HAL open science

Propriétés topologiques pour la modélisation géométrique de domaines d'études comportant des singularités non-variétés

Jean-Claude Léon, Franck Hétroy, Leila de Floriani

▶ **To cite this version:**

Jean-Claude Léon, Franck Hétroy, Leila de Floriani. Propriétés topologiques pour la modélisation géométrique de domaines d'études comportant des singularités non-variétés. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03391279v3

HAL Id: hal-03391279

https://hal.science/hal-03391279v3

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Propriétés topologiques pour la modélisation géométrique de domaines d'études comportant des singularités non-variétés

Jean-Claude Léon, Franck Hétroy*, Leila de Floriani+

Grenoble Université, CNRS, Laboratoire G-SCOP, 46 av. Félix Viallet, 38000 Grenoble
**Grenoble Université, CNRS - INRIA, Laboratoire J. Kuntzmann, 655 av. de l'Europe, 38334 Montbonnot*
+Université de Gênes, Dept. Informatique, Via Dodecaneso, 35, 16146 Genova, Italie
E mail : Jean-Claude.Leon@grenoble-inp.fr, Franck.Hetroy@imag.fr, deflo@disi.unige.it

Résumé :

L'étude de comportement mécanique de structures et/ou d'écoulements s'appuie fréquemment sur des modèles géométriques perçus comme des assemblages de volumes, surfaces, lignes, connectés entre eux et comportant des singularités non-variétés. Une classification d'objets comportant des singularités non-variétés et des propriétés topologiques globales sont présentées pour accroître l'efficacité des modeleurs et la génération des contraintes de maillages.

Abstract:

The mechanical behavior of structures and/or fluids relies on geometric models perceived as sets of volumes, surfaces, lines, connected together and containing non-manifold singularities. A classification of objects incorporating non-manifold singularities as well as global topological properties are introduced to improve the efficiency of modelers and the generation of meshing constraints.

Mots-clefs : topologie, singularités non-variété, modèles géométriques, maillage

1 Introduction

Lors de la modélisation de comportement de structures, de fluides, …, et de leurs interactions, une étape consiste à élaborer le modèle numérique du domaine, D, correspondant au composant ou sous-système étudié. Ce modèle s'appuie sur les objectifs de la simulation de comportement et prend en compte les simplifications effectuées par rapport à la forme réelle du composant ou sous-système étudié. Ainsi obtenu, D comporte fréquemment des sous-domaines D_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$ correspondant à des courbes ou bien des surfaces éventuellement ouvertes[1]. D ainsi composé de différentes variétés est qualifié de modèle non-variété. Lorsque des sous-domaines D_i sont connectés entre eux, le voisinage de la connexion n'est souvent plus homéomorphe à un disque, si un D_i au moins est 2-variété ou bien à un segment, si plus de deux D_i de type 1-variété sont connectés. De telles configurations sont caractéristiques de singularités non-variétés et D est qualifié de modèle non-variété. Le maillage généré à partir de D pour constituer le support de la simulation numérique possède des caractéristiques similaires et le même qualificatif.

La génération de modèles non-variété est actuellement une tâche longue et fastidieuse, reposant sur des opérations répétées de découpage et de connexion entre sous-domaines D_i afin de les assembler progressivement pour produire D. Comparativement, la construction de volumes à l'aide de modeleurs CAO est efficace car appuyée à des opérateurs agissant

[1] Ces sous-domaines D_i sont dénommés : variétés. Le voisinage de tout point de D_i est 'équivalent' à un disque. Lorsque D_i possède au moins un point dont le voisinage est 'équivalent' à un demi-disque, D_i est dénommé variété à bord.

globalement sur la forme d'un objet et capables de caractériser les transformations topologiques correspondantes.

De même, l'accroissement du nombre de simulations nécessite de plus en plus la mise en place d'opérateurs capables de comparer des modèles de simulation, de rechercher des modèles similaires à un modèle de référence. Pour ce faire, la comparaison de formes de modèles comportant des singularités non-variétés constitue une des premières étapes de cette démarche.

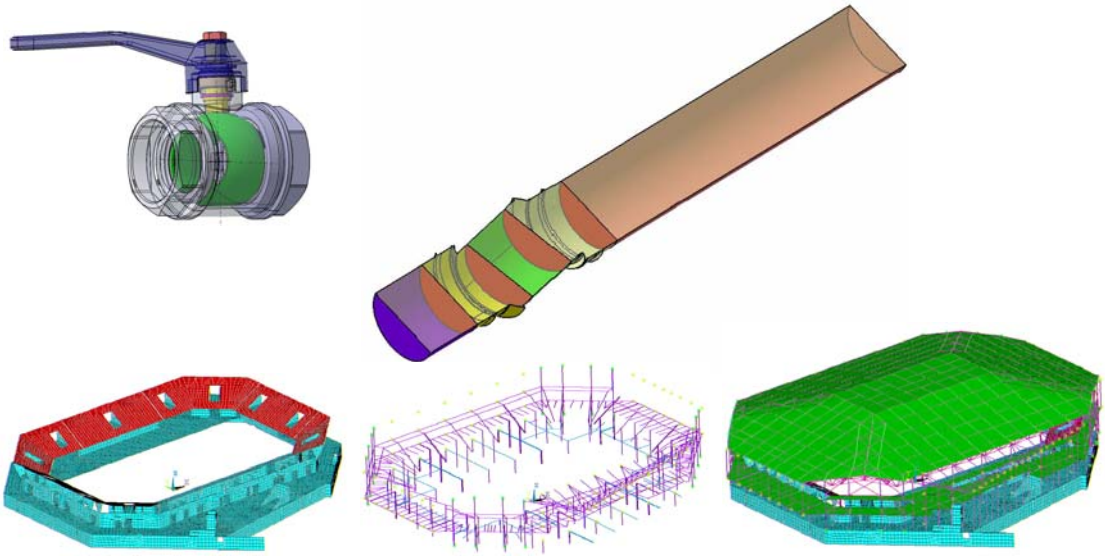

FIG. 1 – Exemples de domaines de simulation représentant des structures ou des domaines fluides.

L'objectif du travail présenté est d'indiquer les propriétés actuellement identifiées constituant une base pour la classification de modèles géométriques comportant des singularités non-variétés. La classification de modèles non-variétés est considérée comme une première étape à la mise en place de fonctions de modélisation agissant globalement sur un objet et une phase initiale pour permettre la comparaison de modèles de simulation. La classification des objets s'appuie sur des paramètres géométriques et topologiques. Ces derniers agissent en premier lieu pour définir des catégories d'objets et constituent le premier thème d'étude abordé dans le travail actuel.

2 Topologie et caractéristiques de forme de domaines D

Les modèles géométriques support de l'approche développée sont des complexes simpliciaux : des objets correspondant à certaines classes de maillages de domaines D, et des complexes cellulaires : des objets pouvant décrire des modèles CAO. Chacune de ces catégories d'objets peut comporter des singularités non-variétés. Les propriétés topologiques globales des complexes simpliciaux et des complexes cellulaires sont caractérisées par le théorème d'Euler-Poincaré appliqué à un domaine D comportant des points, des segments, des facettes [1] :

$$v - e + f = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 \qquad (1)$$

où v, e, f désignent respectivement les nombres de sommets, d'arêtes et de faces de D et β_0, β_1, β_2 désignent les nombres de Betti et forment les nombres de 0-cycles, 1-cycles et 2-cycles de D, respectivement. L'interprétation de β_0 correspond au nombre de composantes connexes constituant D. β_1 et β_2 ne disposent pas d'interprétations simples en relation avec la forme de D, en général. Dans le cas particulier où D est décrit par un ensemble de 2-variétés connexes, correspondant à la représentation de volumes par leur frontière selon l'approche B-

Rep utilisée par les modeleurs géométriques en CAO : $\beta_0 = \beta_2$, et β_1 est égal au double du nombre de trous débouchant que contient D ; l'Eq. (1) devient alors :

$$v - e + f = 2(s - h) \qquad (2)$$

avec s et h sont respectivement le nombre de composantes connexes et de trous débouchant. Ainsi, l'eq. (2) participe à la fois à la classification des domaines D et à des opérateurs de modélisation agissant globalement sur la forme de D.

A la différence de domaines D comportant un ensemble de 2-variétés, le cas général où D contient des singularités non-variétés ne possède pas actuellement de propriété équivalente à l'eq. (2). La Figure 2 illustre cette situation à travers trois domaines D_1, D_2, D_3 dont D_1 est 2-variété et D_2, D_3 possèdent des singularités non-variété mais où D_1, D_2, D_3 disposent d'une caractéristique de forme commune interprétable comme un trou définis par certains 1-cycles du terme β_1 associé à D_2 et D_3.

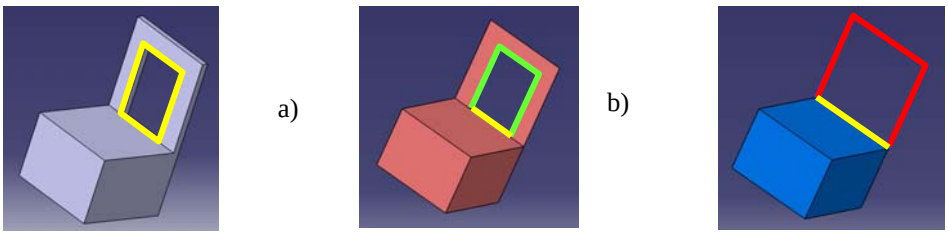

FIG. 2 – a) domaine D_1 2-variété comportant un trou, b), c) domaines D_2 et D_3 avec singularités non-variétés mais comportant un trou similaire à D_1.

L'établissement d'une propriété semblable à l'eq. (2) pour D quelconque s'appuie sur une classification des singularités non-variétés représentant un des premiers enjeux actuellement abordé du point de la classification des 1-cycles.

3 Concepts mis en œuvre pour la classification des 1-cycles de domaines comportant des singularités non-variétés

La démarche mise en place repose sur l'extraction de propriétés topologiques fondées sur l'existence de relations d'adjacence entre des faces, des arêtes et des sommets décrivant D. A ce titre, la configuration de la Figure 3a représente un domaine D. Ce domaine peut être perçu comme :

- possédant une singularité non-variété où l'arête ab est connectée à 4 faces (Fig. 3a),
- deux composantes connexes dans le cas où existe deux arêtes a_1b_1 et a_2b_2 similaires à ab en lieu et place de ab. Dans ce cas, l'absence de relation d'adjacence équivaut à percevoir les deux composantes comme séparées l'une de l'autre (Fig. 3b),
- un ruban possédant une auto-intersection telle que $\exists (u_i, v_i) \neq (u_j, v_j) / \vec{P}(u_i, v_i) = \vec{P}(u_j, v_j)$. Les couples de points ainsi définis correspondent à ab (voir Fig. 3c) mais ce lieu géométrique ne constitue pas une arête contribuant aux propriétés topologiques de D.

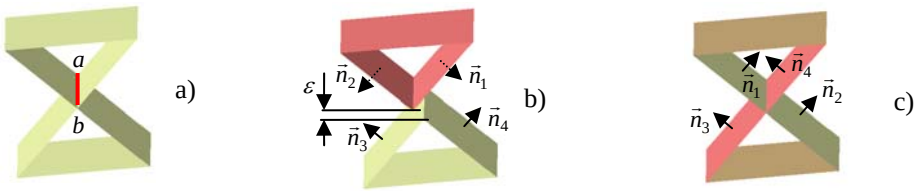

FIG. 3 – a) domaine avec singularité non-variété, b) domaine défini comme deux composantes connexes en contact ($\varepsilon = 0$), c) domaine comportant une auto-intersection.

Visuellement, et donc du point de vue de la forme perçue, ces trois configurations sont identiques. Géométriquement, elles sont toutes équivalentes puisqu'en ab le voisinage d'un

point est homéomorphe à deux disques collés l'un à l'autre, donc ayant deux points en commun. Du point de vue topologie, la Fig. 3a est plus riche en information que 3c car elle explicite des relations d'adjacence. La Fig. 3a exprime aussi topologiquement la configuration de contact de la Fig. 3b. Les Fig. 3b et c se distinguent également l'une de l'autre par des configurations de normales différentes au voisinage de ab.

En toute brièveté, la configuration de la Fig. 3a est considérée comme configuration de référence pour la classification des configurations non-variétés et pour l'étude de propriétés topologiques des domaines D. Cette configuration, dotée de l'*arité* des disques connectés en une singularité non-variété et du concept de *fonction de transition*, Θ, définie par la disposition des normales au voisinage de la singularité non-variété, permet de décrire indifféremment les Fig. 3b ou 3c selon les paramètres choisis. Dans le cas de la Fig. 3c, faisant référence au concept d'auto-intersection, on introduit la distinction entre l'*auto-intersection implicite* représentée par la Fig. 3c où l'arête ab n'existe pas dans la description topologique de D et l'*auto-intersection explicite*, où ab existe, construite sur la base de la Fig. 3a et dotée de la fonction Θ_{ab} correspondante et d'une arité de 2. Par conséquent, les éléments de classification présentés à la section suivante sont uniformément basés sur des domaines D comportant des singularités non-variété et exclusivement des auto-intersections explicites et munis de fonctions Θ_i en chaque singularité.

Les concepts précédents adressent en particulier les 1-cycles. Afin de contribuer à la classification, le concept de *ruban* et la notion de *vrillage* d'un ruban sont introduits et agissent comme propriété topologique globale en compléments des *i*-cycles. Un ruban est tout à fait l'analogue d'une bande de papier refermée sur elle-même et formant un anneau. Le vrillage, ou nombre de demi-tours appliqués lors de la fermeture de la bande, est effectivement une propriété topologique globale complémentaire dont la bande de Moëbius est un exemple avec un vrillage de 1 (voir Fig. 4a). Généraliser ce vrillage engendre des configurations topologiquement différentes qui peuvent être caractérisées à l'aide de la théorie des nœuds [5]. En effet, les deux courbes de bord d'un ruban forment une classe de nœuds appelée : nœuds de tore, de type $K_{q,r}$ où $q \in Z$ désigne le vrillage et $r = 2$ représente les 2 frontières du ruban en contact avec la surface d'un tore (voir Fig. 4b). Les rubans ainsi générés ont tous des comportements différents, mis en évidence par la subdivision du ruban selon un 1-cycle, i.e. en le découpant longitudinalement selon un chemin fermé. Ainsi, la subdivision de $K_{0,2}$ produit deux rubans totalement indépendants ; $K_{1,2}$, le ruban de Moëbius, ne divise pas l'espace lorsqu'il est subdivisé ; $K_{2,2}$, produit un lien $L(K_{2,2}, K_{2,2})$ formé de deux nœuds simples représentés par des rubans avec un vrillage de 2, lors de sa subdivision (voir Fig. 4c).

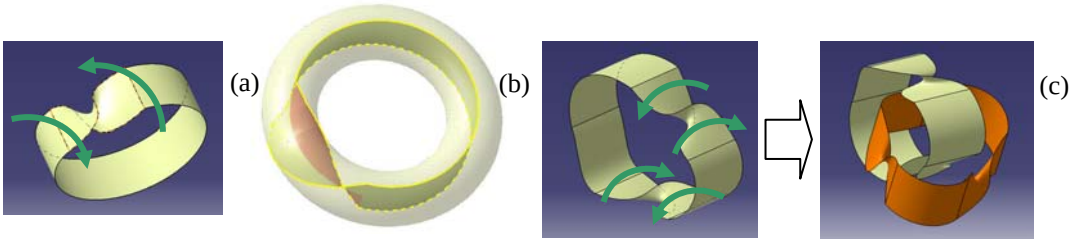

FIG. 4 – a) Ruban de Moëbius, b) Nœud de tore $K_{1,2}$ s'appuyant sur la frontière d'un ruban de Moëbius, c) Conséquence de la subdivision d'un nœud $K_{2,2}$ produisant un lien $L(K_{2,2}, K_{2,2})$.

4 Eléments de classification de domaines comportant des singularités non-variétés

Les travaux en cours et la taille de ce document amènent à ne considérer qu'une partie de la classification des domaines D comportant des singularités non-variétés [3, 4]. Les éléments

de classification décrits ont pour objectif d'illustrer les propriétés topologiques identifiées et leur contribution à cette classification. A titre d'illustration et de fil conducteur, certaines des surfaces classiquement utilisées en topologie combinatoire servent de base à l'exposé ci-dessous. Les éléments de classification proposés adressent uniquement les 1-cycles. Les illustrations proposées sont basées sur des domaines D, 2-variétés, où des singularités non-variété peuvent être obtenues par déformation de D. La localisation et la caractérisation de singularités s'appuie sur une décomposition de D en '*Composants Variété-Connectés*' (CVC). Dans le cas de complexes simpliciaux, cette décomposition est unique [2].

Considérons comme premier élément, la sphère soumise à des déformations produisant des configurations dites de '*pincement*'. Dans la classification, elle est caractérisée comme 2-variété sans 1-cycle et donc sans ruban. Son pincement en un point I_1 (voir Fig. 5a), avec une arité de 2, produit un 1-cycle mais pas de ruban car la singularité non-variété réduite à un sommet ne permet pas de définir de vrillage (voir Fig. 5b). La singularité est caractérisée par le voisinage de I_1 homéomorphe à deux cônes. L'augmentation de l'arité en ce sommet permet de généraliser le concept de '*pincement*' (voir Fig. 5c et d), correspondant à accroissement équivalent du nombre de 1-cycles. Ce '*pincement*' peut être perçu comme une transition entre la sphère et le tore (Fig. 5e) avec un accroissement du nombre de 1-cycles. Topologiquement, le '*pincement*' peut être étendu à des singularités caractérisées par des 1-complexes sans 1-cycle (voir Fig. 5f). Considérant l'influence de Θ, l'exemple de '*pincement*' le long d'une ligne avec un ruban $q=0$ correspond à domaine D non-variété (voir Fig. 5g) ; $q=1$ produit un objet non-orientable de type '*bonnet croisé*' (voir Fig. 5h).

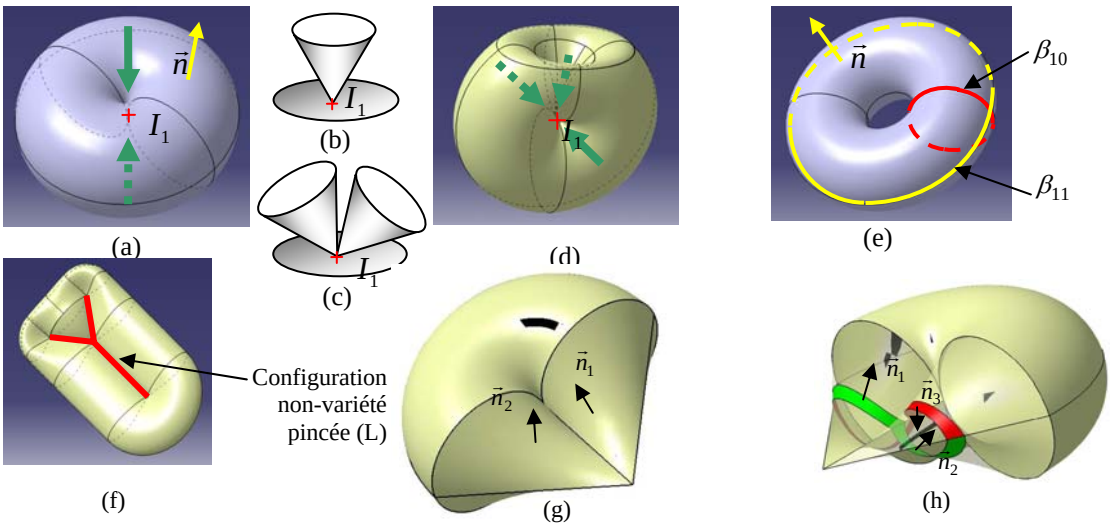

FIG. 5 – Caractérisation de configurations de '*pincement*' obtenues par transformations d'une sphère ou d'un tore.

L'accroissement du nombre de rubans permet de décrire de nouvelles catégories de domaines D (voir Fig. 6) ici constitués de deux CVC (Fig. 6a) où 2 rubans interviennent, l'un des deux étant sans vrillage $q=0$. La singularité non-variété localisée entre D_1 et D_2 permet de définir une fonction de transition Θ engendrant soit un ruban avec $q=0$ (dans ce cas D peut être perçu comme un tore dont une protubérance est plaquée sur le trou du tore (voir Fig. 6b et c), soit un ruban avec $q=1$ où l'interprétation de D est une 2-variété immergée dans IR^3 correspondant à une bouteille de Klein (voir Fig. 6a). Cet exemple montre comment un domaine D comportant des singularités non-variétés peut être perçu de différentes manières, une forme d'illusions optiques comme elles sont connues pour les images (voir Fig. 6d) mais appliquées en 3D. La configuration avec un ruban $q=0$ montre ici qu'une 2-variété immergée dans IR^3,

considérée comme 'non fabricable' peut être perçue comme un domaine D avec singularité non-variété plongé dans IR^3 et constituant une représentation idéalisée d'un objet réel (voir Fig. 6e).

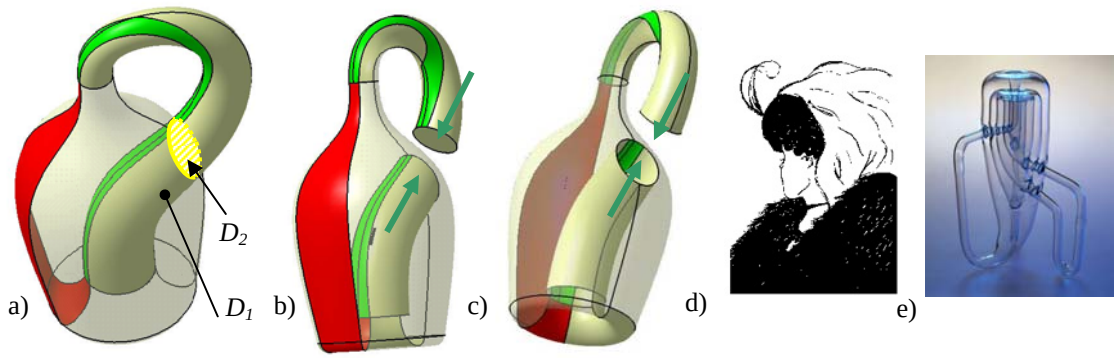

FIG. 6 – a) Domaine D constitué de deux CVC et perçu comme une bouteille de Klein, b), c) deux représentations de D illustrant son obtention à partir d'un tore, d) illusion optique 2D représentant une vieille femme et une jeune femme, e) objet dont l'idéalisation est un domaine D non-variété pouvant être interprété comme une 'triple bouteille de Klein' courtoisie A. Bennett, Science Museum, Londres.

Poursuivre l'accroissement du vrillage avec $q=2$ pour le second ruban conduit à un domaine D correspondant à la Figure 7 où l'évolution du vrillage du ruban est indiqué en plusieurs places sur la surface de D.

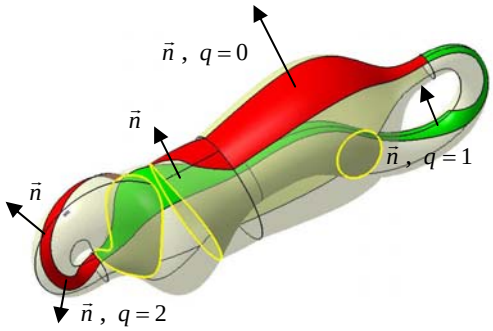

FIG. 7 – Domaine D avec un ruban vrillé $q=2$.

5 Conclusions

Dans un contexte bref, différentes propriétés topologiques globales appliquées à la classification de domaines comportant des singularités non-variétés ont été esquissées et illustrées à travers des éléments d'une classification. Ce travail constitue un travail préliminaire à la mise en place d'opérateurs de modélisation de domaines de simulation agissant globalement sur la forme d'un objet. La classification menée constitue une base pour un modeleur capable de distinguer les objets acceptables pour une application de ceux qui ne le sont pas, par analogie à des modeleurs volumiques. La classification est également une base pour la recherche et la définition de similitudes entre domaines D.

Références

[1] M. Agoston – "Computer graphics and geometric modelling: Mathematics", Springer, 2005.
[2] A. Hui, L. De Floriani – "A two-level topological decomposition for non-manifold simplicial shapes", Solid and physical modeling conference 2007, Beijing, June 2007.
[3] J-C Léon, L. de Floriani – "Contribution to a taxonomy of non-manifold models based on topological properties", Proc. ASME DETC Conf, New York, Août 2008.
[4] J-C Léon, L. de Floriani, F. Hétroy – "Classification of non-manifold singularities from transformations of 2-manifolds", Proc. SMI Conf., Beijing, June 2009.
[5] K. Murasugi – "Knot theory & its applications", Birkhäuser, 1996.