_{p+1}^x \tag{9}$$

Ainsi, à l'ordre  $p$ , connaissant  $u_p^x$ , on calcule  $v_p^x$  avec l'équation différentielle développée, puis on en déduit  $u_{p+1}^x$  avec (9) et ainsi de suite. La principale difficulté se situe donc à l'ordre 0 du premier pas. Si on considère que le déplacement initial est une donnée ( $u_0^x = 0$ ),  $v_0^x$  est solution d'une équation non linéaire correspondant à l'ordre 0. Aux ordres suivants, il n'y aura qu'à résoudre un problème linéaire. Pour déterminer  $v_0^x$  au premier pas, on utilise donc une méthode de type Newton. Sur la figure 5 sont présentés les résultats numériques obtenus pour  $q = 0,05$ . On prend comme référence la courbe donnée par MAPLE pour  $\omega = 0$  (pas de régularisation de la norme de  $v^s$ ). Les résultats "MAN" ont été obtenus pour  $\omega = 0, 1$  et  $V_c = 1 \text{ m.s}^{-1}$ .

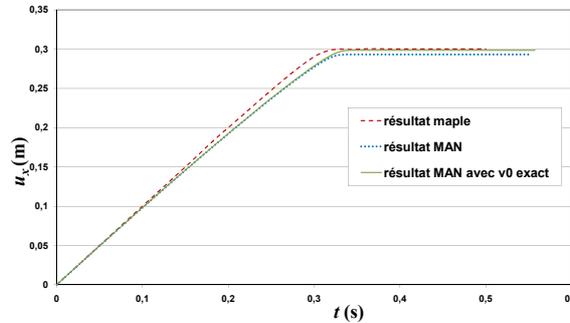


FIG. 5 – Déplacement  $u^x$  en fonction du temps

L'effet de la régularisation se fait sentir lorsque la vitesse de glissement passe de zéro à une valeur non nulle. C'est ce qui se passe entre  $t = 0,1 \text{ s}$  et  $t = 0,3 \text{ s}$  où il y a un écart entre la courbe MAPLE et les deux courbes MAN. La comparaison entre les deux courbes MAN montre l'importance de l'initialisation dans ce type de problème. Lorsque l'initialisation est faite avec la méthode de Newton (précision  $10^{-5}$ ), il y a un écart significatif (environ 2,3%) au niveau de la position d'équilibre (c'est-à-dire le plateau). Si on entre la valeur exacte ( $v_0^x = V$  ici), l'écart n'est plus que de 0,5% avec le résultat MAPLE, cet écart relevant de la régularisation.

### 3.3 Contact avec un plan mobile

Nous étudions maintenant le problème bidimensionnel schématisé FIG. 6. Nous considérons un système

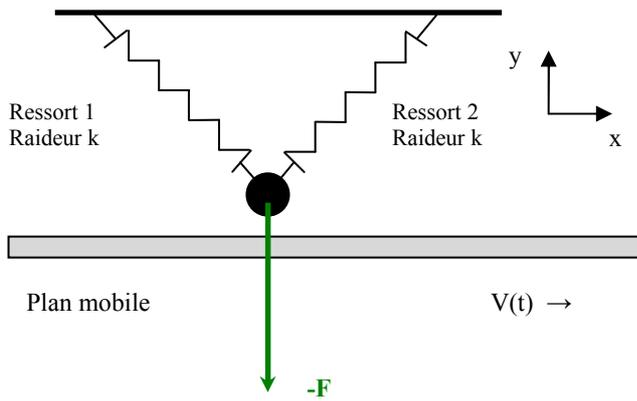


FIG. 6 – Masse en contact avec un plan mobile

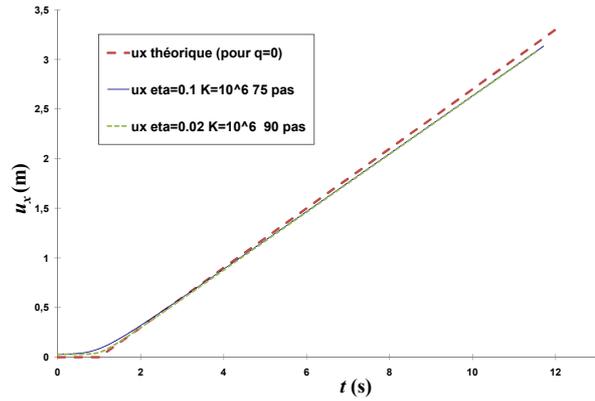


FIG. 7 – Déplacement  $u^x$  en fonction du temps

masse-ressorts (les ressorts sont à  $45^\circ$  et supposés très longs par rapport aux autres dimensions du problème). A l'état initial, la masse se trouve à une distance  $\delta = 1 \text{ m}$  d'un plan rigide se translatant horizontalement à une vitesse  $V = 1 \text{ m.s}^{-1}$ . A  $t = 0$ , on applique à la masse une force proportionnelle au temps. On considère le problème quasi-statique et on a donc le système (l'équation de frottement est projetée sur  $\vec{e}_x$  et devient scalaire)

$$\begin{cases} -ku^x + R^T = 0 & (a) \\ -ku^y + R^N = Ft & (b) \\ R^N \left( \frac{R^N}{K} + h \right) = \eta(\delta - h) \text{ avec } h = \delta + u^y & (c) \\ R^T = -fR^N |v_{reg}^{q-1} v^s & (d) \end{cases} \tag{10}$$

On voit que pour ce problème, parties normale et tangentielle sont quasiment découplées, la réaction normale  $R^N$  étant nécessairement selon  $\vec{e}_y$  et la réaction tangentielle  $R^T$  selon  $\vec{e}_x$ . On peut résoudre la partie normale indépendamment puis résoudre la partie tangentielle en prenant en compte la valeur de  $R^N$ . Ainsi on a une équation algébrique (partie normale, équations (10.b) et (10.c)) et une équation différentielle (partie tangentielle, équations (10.a) et (10.d)) que l'on peut résoudre successivement.

La résolution du problème par la MAN commence par le calcul des inconnues à l'ordre 0. En particulier, on évalue  $v_0^s = v_0^x - V_0$ . D'après (9), on en déduit  $u_1^x$  et donc  $R_1^T$  (10.a). On peut également résoudre le problème normal où on a deux équations pour deux inconnues ( $h$  ne dépendant que de  $u^y$ ). La dernière équation (10.d) sert à évaluer  $v_1^s$  et donc  $u_2^x$ , ce qui permettra de résoudre le problème à l'ordre 2 de la même façon.

Si l'on résout le problème sous cette forme avec la MAN, la résolution du premier ordre sera impossible car la matrice tangente est non inversible. Ceci est dû au fait que  $R^N$  est nul au départ et il n'est donc pas possible de déduire la vitesse de l'équation de frottement. Il faut donc régulariser  $R^N$  dans l'équation de frottement :

$$R^T = -f |R^N|_{reg} |v^s|_{reg}^{q-1} v^s \quad (11)$$

avec  $|R^N|_{reg} = \sqrt{(R^N)^2 + \zeta^2}$ ,  $\zeta$  étant un paramètre de régularisation. On garde les mêmes paramètres de régularisation que précédemment et on prend  $\zeta = 0,1 N$ . Le déplacement  $u^x$  est comparé FIG. 7 avec un résultat analytique obtenu pour  $q = 0$ . On voit l'effet de la régularisation au moment du contact vers  $t = 1 s$ . Après  $t = 1 s$ , il y a contact et frottement, la masse est entraînée de plus en plus loin du fait de la force croissante. La pente est légèrement plus faible que dans le cas analytique, cela est dû au fait que  $q = 0,05$ .

### 3.4 Contact avec obstacle circulaire en rotation

Nous considérons le même problème que précédemment mais l'obstacle est maintenant de forme circulaire et tourne sur lui-même (FIG. 8). L'obstacle rigide, de rayon  $r = 1 m$ , et tourne à une vitesse de  $\Omega = 1 rad.s^{-1}$ .

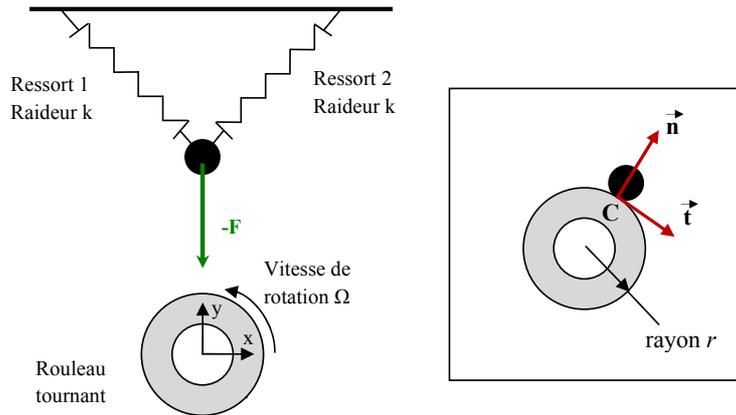


FIG. 8 – Masse en contact avec obstacle circulaire en rotation

Si nous projetons l'équation d'équilibre sur  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  comme précédemment, nous n'avons plus un problème découplé, parties algébrique et différentielle sont mélangées. Une possibilité est de projeter l'équilibre sur la normale  $\vec{n}$  et la tangente  $\vec{t}$ . Une autre possibilité, celle que nous avons choisie, est de projeter l'équilibre sur la normale  $\vec{n}_0$  et la tangente  $\vec{t}_0$  en début de pas. On projette également le vecteur déplacement et le vecteur vitesse sur la normale  $\vec{n}_0$  et la tangente  $\vec{t}_0$  :

$$u = u^n \vec{n}_0 + u^t \vec{t}_0 \quad v = v^n \vec{n}_0 + v^t \vec{t}_0 \quad (12)$$

Ces deux projections apparaissent naturellement dans les équations. En prenant  $u^n$  et  $u^t$  comme nouvelles inconnues on se ramène aux équations d'équilibre :

$$-ku^n + R^N \vec{n} \cdot \vec{n}_0 + R^T \vec{t} \cdot \vec{n}_0 = \lambda F \cdot \vec{n}_0 \quad (13)$$

$$-ku^t + R^N \vec{n} \cdot \vec{t}_0 + R^T \vec{t} \cdot \vec{t}_0 = \lambda F \cdot \vec{t}_0 \quad (14)$$

Ainsi, à l'ordre 1, on a

$$-ku_1^n + R_1^N + R_0^T \vec{t}^1 \cdot \vec{n}_0 = \lambda_1 F \cdot \vec{n}_0 \quad (15)$$

$$-ku_1^t + R_0^N \vec{n}^1 \cdot \vec{t}_0 + R_1^T = \lambda_1 F \cdot \vec{t}_0 \quad (16)$$

Le fait de projeter les équations d'équilibre et le déplacement sur  $\vec{n}_0$  et  $\vec{t}_0$  est donc suffisant pour découpler les deux problèmes à l'ordre courant, il subsiste un couplage entre les ordres précédents mais ceux-ci sont déjà connus. Ainsi, plus généralement à l'ordre  $p$ , connaissant les ordres précédents, on se ramène à un problème que l'on peut traiter d'une manière similaire à celui de la section 3.3 où parties "normale" et "tangentielle" sont bien séparées. Il faut cependant tenir compte que  $h_p$ ,  $\vec{n}_p$  et  $\vec{t}_p$  sont des inconnues ici et il faut donc d'abord résoudre le problème normal qui nous donne ces trois inconnues pour ensuite en déduire  $R_p^T$  puis  $v_p^s$ . La vitesse de glissement, en projection sur  $\vec{t}$ , s'écrit ici  $v^s = v \cdot \vec{t} + \Omega r$ .

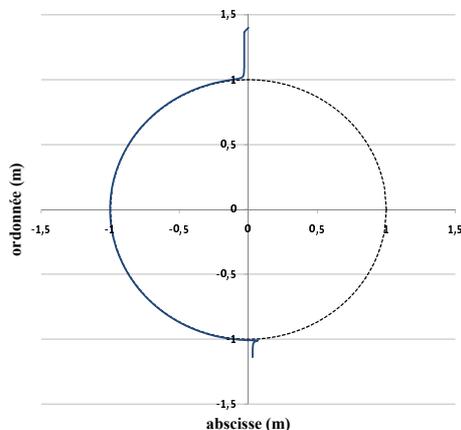


FIG. 9 – Trajectoire de la masse

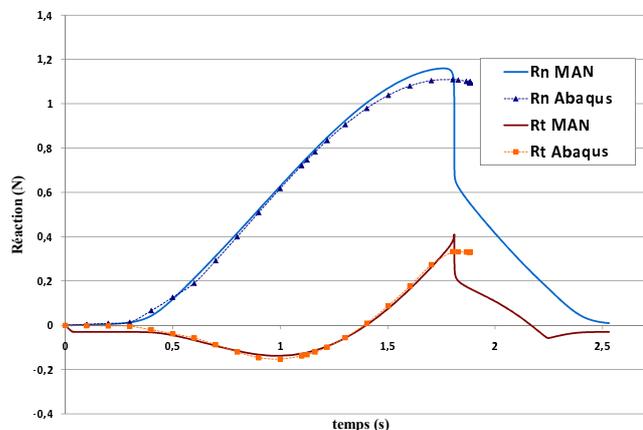


FIG. 10 – Réactions de contact en fonction du temps

Les figures 9 et 10 montrent les résultats obtenus. La trajectoire de la masse est tout à fait cohérente. Le léger décalage avant et après le contact par rapport à l'axe  $x = 0$  est dû à la régularisation de  $R^N$  dans l'équation de frottement (11). Les réactions de contact sont très proches de celles obtenues avec un modèle Abaqus/standard (la masse étant négligée) qui cependant n'arrive pas à converger vers  $t = 1,8$  s, où une singularité est mise en évidence avec la simulation MAN. La différence au niveau de  $R^T$  avant  $t = 0,4$  s est aussi due à la régularisation de  $R^N$ .

## 4 Conclusion

Dans cette étude, nous avons mis en place un modèle éléments finis de coque en grandes rotations avec contact unilatéral dans le but de simuler le transport de bande. Afin d'enrichir le modèle par la prise en compte du frottement, nous avons considéré des problèmes ponctuels de type masse-ressort qui nous ont permis de comprendre certains mécanismes concernant notamment le caractère différentiel du problème. Nous sommes actuellement en train d'incorporer, moyennant quelques adaptations, ces développements au modèle éléments finis.

## Références

- [1] Cochelin B., Damil N., and Potier-Ferry M. The asymptotic numerical method, an efficient perturbation technique for non-linear structural mechanics. *Rev. Eur. Eléments Finis*, 3, 281–297, 1994.
- [2] Cochelin B., Damil N., and Potier-Ferry M. *Méthode asymptotique numérique : une technique de résolution des équations non linéaires*. Hermès Science Publishing, Paris, Londres, 2007.
- [3] Jacques N., Elias A., Potier-Ferry M., and Zahrouni H. Buckling and wrinkling during strip conveying in processing lines. *Journal of Materials Processing Technology*, 190, 33–40, 2007.
- [4] Jacques N. and Potier-Ferry M. On mode localisation in tensile plate buckling. *C. R. Mécanique*, 333, 804–809, 2005.
- [5] Jacques N. *Modélisation et étude du plissement des tôles lors de leur transport en continu dans les usines sidérurgiques*. PhD thesis, Université de Metz, 2004.
- [6] Buchter N., Ramm E., and Roehl D. Three dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 37, 2551–2568, 1994.
- [7] Zahrouni H., Cochelin B., and Potier-Ferry M. Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 175, 71–85, 1999.
- [8] Aggoune W., Zahrouni H., and Potier-Ferry M. High-order prediction-correction algorithms for unilateral contact problems. *J. Comput. App. Math.*, 168, 1–9, 2004.
- [9] Brunelot J. *Simulation de la mise en forme à chaud par la Méthode Asymptotique Numérique*. PhD thesis, Université de Metz, 1999.
- [10] Chenot J. L. *New trends in finite element modelling of metal forming processes*. Computational Plasticity, Barcelone, CIMNE, Fundamentals and Applications, 804–809, 1997.