



HAL
open science

Optimisation non régulière pour le contact unilatéral avec frottement de Coulomb

Florent Cadoux, Vincent Acary, Claude Lemaréchal, Jérôme Malick

► **To cite this version:**

Florent Cadoux, Vincent Acary, Claude Lemaréchal, Jérôme Malick. Optimisation non régulière pour le contact unilatéral avec frottement de Coulomb. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03391319

HAL Id: hal-03391319

<https://hal.science/hal-03391319>

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation du frottement de Coulomb en mécanique du contact

V. ACARY^a, F. CADOUX^a, C. LEMARÉCHAL^a, J. MALICK^{a,b}

a. Inria Rhône-Alpes, 655 avenue de l'Europe, 38334 Montbonnot

b. CNRS, LJK - BP 53, 38041 Grenoble cedex

Résumé :

L'étude théorique et numérique des situations de contact unilatéral entre des solides rigides ou déformables nécessite de modéliser les phénomènes d'impact qui se produisent lorsque deux corps entrent en collision, et de frottement lorsque ces corps restent en contact prolongé avec une vitesse relative non nulle. On s'intéresse ici au phénomène de frottement, supposé non-cohésif, pour lequel de nombreux modèles ont été proposés par la communauté de la mécanique depuis Coulomb au 18ème siècle, mais aussi plus récemment par celle de l'informatique graphique avec des exigences différentes. Il en résulte une profusion de modèles dénommés "de Coulomb" par leurs auteurs, et pourtant bien distincts les uns des autres. Nous nous concentrerons particulièrement sur la formulation dite "impulsion-vitesse" qui est utilisée depuis longtemps avec succès en mécanique des milieux granulaires. Ce modèle mène à un problème discrétisé difficile, pour lequel nous présenterons un éventail de méthodes de résolution possible. L'une d'entre elle, que nous proposons, permet d'obtenir un résultat d'existence de solution au problème discrétisé sous des hypothèses assez faibles.

Abstract :

The theoretical and numerical study of situations where unilateral contact takes place between solid or deformable bodies requires to model the phenomena of impact which happen when two bodies collide, and friction, when these bodies remain in resting contact with nonzero relative velocity. We focus on friction only, assuming that it is not cohesive, for which numerous models have been proposed by the community of Mechanics since Coulomb in the 18th century, but also and more recently by the community of Computer Graphics, with different objectives. This results in a profusion of models all called "Coulomb friction" by their authors, and yet significantly different one from each other. We will focus on the so-called "impulse-velocity" formulation which has been used successfully for a long time to study granular materials. This model leads to a difficult discretized problem, for which we will present several resolution methods. One of them, which we propose, yields an existence result for the discretized problem under quite weak assumptions.

Mots clefs : contact, frottement, loi de Coulomb

1 Introduction

1.1 Domaines d'applications

La mécanique du contact [1] possède de nombreuses applications en robotique (robots manipulateurs, robots marcheurs), génie civil (matériaux granulaires...), automobile (contact pneu-route, "crash-tests"), mais aussi dans le domaine de l'informatique graphique industrielle (simulateurs divers, interfaces haptiques) ou ludique (jeux vidéos, films d'animation). Selon l'application visée, les modèles utilisés sont différents afin de trouver dans chaque cas un compromis acceptable entre l'exigence de réalisme du modèle et celle de facilité de résolution du problème auquel le problème aboutit. Typiquement, les mécaniciens exigent plutôt des modèles précis, au sens où ils reproduisent bien les résultats de leurs expériences, tandis qu'en informatique graphique, les critères principaux sont - outre le caractère visuellement plaisant de la simulation obtenue - la robustesse de l'algorithme final, sa simplicité d'implémentation et sa vitesse d'exécution.

1.2 Modèle historique de Coulomb

On note x_T et x_N les composantes tangentielle et normale d'un vecteur x au niveau du point de contact entre deux corps. On se donne un paramètre physique $\mu \geq 0$ appelé coefficient de frottement, et on introduit le cône du second ordre d'ouverture μ en dimension d ($d = 2$ ou 3), noté \mathbf{K} , par :

$$\mathbf{K} := \{x \in \mathbf{R}^d; \|x_T\| \leq \mu x_N\}. \quad (1)$$

Le modèle historique de Coulomb est le suivant. Aux points de contact actifs, que l'on suppose présents en nombre fini dans le système, la force \mathbf{r} exercée par un corps A sur un corps B et la vitesse relative \mathbf{u} de B par rapport à A au niveau du point de contact vérifient (au moins) l'une des contraintes suivantes :

- décollage : $\mathbf{r} = 0$ et $\mathbf{u}_N \geq 0$,
- adhérence : $\mathbf{r} \in \mathbf{K}$ et $\mathbf{u} = 0$,
- glissement : $\mathbf{r} \in \partial\mathbf{K} \setminus 0$, $\mathbf{u}_N = 0$, $\mathbf{u}_T \neq 0$ opposé à \mathbf{r}_T : $\exists \alpha > 0$, $\mathbf{r}_T = -\alpha \mathbf{u}_T = -\alpha \mathbf{u}$.

De nombreuses techniques ont été proposées pour transformer ce modèle de frottement en temps continu en modèle à temps discret, en s'éloignant plus ou moins du modèle original. Par exemple, certaines formulations remplacent le cône du second ordre par un cône polyédral, afin d'aboutir à un problème final sans non-linéarité. D'autres ne traitent pas le cas de l'adhérence, etc. La section 2 passe en revue un certain nombre de ces variantes.

1.3 Problème incrémental

Pour formaliser un peu plus le problème, introduisons quelques notations. On se place dans \mathbf{R}^d (avec $d = 2$ ou 3), et pour chacun des n points de contact présents dans le système à un instant donné, on appelle arbitrairement A et B les corps en contact et on se donne un vecteur unitaire \mathbf{e}_N normal à la surface de contact dirigé de A vers B pour pouvoir parler des composantes normales et tangentielles des vitesses et des forces. Le rôle de la loi de frottement est de contraindre le couple (u, r) , où r est la force ou l'impulsion exercée par A sur B et u la vitesse relative de B par rapport à A . Le temps est discrétisé, et à chaque pas de temps on cherche les valeurs de trois vecteurs inconnus : les vitesses généralisées $v \in \mathbf{R}^m$, les impulsions aux n points que l'on rassemble dans un seul vecteur $r \in \mathbf{R}^{nd}$, et les vitesses relatives $u \in \mathbf{R}^{nd}$ aux n points de contacts. Dans le cadre d'une cinématique et d'une dynamique discrétisée linéaires, les vitesses généralisées sont reliées aux vitesses relatives par une relation "cinématique"

$$u = H v + w \quad (2)$$

où H et w sont connus, et aux forces par une relation "dynamique discrétisée"

$$M v + f = H^\top r \quad (3)$$

où la matrice de masse M et le vecteur f sont connus. La matrice de masse est supposée semi-définie positive. Enfin, on ajoute une troisième contrainte, pour l'instant abstraite

$$(u, r) \in C \quad (4)$$

où C représente l'ensemble des couples (u, r) compatibles avec la loi de frottement. La définition précise de C est l'objet de la section suivante. A chaque pas de temps, le *problème incrémental* est de trouver un point (v, u, r) qui satisfait les contraintes (2)-(3)-(4). Les deux premières étant linéaires, c'est le choix de la troisième (la loi de frottement) qui rend le problème plus ou moins difficile.

2 Modèles

On ne considère ici que les modèles qui ont un rapport direct avec la loi de Coulomb, en ignorant les modèles plus simples, comme le frottement visqueux ou le frottement de Tresca, qui sont aussi utilisés en pratique. On ne parlera pas non plus des modèles tribologiques plus élaborés que la loi de Coulomb.

2.1 Formulation impulsion-vitesse

Cette discrétisation de la loi de Coulomb est la plus semblable au modèle continu, et c'est celle qui nous intéressera dans la suite. Elle est adaptée aux cas dynamiques, quasi-statiques et statiques. Elle reprend directement la formulation continue :

$$(u, r) \in C \iff \begin{cases} \text{ou : } r = 0 \text{ et } u_N \geq 0 \\ \text{ou : } r \in \mathbf{K} \text{ et } u = 0 \\ \text{ou : } r \in \partial\mathbf{K} \setminus 0, u_N = 0, \exists \alpha > 0, r_T = -\alpha u. \end{cases} \quad (5)$$

Sous cette forme disjonctive, la contrainte $(u, r) \in C$ semble difficilement exploitable pour résoudre le problème incrémental (2)-(3)-(4). Cependant, on verra dans la section suivante que cette contrainte n'est pas une disjonction de trois cas sans rapport les uns avec les autres, mais qu'elle possède au contraire beaucoup de structure grâce à laquelle on parvient souvent à résoudre effectivement le problème incrémental.

2.2 Difficultés

L'une des raisons pour lesquelles de nombreuses variantes simplifiées de la loi de Coulomb sont utilisées est que ce modèle historique présente de nombreuses difficultés. Sans entrer dans les détails, on peut dire qu'il a les propriétés suivantes.

- Il peut souffrir de l’absence de solution en temps continu dans les espaces usuels ; un exemple célèbre est le “paradoxe” de Painlevé [2, 3]. En s’inspirant de l’exemple de Painlevé, on peut aussi construire un problème discrétisé pour la formulation impulsion-vitesse (2)-(3)-(5) qui n’admet pas de solution, même en dimension 2.
 - Il peut exister de multiples solutions, isolées ou sous forme de continuum [4].
 - En un certain sens, il est plus général que la programmation quadratique (QP) ; d’ailleurs, en l’absence de frottement ($\mu = 0$), le problème du frottement peut être formulé comme un QP [1, 3].
 - En un certain sens, le problème du frottement est NP-complet [3].
 - Lorsqu’on utilise la formulation impulsion-vitesse (problème (2)-(3)-(5)), il n’existe pas à l’heure actuelle d’algorithme qui converge à coup sûr vers une solution (ou s’arrête en prouvant la non-existence de solution).
- Cette liste de propriétés décourageantes expliquent sans doute pourquoi, au moins en informatique graphique où la robustesse et la vitesse des algorithmes sont des facteurs déterminants, ce n’est pas le modèle impulsion-vitesse (pourtant le plus proche du modèle original de Coulomb) mais des versions simplifiées qui sont souvent utilisées en pratique. Cependant, l’expérience acquise [5] avec le modèle impulsion-vitesse prouve qu’en pratique, on peut mener à leur terme des simulations de taille importante sans tomber dans le cas défavorable où aucun algorithme ne trouve de solution au problème discrétisé.

2.3 Autres modèles

Il en existe beaucoup d’autres : le modèle dit “gap-force”, adapté aux cas quasi-statiques et statiques, consiste à négliger les accélérations et à écrire la complémentarité entre le gap (défini comme la distance entre les corps A et B) et la force r . Sa structure mathématique est similaire à (5). Les modèles proposés par Anitescu et Potra [6] remplacent le cône du second ordre par un cône polyédral afin de se ramener à un LCP (“linear complementarity problem”, ou problème de complémentarité linéaire) bien structuré pour lequel des algorithmes efficaces sont disponibles. Dans le domaine de l’informatique graphique, Baraff [7] a proposé un modèle dans lequel le statut d’un contact (adhérence, décollement, glissement) est supposé connu à l’avance en utilisant l’information du pas de temps précédent, ce qui permet d’éliminer le caractère disjonctif de la loi de frottement. Il existe encore de nombreuses autres variantes, plus ou moins simplifiées ; nous prendrons pourtant le parti d’utiliser la formulation impulsion-vitesse, avec l’idée que malgré les difficultés citées ci-dessus, il n’est pas déraisonnable de s’attaquer au problème incrémental. En effet, grâce à sa riche structure, il possède de bonnes propriétés théoriques (section 4) et de nombreuses approches pour le résoudre sont envisageables (section 3).

3 Problème discrétisé et résolution

On s’intéresse maintenant à la résolution de (2)-(3)-(5), c’est à dire le problème incrémental dans lequel la loi de Coulomb est discrétisée en utilisant la formulation impulsion-vitesse.

3.1 Approche disjonctive, ou énumérative

Puisque la loi de frottement est formulée comme une contrainte disjonctive à trois cas pour chacun des n contacts, on peut envisager de tester chacun des 3^n cas. Ceci devient impraticable dès que n dépasse quelque unités. Heureusement, il est possible de reformuler la contrainte (5) de manière plus pratique,

- soit comme l’ensemble des zéros d’une fonction (approche fonctionnelle),
- soit comme l’argmin d’un problème d’optimisation (approche par minimisation),
- soit, en faisant un changement de variables, comme une contrainte de complémentarité conique (approche par complémentarité).

Ces trois idées sont illustrées ci-dessous par trois exemples : la méthode d’Alart et Curnier pour l’approche fonctionnelle, la méthode de De Saxcé pour la minimisation, et une nouvelle technique que nous proposons pour l’approche par complémentarité.

3.2 Approches fonctionnelles

On illustre cette idée avec la formulation d’Alart et Curnier [8]. On fixe deux constantes $\rho_N \geq 0$ et $\rho_T \geq 0$ (disons $\rho_N = \rho_T = 1$), on note P_S la projection sur le convexe S , et $B(0, \alpha)$ la boule euclidienne de rayon α centrée en 0. On définit ensuite la partie normale de la fonction d’Alart et Curnier :

$$f_N: \begin{cases} \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (u, r) \longmapsto P_{\mathbf{R}^+}(r_N - \rho_N u_N) - r_N \end{cases} \quad (6)$$

et la partie tangentielle de la fonction d’Alart et Curnier

$$f_T: \begin{cases} \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^{d-1} \\ (u, r) \longmapsto P_{B(0, \mu r_N)}(r_T - \rho_T u_T) - r_T \end{cases} \quad (7)$$

avec par convention, $\forall y \in \mathbf{R}^{d-1}$, $P_\emptyset(y) = 0_{d-1}$. Alors, on peut reformuler (5) de la manière suivante :

$$(u, r) \in C \iff [f_N, f_T](u, r) = 0. \quad (8)$$

Les formules pour f_N et f_T sont explicites et peuvent être différenciées sur une partie de leur domaine (pas partout car ce sont des fonctions non-régulières), ce qui permet d'utiliser des algorithmes de Newton non-régulier pour rechercher leurs zéros. La justification théorique de cette technique est délicate, et les points de non-régularité posent problème. En ces points, l'itéré de Newton n'est pas défini ; on peut cependant généraliser la méthode de Newton avec des arguments d'analyse non-lisse (méthodes dites "non-smooth Newton", "semi-smooth Newton" dans la littérature). Malgré les difficultés théoriques, cette technique fonctionne souvent bien en pratique [8, 9].

3.3 Approches par minimisation

Dans cette sous-section, on présente une approche proposée par De Saxcé [10] qui consiste à écrire la contrainte (5) comme l'argmin d'une fonction non-régulière. On introduit le *bipotential* par

$$b(u, r) = r \cdot (u + \mu \|u_T\| e_N) \quad (9)$$

où e_N est le vecteur unitaire normal orienté de A vers B . On a alors une nouvelle formulation de la contrainte (5) :

$$C = \underset{u_N \geq 0, r \in \mathbf{K}}{\operatorname{argmin}} b(u, r) \quad (10)$$

Le problème incrémental peut donc être attaqué en essayant de résoudre le problème de minimisation (10) sous les contraintes linéaires additionnelles (2)-(3). Cette approche nécessite de gérer la contrainte non-linéaire $r \in \mathbf{K}$ et la fonction objectif non-régulière à cause du terme $\|u_T\|$. De plus, en l'absence de bonne propriété comme la convexité, l'algorithme de minimisation peut se bloquer dans un minimum local (seuls les minimaux globaux, dont la valeur est zéro, sont solution). Cependant, cette approche est aussi utilisée avec succès en pratique [10].

Remarque : en réalité, ce qui précède est plutôt une adaptation de la méthode de De Saxcé ; la définition du bipotential est légèrement différente et on parle de minimisation pour résoudre le problème, plutôt que de l'algorithme de recherche de point-selle d'Uzawa.

3.4 Approches par complémentarité

On remarque qu'après le changement de variable $u \rightarrow \tilde{u}$, inspiré par le bipotential de De Saxcé et défini par

$$\tilde{u} := u + \mu \|u_T\| e_N \quad (11)$$

la formulation impulsion-vitesse (5) de la loi de Coulomb se réécrit :

$$\mathbf{K}^* \ni \tilde{u} \perp r \in \mathbf{K} \quad (12)$$

où \mathbf{K}^* est le cône dual de \mathbf{K} . Notre approche [4] consiste à exploiter trois éléments : la relation de complémentarité (12), le caractère semidéfini positif de la matrice de masse, et le fait que la matrice H intervient à la fois dans (2) et dans (3). On peut remarquer que cette structure n'est pas utilisée dans les approches citées ci-dessus (Alart et Curnier, De Saxcé). On reformule le problème incrémental sous la forme suivante, en considérant qu'il y a un seul contact dans le système pour ne pas alourdir les notations :

$$\begin{cases} Mv + f = H^\top r \\ \tilde{u} = Hv + w + \mu s e_N \\ \mathbf{K}^* \ni \tilde{u} \perp r \in \mathbf{K}. \end{cases} \quad (13)$$

où la nouvelle variable s est définie par

$$s = \|\tilde{u}_T\|. \quad (14)$$

L'intérêt de cette double manipulation (changement de variable $u \rightarrow \tilde{u}$ et fixation de $\|u_T\|$ dans (13) sous la forme d'un paramètre s) est la propriété suivante : le problème (13) constitue exactement les conditions d'optimalité d'un problème d'optimisation quadratique convexe sur le cône du second ordre (plus précisément : de deux problèmes quadratiques convexes sur le cône du second ordre, duals l'un de l'autre). Autrement dit, on peut voir (13) comme un problème d'optimisation paramétrique (sa solution dépend du paramètre s) relativement facile, possédant d'excellentes propriétés théoriques (à commencer par la convexité) et qui peut être résolu en utilisant directement les solveurs existants issus de la communauté de l'optimisation. Ceci étant dit, il reste "seulement" à résoudre l'équation (14) qui prend la forme d'une équation de point fixe, où \tilde{u}_T est une fonction de s via le problème d'optimisation paramétrique (13) :

$$s = \|\tilde{u}_T(s)\|. \quad (15)$$

Ce problème de point fixe peut maintenant être attaqué à l'aide de la méthode de Newton. Ceci qui pose de nouveau des problèmes de non-régularité et nécessite de différencier $u_T(s)$ à l'aide du théorème des fonctions implicites, de sorte que la justification théorique de cette approche est délicate. Cependant, elle est robuste en pratique et la convergence de l'algorithme de Newton est remarquablement rapide : quelques itérations suffisent pour atteindre une très grande précision. En exploitant beaucoup plus la structure du problème que les approches existantes, on se ramène à chercher un zéro d'une fonction en dimension assez petite (n , le nombre de contacts) et pour laquelle on constate empiriquement qu'elle est très peu non-linéaire, au sens où la méthode de Newton parvient à l'annuler très efficacement. En plus de cet intérêt pratique, la nouvelle méthode possède un intérêt théorique qui est expliqué plus loin dans la sous-section 4.2 : elle fournit une preuve d'existence (non constructive) d'une solution au problème du frottement avec la formulation impulsion-vitesse sous des hypothèses assez faibles.

3.5 Remarque sur les différentes approches

La distinction entre les approches fonctionnelles, par minimisation et par complémentarité est, dans une certaine mesure, arbitraire. En théorie, on peut souvent passer de "recherche de zéro" à "minimisation" de manière équivalente en considérant que annuler f n'est pas très différent de minimiser $\|f\|^2$, ou que minimiser f n'est pas très différent de chercher les zéros de ∇f si f est suffisamment régulière. De même, on peut remplacer la contrainte de complémentarité (12) par le problème d'optimisation

$$\min r \cdot \tilde{u} \text{ sur } \mathbf{K} \times \mathbf{K}^*$$

(approche de De Saxcé) ou par une équation $f(\tilde{u}, r) = 0$ où f est une fonction de mérite quelconque adaptée au problème de complémentarité du second ordre (par exemple, la fonction de Fischer-Burmeister). En théorie, on peut donc souvent passer d'une technique à l'autre. En pratique, cependant, l'efficacité des différentes approches est très variable.

4 Résultats d'existence

En s'inspirant de l'exemple classique de Painlevé, il est possible de construire des exemples où le problème incrémental (2)-(3)-(5) ne possède pas de solution. Il est aussi facile de construire des exemples où plusieurs solutions existent, isolées ou sous forme de continuum [4]. En pratique, il arrive que les algorithmes utilisés échouent à résoudre le problème incrémental, sans que l'on sache s'il existe une solution (que l'on n'a pas trouvée) ou s'il n'en existe pas. Une question théorique d'importance est donc de trouver des conditions suffisantes à l'existence de solution au problème (2)-(3)-(5).

4.1 Résultats existants

En dimension 2, le problème (2)-(3)-(5) peut être formulé comme un LCP et des arguments spécifiques s'appliquent, mais à notre connaissance il n'existe pas de résultat d'existence général pour le problème (2)-(3)-(5) tridimensionnel. Alart [11] propose des résultats théoriques sur la méthode de Newton généralisée, mais reconnaît qu'il ne s'appliquent pas au problème du frottement car leurs hypothèses, de type monotonie d'un certain opérateur, sont trop restrictives. Alart note cependant que "si la convergence monotone n'est pas établie rigoureusement pour les problèmes de contact unilatéral, en pratique, l'algorithme suit un tel comportement". Stewart [12] mentionne que "the existence of solutions for the non-linear¹ version can be shown using Brouwer's fixed point theorem", mais il ne précise ni la source ni les hypothèses du résultat. La sous-section suivante décrit un tel résultat obtenu avec notre approche, en utilisant également le théorème de Brouwer.

4.2 En utilisant notre formulation

Pour prouver l'existence d'une solution au problème incrémental (2)-(3)-(5), il suffit de prouver l'existence d'une solution à (15), c'est à dire de montrer que l'application $s \rightarrow \|\tilde{u}(s)\|$ définie par le problème d'optimisation paramétrique (13) est bien définie et possède un point fixe. Lorsque cette application est bien définie, l'existence d'un point fixe résulte du théorème de Brouwer appliqué à sa restriction sur un compact suffisamment grand. Le problème est donc de montrer que l'application est bien définie, c'est à dire que le problème d'optimisation paramétrique (13) admet une solution pour tout $s \in \mathbf{R}_+^n$. On peut montrer que ceci a lieu si **il existe des vitesses généralisées v telles qu'en tout point de contact, $u \in \mathbf{K}^*$** . Cette condition très simple suffit à assurer l'existence de solutions. De plus, on constate sur un exemple simple de type "paradoxe de Painlevé" qu'elle est également nécessaire (ce n'est pas un théorème général : il existe aussi des cas où cette condition n'est pas vérifiée et où une solution existe).

Notre approche permet donc de donner une preuve courte et peu technique d'existence sous une hypothèse faible. De plus, cette hypothèse est vérifiable en pratique : il suffit de trouver un point dans l'intersection d'un

¹par opposition aux modèles où le cône du second ordre est remplacé par un cône polyédral.

espace affine et d'un produit de cônes du second ordre, problème connu en optimisation conique et que l'on sait résoudre efficacement (voir par exemple [13] pour une approche duale).

Conclusion

La formulation dite impulsion-vitesse est certainement la discrétisation de la loi de Coulomb qui est la plus fidèle au modèle continu, mais elle est souvent remplacée en pratique par des formulations différentes : en effet, elle mène à un problème incrémental assez difficile à résoudre. Pourtant, grâce à sa riche structure, ce problème incrémental permet d'envisager de nombreuses approches de résolution utilisant des outils de l'optimisation et de l'analyse non-lisse. Il possède des liens directs avec les problèmes d'optimisation non-différentiable et les problèmes de complémentarité du second-ordre. Alors que les approches fonctionnelles et par minimisation sont connues et utilisées depuis longtemps, tout comme l'approche par LCP pour le problème bidimensionnel, l'approche par complémentarité non-linéaire est plus récente en dimension 3. Elle permet d'envisager des algorithmes de résolution nouveaux, comme celui que nous proposons, et des outils théoriques différents qui permettent par exemple d'attaquer le problème d'existence de solution.

Références

- [1] Acary V. and Brogliato B. Numerical methods for nonsmooth dynamical systems. Springer, 2008.
- [2] Stewart D. E. Rigid-body dynamics with friction and impact. *SIAM Rev.*, 42(1), 3–39, 2000.
- [3] Baraff D. Coping with friction for non-penetrating rigid body simulation. In Sederberg T. W., editor, *Computer Graphics (SIGGRAPH '91 Proceedings)*, volume 25, pages 31–40, July 1991.
- [4] Cadoux F. An optimization-based algorithm for coulomb's frictional contact, 2008. to appear in *ESAIM :Proc.*
- [5] Moreau J. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. *Nonsmooth mechanics and applications, CISM Courses Lect. 302*, 1-82 (1988)., 1988.
- [6] Anitescu M. and Potra F. Formulating dynamic multi-rigid-body contact problems with friction as solvable linear complementarity problems. *Nonlinear Dyn.*, 14(3), 231–247, 1997.
- [7] Baraff D. Fast contact force computation for nonpenetrating rigid bodies. In Glassner A., editor, *Proceedings of SIGGRAPH '94 (Orlando, Florida, July 24–29, 1994)*, *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pages 23–34. ACM SIGGRAPH, ACM Press, July 1994.
- [8] Alart P. and Curnier A. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 92(3), 353–375, 1991.
- [9] Christensen P., Klarbring A., Pang J., and Stromberg N. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 42(1), 145–173, 1998.
- [10] De Saxcé G. and Feng Z. Q. The bipotential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Math. Comput. Modelling*, 28(4-8), 225–245, 1998.
- [11] Alart P. Méthode de newton généralisée en mécanique du contact. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 76(1), 83, 1997.
- [12] Stewart D. E. Dynamics, friction and complementarity problems. In *Proceedings Internat. Conf. Complementarity Problems*, pages 425–439. SIAM Publ, 1996.
- [13] Malick J. A dual approach to semidefinite least-squares problems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 26(1), 272–284, 2004.