



HAL
open science

Une pression osmotique dans les suspensions macroscopiques?

Angélique Deboeuf, Georges Gauthier, Jérôme Martin, Jeffrey Morris

► **To cite this version:**

Angélique Deboeuf, Georges Gauthier, Jérôme Martin, Jeffrey Morris. Une pression osmotique dans les suspensions macroscopiques?. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03391362

HAL Id: hal-03391362

<https://hal.science/hal-03391362>

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mesure de pression osmotique dans les suspensions macroscopiques

ANGÉLIQUE DEBOEUF^a, GEORGES GAUTHIER^a, JÉRÔME MARTIN^a & JEFFREY MORRIS^b

a. Laboratoire Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques (FAST), Campus Universitaire, 91405 Orsay Cedex (FRANCE)

b. Levitch Institute and Chemical Engineering, City College of New York, New York, NY 10031 (USA)

Résumé :

L'étude vise à caractériser la pression de la phase particulaire dans des suspensions cisailées, pour lesquelles les interactions sont purement hydrodynamiques ($Re \ll 1$ et $Pe \rightarrow \infty$). Les particules, solides, sphériques, monodisperses (de tailles de l'ordre de la centaine de microns) et de même densité que le fluide porteur Newtonien, sont soumises à un cisaillement dans un dispositif de Couette cylindrique. La méthode est basée sur l'expérience d'osmose observée dans les systèmes thermiques. Elle consiste à mesurer la pression dans la phase fluide, derrière une grille interdisant le passage des particules. Elle met en évidence une pression des particules, proportionnelle au cisaillement imposé, analogue à la pression osmotique, proportionnelle à la température dans les suspensions Browniennes. Les résultats obtenus pour des concentrations en particules allant de 0.30 à 0.50, indiquent que les contraintes normales induites dépendent fortement de la concentration. La comparaison avec un modèle, des corrélations de mesures et des simulations montre un bon accord.

Abstract :

This study characterizes the particle phase stresses in a sheared suspension for which interactions are purely hydrodynamics ($Re \ll 1$ and $Pe \rightarrow \infty$). Solid spherical particles (size on the order of hundreds microns) are suspended in an equal density and highly viscous Newtonian liquid and subjected to shearing in a concentric cylinder Couette geometry. The approach, based on the osmotic concept in thermal systems, measure the continuous liquid pressure across a screen which forbids particles flux. This brings to light a particle pressure linear in shear rate, similar to osmotic pressure linear in temperature, in Brownian suspensions. Moreover the strong dependence of the induced normal stresses with concentration in particles is obtained in the range 0.30 to 0.50. Comparisons of the measured particle pressure with modeling, experimental correlations and simulation show good agreement.

Mots clefs : Suspensions macroscopiques, Rhéologie, Contraintes normales, Pression osmotique

1 Introduction

Suivant le régime d'écoulement, les interactions présentes dans une suspension solide/liquide sont différentes. Cependant, elles amènent toutes à une agitation des particules au sein de la suspension, qui peut être caractérisée par un flux diffusif de type Fickien $\mathbf{j} = -D\nabla n$ où D est le coefficient de diffusion et n est la densité du nombre de soluté. A bas nombre de Reynolds, dans le cas de faible nombre de Peclet (transport convectif négligeable devant le transport diffusif), les particules sont animées de mouvements chaotiques résultant de l'agitation thermique qui les entraînent à parcourir, de façon aléatoire, une grande distance (par rapport à leur taille), c'est le cas dans les suspensions Browniennes (particules de taille inférieure au micron). Au contraire, à haut Peclet, les interactions prédominantes sont les interactions hydrodynamiques, induisant également une dispersion des particules, qui cette fois peut s'effectuer dans une direction privilégiée. L'étude montre que, même si les interactions sont différentes, la réponse d'une suspension macroscopique dont les particules sont agitées en régime visqueux, est similaire à la réponse d'une suspension Brownienne où les particules sont agitées naturellement par l'agitation thermique.

Le mouvement chaotique de particules Browniennes résulte d'une diffusion proportionnelle à l'énergie thermique kT . En l'absence de forces extérieures, l'agitation thermique des molécules tend à dissiper les gradients de concentration pour atteindre un état où $\nabla n = 0$. Ce phénomène a été expliqué par Einstein en 1905, par une approche thermodynamique [1]. Il a montré notamment que le flux de particules dérive d'un potentiel : la pression osmotique Π_o , obéissant à la relation de Van't Hoff pour les systèmes dilués [2] : $\Pi_o = nkT$. Le flux Fickien peut alors s'écrire $\mathbf{j} = -M\nabla\Pi_o$, où M est la mobilité. Le flux diffusif et la contrainte osmotique sont deux descriptions complémentaires pour expliquer l'influence du mouvement Brownien sur le soluté. Celui-ci provoque un mélange diffusif mais tend également à minimiser l'énergie libre d'Helmholtz A , menant à

une définition thermodynamique de la pression osmotique, $\Pi_o = -(\frac{\partial A}{\partial V})_{N,T}$, avec N le nombre de soluté et T la température [3]. Cette description en terme de contrainte, explique clairement le phénomène d'osmose, schématisé sur la figure 1 (à gauche). Il apparaît lorsqu'une solution de concentration ϕ^0 est séparée du solvant pur ($\phi = 0$), ou d'une solution de plus faible concentration ($\phi < \phi^0$), par une membrane semi-perméable laissant circuler le solvant et interdisant le passage du soluté. Le soluté étant contraint à rester dans la branche gauche du tube manométrique en U, le solvant est amené à traverser la membrane, diluant la solution afin de rééquilibrer l'énergie libre dans les deux branches. La pression osmotique Π_o est la pression à exercer sur la solution pour égaliser la pression dans chaque branche et empêcher le flux de solvant. Cette contrainte surfacique appliquée contrebalance la contrainte exercée par le soluté au sein de la solution, afin que la solution reste à sa concentration initiale ϕ^0 .

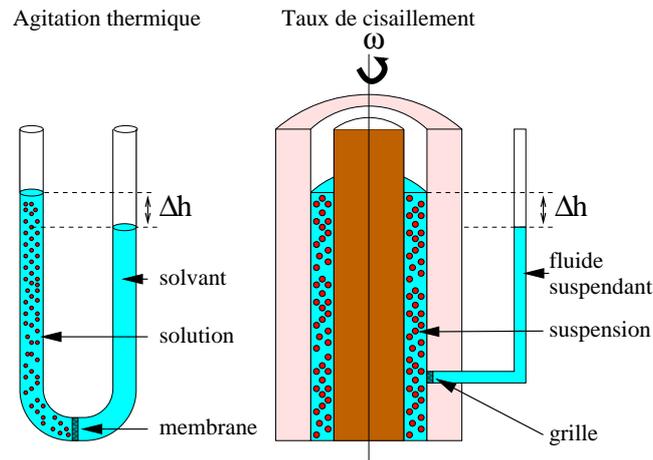


FIGURE 1 – Gauche : Schéma de l'osmose dans un tube en U. Droite : Schéma du dispositif expérimental.

Pour des particules plus grosses, la diffusion Brownienne est négligeable, mais il existe d'autres types de diffusion, en sédimentation [4] ou en cisaillement [5], induites également par les trajectoires chaotiques des particules et causées par les interactions hydrodynamiques. Celles-ci induisent une diffusion qui tend à dissiper les gradients de concentration. Cependant, lorsque l'intensité de celles-ci varie spatialement (due à une variation de cisaillement, de concentration ou de viscosité), une diffusion collective de particules apparaît, pouvant créer un gradient de concentration : c'est le phénomène de 'shear-induced diffusion'. Dans le cas d'un écoulement simple unidirectionnel $u_x(y)$, un flux de particules, $\mathbf{j} \sim -\nabla \dot{\gamma}$ avec $\dot{\gamma} = |du_x/dy|$, est observé vers les zones faiblement cisailées. Comme alternative à l'approche phénoménologique de Leighton & Acrivos [5], basée sur la compétition entre différents flux diffusifs, Nott & Brady [6], puis Morris & Boulay [7], ont développé une théorie basée sur les contraintes normales particulaires. Ils montrent que la pression des particules Π est le moteur de cette migration de particules : $\mathbf{j} \sim -\nabla \Pi$. Dans le cas de suspensions macroscopiques cisailées, la pression des particules et le 'shear-induced diffusion' sont alors respectivement analogues à la pression osmotique et à la diffusion Brownienne, dans les systèmes thermiques.

Le but est donc de montrer expérimentalement le lien entre la pression osmotique Π_o et la pression des particules Π , évoquée en théorie [8] et dans des simulations [9], en étendant le cas des interactions colloïdales aux interactions hydrodynamiques. Pour cela, on se base sur l'expérience d'osmose décrite précédemment, afin d'illustrer cette pression des particules. La figure 1 montre l'analogie entre les deux expériences. L'agitation des particules macroscopiques est induite par le cisaillement de la suspension en imposant une vitesse au cylindre intérieur. Cette partie de notre dispositif est assimilable à la solution moléculaire, située dans la branche gauche du tube, dans l'expérience d'osmose (figure 1 à gauche), dans laquelle les molécules sont maintenues en mouvement par l'agitation thermique. Quant au tube manométrique du dispositif, il est le pendant de la branche droite du tube en U. Enfin, les particules sont contraintes à rester dans l'entrefer des deux cylindres grâce à une grille d'ouverture de taille inférieure à celle des particules et placée à la surface interne du cylindre extérieur. Elle est l'analogie de la membrane semi-perméable dans l'expérience d'osmose.

2 Dispositif expérimental

Les suspensions sont composées de billes de polystyrène de masse volumique $\rho = 1.05 \text{ g.cm}^{-3}$ et de diamètres $2a = 40, 80, 140$ et $225 \mu\text{m}$ ($\pm 5\%$). Le fluide Newtonien utilisé est du poly(éthylène glycol-ran-polypropylène glycol)monobutyl éther de viscosité $\eta_f = 3 \pm 0.09 \text{ Pa.s}$ à $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ et de masse volumique identique à celle des billes. Le nombre de Peclet, donné par $Pe = 6\pi\eta_f\dot{\gamma}a^3/kT$, est de l'ordre de $Pe = 10^7$ pour les plus petites particules, en supposant un faible taux de cisaillement $\dot{\gamma} = 1 \text{ s}^{-1}$. L'agitation thermique est donc négligeable.

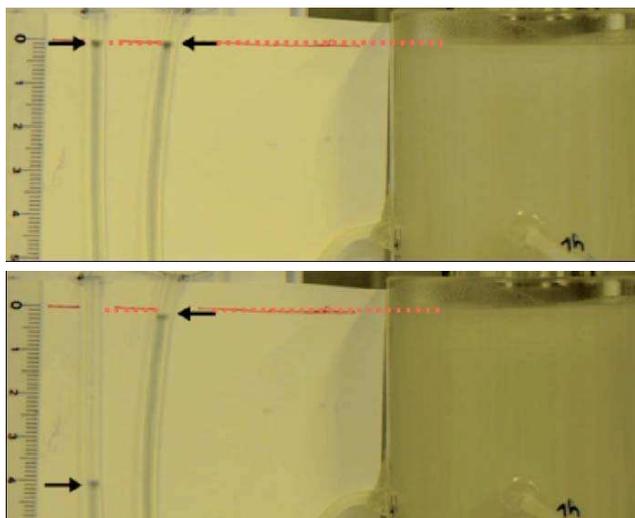


FIGURE 2 – Photo avant (en haut) et après (en bas) un cisaillement $\dot{\gamma} = 70 \text{ s}^{-1}$ imposée à une suspension de particules de diamètre $2a = 80 \mu\text{m}$ à $\phi = 0.40$. Le tube de gauche est relié à la suspension par l’intermédiaire d’une grille, alors que le tube de droite est relié sans grille.

La cellule de Couette, de 11 cm de hauteur, est constituée d’un cylindre intérieur mobile en acier inoxydable de rayon $R_i = 17.5 \text{ mm}$ et d’un cylindre extérieur fixe en altuglass transparent de rayon $R_e = 20 \text{ mm}$. Dans ces conditions, l’entrefer $e = 2.5 \text{ mm}$ étant très petit devant le rayon intérieur ($e/R_i < 0.2$), le taux de cisaillement imposé par la rotation du cylindre intérieur à la vitesse Ω , est supposé uniforme dans toute l’épaisseur e , et est calculé par $\dot{\gamma} = \Omega R_i / e$. Dans toutes les expériences, le nombre de Reynolds défini par $Re = \rho \dot{\gamma} e^2 / \eta_f$ est inférieur à 1 : l’écoulement est visqueux.

Le cylindre extérieur est percé de huit trous, de 3 mm de diamètre, répartis sur deux niveaux distants de 4 cm dont le niveau supérieur est à 6 cm du bas de la cellule. Sur chaque niveau, les quatre trous sont espacés de 90° . Une grille en polypropylène avec des ouvertures carrées de $20 \mu\text{m}$ recouvre chaque trou sur la paroi interne du cylindre, et empêche ainsi le passage des particules. Des tubes, remplis de fluide porteur, y sont connectés, pouvant servir de simples manomètres ou bien afin de transmettre la pression du fluide à des capteurs de pressions.

Des photographies d’une des expériences, réalisée avec les tubes manométriques sur une suspension de particules de diamètre $80 \mu\text{m}$ et de concentration $\phi = 0.40$, sont présentées sur la figure 2. En l’absence de cisaillement (photo du haut), la suspension est au repos et les contraintes dans chacune des phases se résument à la pression hydrostatique : les niveaux de fluide dans les tubes manométriques sont exactement au niveau de la surface de la suspension dans le cellule. En revanche, lorsque la suspension est cisailée, pendant $\sim 40 \text{ min}$, à $\dot{\gamma} = 70 \text{ s}^{-1}$ (photo du bas), le niveau dans le tube de gauche, connecté avec une grille, est descendu d’environ 4 cm ($\cong 300 \text{ Pa}$), alors que celui dans le tube de droite, relié directement à la suspension (sans grille) est quasiment stationnaire. Ceci révèle une pression négative dans la phase fluide et une faible pression totale dans la suspension. Cette méthode de mesure montre clairement l’existence d’une pression liée aux particules, induite par le cisaillement et analogue à la pression osmotique dans les suspensions Browniennes. Cependant, bien que visuellement convaincante, elle comporte certains inconvénients. Un long temps de mesure est nécessaire (de l’ordre de quelques heures) pour stabiliser le niveau de fluide dans les tubes manométriques. De plus, une dilution locale de la suspension s’opère au niveau des prises de mesures, due à l’aspiration du fluide par la suspension. Les mesures de pression étant sensible à la concentration ϕ , elles sont altérées par cette dilution. Afin de s’affranchir de ces inconvénients et pour obtenir des mesures plus quantitatives, des capteurs de pression sont placés à l’extrémité de chaque tube. Les grilles sont toujours présentes ainsi que les tubes remplis de fluide porteur, afin de transmettre la pression aux capteurs. Leur réponse se stabilise quelques secondes après le cisaillement imposé et les mesures sont moyennées sur quelques minutes. Dans ces conditions, il n’existe plus de flux de fluide vers la suspension. On mesure directement une différence de pression du fluide négative ΔP , en déduisant la pression au repos (sans cisaillement). Les mesures sont moyennées dans les deux sens de cisaillement pour annuler les éventuelles pressions apparaissant dès lors que les deux cylindres ne sont pas rigoureusement concentriques. Toutefois, un entrefer non uniforme donnerait lieu à une migration de particules vers les zones faiblement cisailées, qui aurait un effet sur les mesures difficilement compensables. C’est pourquoi un réglage de la coaxialité des cylindres est effectué en utilisant les propriétés Newtoniennes du fluide, très sensible aux variations. L’alignement des cylindres est réalisé de sorte à minimiser les variations de pressions, tout en imposant un cisaillement constant au fluide. Enfin, avant chaque série de mesure, un pré-cisaillement est appliqué pour s’assurer d’obtenir une suspension uniforme dans l’entrefer.

3 Résultats

Les résultats obtenus pour une suspension de particules de diamètre $40\ \mu\text{m}$ sont présentés sur la figure 3-a, en fonction de la contrainte de cisaillement du fluide seul $\eta_f \dot{\gamma}$, avec η_f la viscosité du fluide corrigée en température. Les pressions mesurées avec le fluide seul sont également reportées et montrent une réponse nulle : $\Delta P = 0$. Lorsque les particules sont présentes, même en faible concentration ($\phi = 0.30$), une réponse négative de pression ΔP est mesurable, diminuant linéairement avec la contrainte. Notons que cette linéarité à haut nombre de Peclet diffère du comportement en $\dot{\gamma}^2$ des contraintes normales à bas nombre de Peclet. Cette dépendance linéaire dépend fortement de la concentration, avec des coefficients allant de $|\Delta P|/(\eta_f \dot{\gamma}) = 0.35$ pour $\phi = 0.30$ jusqu'à $|\Delta P|/(\eta_f \dot{\gamma}) = 18.5$ pour $\phi = 0.50$. Il est à noter que les incertitudes de mesures grandes pour certaines concentrations, restent cependant inférieures aux pressions mesurées. L'étude de suspensions de particules de tailles différentes : 80, 140, et $225\ \mu\text{m}$ donne des comportements similaires avec toutefois des réponses plus faibles pour les diamètres les plus grands.

La pression $|\Delta P|$, normalisée par la contrainte de cisaillement, $\eta_f \dot{\gamma}$, est reportée sur la figure 3-b, en fonction de la concentration ϕ et pour toutes les tailles de particules étudiées. Cette pression normalisée faible pour les petites concentrations, devient du même ordre de grandeur que la contrainte de cisaillement lorsque ϕ approche 0.40 puis elle évolue très rapidement lorsque la concentration approche celle de l'empilement compact maximum ϕ_{max} .

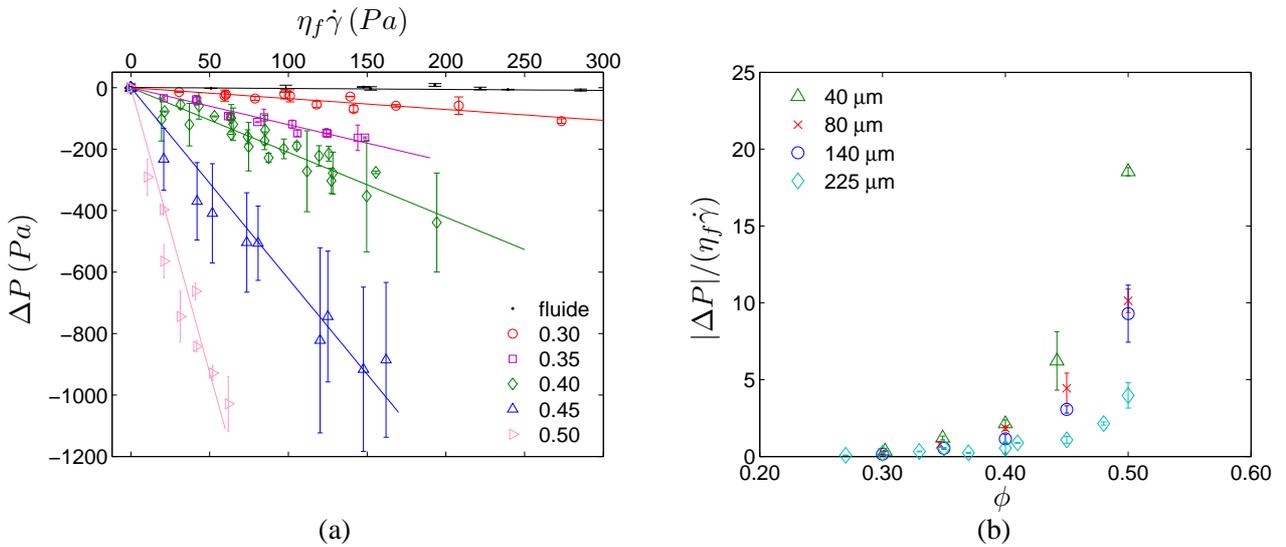


FIGURE 3 – (a) : Evolution de la pression ΔP en fonction de la contrainte de cisaillement du fluide seul $\dot{\gamma} \eta_f$, à différentes concentrations ϕ , pour une suspension de particules de diamètre $2a = 40\ \mu\text{m}$. (b) Evolution de la pression $|\Delta P|$ normalisée par la contrainte de cisaillement du fluide seul $\dot{\gamma} \eta_f$, en fonction de la concentration ϕ , pour des diamètres de billes de $2a = 40, 80, 140$ et $225\ \mu\text{m}$.

Les résultats de Morris & Boulay [7] permettent de déduire que, pour toutes les tailles de particules, une faible migration se produit et s'achève pendant le pré-cisaillement, mais n'explique pas la différence de pression $|\Delta P|$ avec la taille. De même qu'un glissement aux parois, évalué par l'expression de Jana *et al* [10] ne permet pas de justifier un tel écart. Il est à noter également qu'une faible migration axiale vers la surface libre est observée, plus prononcée pour les plus grosses particules, ce qui réduit la concentration de la suspension au sein du dispositif. Toutes ces considérations laissent à penser que les résultats obtenus pour les plus petites particules ($2a = 40\ \mu\text{m}$) sont celles les plus pertinentes, ce qui est confirmé par l'accord avec les différentes prédictions de la pression des particules (figure 4).

Aucune mesure directe de la pression des particules Π n'a été réalisée jusqu'à maintenant. Notre méthode de mesure suppose que $\Pi = -\Delta P$ par analogie avec la pression osmotique d'origine entropique Π_o . Ce lien avec les suspensions Browniennes est confirmé par les travaux numériques de Y. Yurkovetsky & J. Morris [9] dans lesquels l'équivalence entre la pression osmotique et la pression des particules dans la limite des très faibles cisaillements est montrée :

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \Pi = \Pi_o.$$

Cependant, la définition de la pression des particules est la trace du tenseur des contraintes dû aux particules σ^p :

$$\Pi = -\frac{1}{3}(\sigma_{11}^p + \sigma_{22}^p + \sigma_{33}^p).$$

Or notre méthode présentée mesure la composante normale suivant la direction verticale σ_{33}^p , qui peut être différente de Π . L'égalité $\Pi = -\Delta P$ suppose que les contraintes normales appliquées par les particules soient

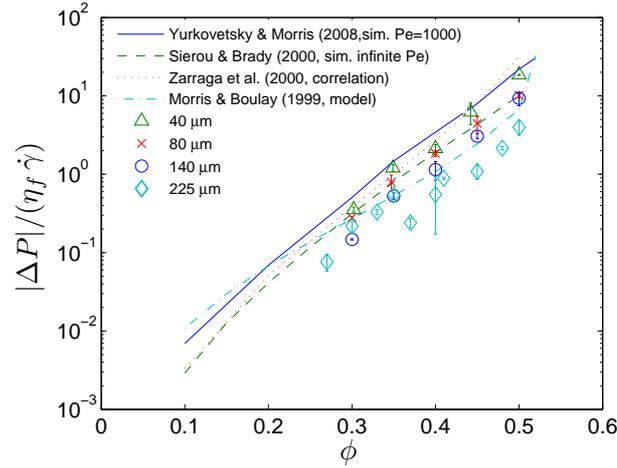


FIGURE 4 – Comparaison de la pression $|\Delta P|$ normalisée par la contrainte de cisaillement du fluide, $\eta_f \dot{\gamma}$, avec des corrélations de mesures expérimentales, modèle et simulations.

identiques dans les trois directions. Cette approximation est validée par des simulations [9] et des corrélations de mesures [11] montrant que les différences de contraintes $N_1 = \sigma_{11}^p - \sigma_{22}^p$ et $N_2 = \sigma_{22}^p - \sigma_{33}^p$, bien qu'elles existent dans les suspensions, sont petites par rapport à Π .

La figure 4 compare les mesures de pressions, en utilisant cette approximation $\Pi = |\Delta P|$, aux déterminations de la pression des particules Π (normalisées par la contrainte $\eta_f \dot{\gamma}$), obtenues par différentes méthodes : corrélation de mesures expérimentales, modélisation et simulations numériques. L'analyse de mesures expérimentales de combinaisons des différences de contraintes normales ainsi que celles sur la resuspension visqueuse ont permis de déduire une relation de la pression des particules Π avec la concentration [11]. L'expression $\eta_n = \Pi / \eta_f \dot{\gamma}$ provenant du modèle constitutif analysant la migration dans des écoulements curvilignes [7] est également comparée à nos mesures. Enfin, les résultats de simulations à Pe infini [12] et $Pe=1000$ [9] obtenus, respectivement, sans et avec une faible agitation thermique, sont tracés. Toutes ces prédictions de la pression des particules Π se comparent très bien avec nos mesures de pression $|\Delta P|$. Les données les plus concordantes sont celles obtenues pour les particules de plus petit diamètre $40 \mu\text{m}$. La technique de mesure utilisée permet bien de mesurer la pression exercée par les particules Π .

4 Conclusion

La méthode développée, consistant à mesurer la pression derrière une grille à la surface d'une suspension soumise à un cisaillement permet de mesurer la pression exercée par les particules. Ce concept basé sur l'expérience d'osmose observée pour les systèmes thermiques montre le lien robuste entre la pression des particules Π et la pression osmotique Π_o .

Jusqu'à maintenant cette pression particulière Π utilisée dans des modèles pour des suspensions macroscopiques [8, 9] et Browniennes [13, 14] et exprimée par $\Pi \sim \eta_{eff} \dot{\gamma}$, avec η_{eff} la viscosité effective de la suspension, n'avait jamais été observée expérimentalement. Seules des simulations en accord avec les prédictions théoriques [9] montraient jusqu'alors l'existence de cette grandeur. Ce travail met en évidence expérimentalement cette pression Π , dont les variations observées, avec la fraction volumique en particules ϕ , allant de $0.30 < \phi < 0.50$, et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, sont en accord avec les différents modèles [5, 6, 7, 9, 11] prédisant le flux j de particules lorsqu'elles sont soumises à un cisaillement :

$$j \sim \nabla \cdot \sigma^p \approx -\nabla \Pi = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \phi} \nabla \phi + \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\gamma}} \nabla \dot{\gamma} \right).$$

Les expériences réalisées dans cette étude montrent que l'osmose est un concept général dans les mélanges solide/liquide et résulte du fait que les chocs directs ou indirects (par l'intermédiaire du fluide) entre les particules tendent à agiter et donc à diluer ces mélanges.

Du fait que les suspensions soient isodenses, la pression Π peut être mesurée pour différentes concentrations données. Lorsque ce n'est plus le cas et que la gravité est prédominante, la suspension forme alors un sédiment de concentration $\phi \sim \phi_{max}$ où les particules sont en contacts. Sous certaines conditions, un cisaillement provoque alors une dilatation et le milieu granulaire développe des forces normales si le cisaillement imposé est à volume constant : c'est la dilatance de Reynolds [15]. La pression des particules apparaît être le lien entre la pression osmotique dans les systèmes thermiques et les contraintes dans les suspensions et les milieux granulaires.

Références

- [1] Einstein A. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Ann. Phys.(Leipzig)*, 17, 549–560, 1905.
- [2] Van't Hoff J. Osmotic Pressure and Chemical Equilibrium. Nobel Lecture, December 13, 1901.
- [3] Russel W., Saville D., and Schowalter W. *Colloidal Dispersions*. Cambridge University Press, 1989.
- [4] Martin J., Rakotomalala N., and Salin D. Hydrodynamic Dispersion of Noncolloidal Suspensions : Measurement from Einstein's Argument. *Physical Review Letters*, 74(8), 1347–1350, 1995.
- [5] Leighton D. and Acrivos A. Hydrodynamic dispersion of noncolloidal suspensions : Measurement from einstein's argument. *J. Fluid Mech.*, 177, 109–131, 1987.
- [6] Nott P. and Brady J. Pressure-driven flow of suspensions : Simulation and theory. *J. Fluid Mech*, 275, 157–199, 1994.
- [7] Morris J. F. and Boulay F. Curvilinear flows of noncolloidal suspensions : the role of normal stresses. *J. Rheol.*, 43, 1213–1237, 1999.
- [8] Jeffrey D. J., Morris J. F., and Brady J. F. The pressure moments for two spheres in low-reynolds-number flow. *Phys. Fluids A*, 5, 2317–2325, 1993.
- [9] Yurkovetsky Y. and Morris J. F. Particle pressure in sheared brownian suspensions. *J. Rheol.*, 52, 141–164, 2008.
- [10] Jana S. C., Kapoor B., and Acrivos A. Apparent wall slip velocity coefficients in concentrated suspensions of noncolloidal particles. *J. Rheol.*, 39(6), 1123–1132, 1995.
- [11] Zarraga I. E., Hill D. A., and Leighton D. T. The characterization of the total stress of concentrated suspensions of noncolloidal spheres in newtonian fluids. *J. Fluid Mech.*, 44, 185–220, 2000.
- [12] Sierou A. and Brady J. Rheology and microstructure in concentrated noncolloidal suspensions. *Journal of Rheology*, 46, 1031, 2002.
- [13] Cohen I., Mason T., and Weitz D. Shear-Induced Configurations of Confined Colloidal Suspensions. *Physical Review Letters*, 93(4), 46001, 2004.
- [14] Frank M., Anderson D., Weeks E., and Morris J. Particle migration in pressure-driven flow of a Brownian suspension. *Journal of Fluid Mechanics*, 493, 363–378, 2003.
- [15] Reynolds O. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. *Phil. Mag*, 20(5), 46, 1885.