



**HAL**  
open science

## Couplage analyse asymptotique/méthode à discontinuité forte pour l'étude à rupture en présence de perturbations géométriques.

Grégory Vial, Virginie Bonnaillie-Noël, Delphine Brancherie, Marc Dambrine,  
Sébastien Tordeux

### ► To cite this version:

Grégory Vial, Virginie Bonnaillie-Noël, Delphine Brancherie, Marc Dambrine, Sébastien Tordeux. Couplage analyse asymptotique/méthode à discontinuité forte pour l'étude à rupture en présence de perturbations géométriques.. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03391278

**HAL Id: hal-03391278**

**<https://hal.science/hal-03391278>**

Submitted on 21 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Couplage analyse asymptotique/méthode à discontinuité forte pour l'étude à rupture en présence de perturbations géométriques.

V. BONNAILLIE-NOËL<sup>a</sup>, D. BRANCHERIE<sup>b</sup>, M. DAMBRINE<sup>c</sup>, S. TORDEUX<sup>d</sup>, G. VIAL<sup>a</sup>

*a. IRMAR, ENS Cachan Bretagne, Univ. Rennes 1, CNRS, UEB, France*

*b. Roberval, Univ. Tech. Compiègne, France*

*c. LMA, Univ. Pau et Pays de l'Adour, France*

*d. IMT, INSA Toulouse, France*

## Résumé :

*On s'intéresse à l'influence de micro-défauts de surface sur le comportement à rupture d'un matériau. Le travail consiste à utiliser une analyse asymptotique, évitant la prise en compte dans le maillage de la géométrie à petite échelle. Une méthode à discontinuité forte permet alors de suivre le développement des fissures à partir des zones de concentration de contrainte générées par les perturbations géométriques. Une stratégie de transfert de champ basée sur des critères énergétiques est mise en œuvre pour assurer le couplage.*

## Abstract :

*We investigate the influence of surfacic microdefects on the behavior till rupture of a material. Our method consists in using an asymptotic analysis, allowing to avoid taking into account the small-scale geometry in the mesh. A strong discontinuity approach is used to track the development of cracks from the stress concentration zones generated by the geometric perturbations. The coupling is ensured thanks to a field transfer strategy, based on energetic criterions.*

**Mots clefs :** Rupture, perturbation géométrique, analyse asymptotique, discontinuité forte.

## 1 Introduction

Le but de ce travail est de proposer une méthode numérique efficace pour évaluer la charge ultime d'une structure en présence de petits défauts géométriques. Précisément, on suppose que la géométrie du matériau est décrite par un domaine  $\Omega_\varepsilon$ , perturbation d'un domaine régulier  $\Omega_0$  ; l'exemple représenté sur la Figure 1 comporte un seul micro-défaut, mais on peut en considérer plusieurs sans difficulté supplémentaire sur le plan numérique (pour l'analyse asymptotique, voir [1]). La prise en compte de la géométrie complète de  $\Omega_\varepsilon$  pose



FIG. 1 – Les domaines  $\Omega_0$  et  $\Omega_\varepsilon$

des difficultés en pratique car elle impose un important raffinement de maillage au voisinage de la perturbation. On souhaite ici développer une méthode permettant d'éviter le maillage de la géométrie microscopique et ne travailler que sur le domaine macroscopique  $\Omega_0$ .

Notre méthode s'appuie sur une représentation asymptotique du déplacement, voir [2], qui fournit une approximation au premier ordre en  $\varepsilon$  de l'influence des micro-défauts sur le comportement élastique du matériau. On effectue ensuite un couplage avec un modèle à discontinuité forte pour décrire le développement des zones de fissuration, voir [3].

## 2 Analyse asymptotique des équations de Navier

La géométrie  $\Omega_\varepsilon$  est supposée provenir d'une modification *autosimilaire* de motif  $\mathbf{H}_\infty$  en un point 0 du bord d'un domaine  $\Omega_0$ , voir Figure 2. On a

$$\Omega_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_\varepsilon \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Omega_\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Le domaine  $\mathbf{H}_\infty$  est un demi-plan perturbé à l'échelle 1.

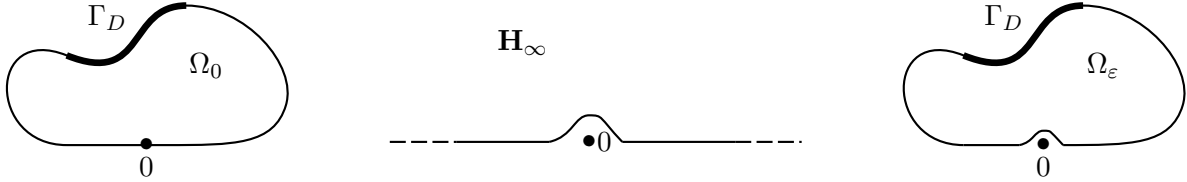


FIG. 2 – Les domaines  $\Omega_0$ ,  $\mathbf{H}_\infty$  et  $\Omega_\varepsilon$

Le déplacement de la structure  $\Omega_\varepsilon$  satisfait les équations de Navier pour l'élasticité linéaire :

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{u}_\varepsilon - (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{f} \text{ sur } \Omega_\varepsilon, \\ \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}^D \text{ sur } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_D. \end{cases}$$

Pour des raisons techniques, on suppose ici que les chargements  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  s'annulent près de la perturbation. Dans [2], il est montré que  $\mathbf{u}_\varepsilon$  s'écrit au premier ordre :

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \varepsilon \left[ \alpha_1 \mathbf{V}_1 \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) + \alpha_2 \mathbf{V}_2 \left( \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right) \right], \quad (1)$$

où  $\mathbf{u}_0$  est la solution sur le domaine non perturbé  $\Omega_0$ , les réels  $\alpha_1, \alpha_2$  sont donnés par

$$\alpha_1 = \sigma_{11}(\mathbf{u}_0)(0) \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \sigma_{12}(\mathbf{u}_0)(0). \quad (2)$$

Les *profils*  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  sont solutions de problèmes de Navier sans chargement distribué dans  $\mathbf{H}_\infty$  avec des conditions de Neumann :

$$\begin{cases} -\mu \Delta \mathbf{V}_\ell - (\lambda + \mu) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{V}_\ell = \mathbf{0} \text{ sur } \mathbf{H}_\infty, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}_\ell) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{G}_\ell \text{ sur } \partial\mathbf{H}_\infty \quad (\ell = 1, 2), \end{cases}$$

avec  $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{n}_1, 0)$  et  $\mathbf{G}_2 = (0, \mathbf{n}_1)$ , où  $\mathbf{n}_1$  est la première composante de la normale extérieure à  $\mathbf{H}_\infty$ .

La formule (1) fournit une approximation à  $\varepsilon^2$  près du champ de déplacement à partir du champ de déplacement dans le domaine non perturbé et des profils, qui sont intrinsèques au motif de perturbation. Dans le cas de plusieurs inclusions, on peut étendre les résultats obtenus dans [1] pour l'équation de Laplace au cas des équations de Navier : si les inclusions sont relativement proches les unes des autres – i.e. à distance  $\varepsilon^\alpha$  avec  $\alpha < 1$  – il suffit de superposer leurs contributions respectives (l'erreur commise est certes détériorée, mais reste négligeable vis-à-vis de  $\varepsilon$ ).

## 3 Implémentation numérique

La description de la fissuration du matériau est effectuée en deux temps :

- on calcule les concentrations de contraintes dues aux défauts à l'aide de la représentation asymptotique (1) du déplacement.
- un modèle à discontinuité forte est utilisé pour localiser les zones de fissuration issues des zones de concentration de contraintes.

Insistons sur le fait que seul le domaine  $\Omega_0$  est maillé dans chacune de ces deux procédures. La géométrie de la perturbation est prise en compte pour le calcul des profils via  $\mathbf{H}_\infty$  et au travers de formules de quadratures locales dans l'enrichissement.

En effet, plutôt que de travailler par superposition selon la formule (1), il est plus commode d'introduire dans un code éléments finis existant un enrichissement de l'espace d'approximation par les profils, voir [4, 5]. Bien sûr,

la perturbation doit alors apparaître d'une manière ou d'une autre dans la description du problème. On a choisi ici d'utiliser une méthode d'intégration numérique adaptée dans le ou les éléments contenant la perturbation. Par ailleurs, pour des raisons d'implémentation, un coefficient par nœud est associé au degré de liberté de chaque profil additionnel : le champ  $\mathbf{u}_\varepsilon$  est interpolé comme suit

$$\mathbf{u}_\varepsilon \simeq \mathbf{u}_0^h - \varepsilon \sum_{j \in \mathcal{J}} N^j(\mathbf{x}) \left[ \alpha_1^j \mathbf{V}_1^h + \alpha_2^j \mathbf{V}_2^h \right],$$

où  $\mathcal{J}$  correspond aux indices des nœuds proches de la perturbation,  $\mathbf{u}_0^h$ ,  $\mathbf{V}_\ell^h$  sont les approximations de  $\mathbf{u}_0$  et des profils  $\mathbf{V}_\ell$ . D'après l'analyse asymptotique, on s'attend à ce que les coefficients-vecteurs  $\alpha_\ell^j$  satisfassent pour tout nœud  $j$

$$(\alpha_1^j)_1 = (\alpha_2^j)_2 = \alpha_\ell \quad \text{et} \quad (\alpha_1^j)_2 = (\alpha_2^j)_1 = 0.$$

Il est connu dans le cadre des méthodes XFEM que le problème est mal conditionné lorsqu'on laisse libres tous les coefficients  $\alpha_\ell^j$ . Pour cette raison, on utilise une stratégie maître-esclave en imposant pour chaque  $j$  :

$$(\alpha_1^j)_1 = (\alpha_2^j)_2 \quad \text{et} \quad (\alpha_1^j)_2 = (\alpha_2^j)_1.$$

Ces contraintes sont traitées à l'aide de multiplicateurs de Lagrange qui conduisent au problème augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{uu}}^0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\alpha\mathbf{u}}^\varepsilon & \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^\varepsilon & \mathbf{\Pi}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Pi} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \alpha \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

où  $\mathbf{K}_{\mathbf{uu}}^0$  désigne la matrice de rigidité standard calculée sur  $\Omega_0$ ,  $\mathbf{\Pi}$  est l'opérateur de projection sur les contraintes,  $\mathbf{K}_{\alpha\mathbf{u}}^\varepsilon$  et  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^\varepsilon$  correspondent aux degrés de liberté additionnels, et au couplage, respectivement. Enfin,  $\lambda$  contient les multiplicateurs de Lagrange et  $\mathbf{f}_0$ ,  $\mathbf{f}_\alpha$  désignent les chargements.

Suite à cette étape de calcul, on peut évaluer les concentrations de contraintes et embrayer sur un modèle à discontinuité forte pour suivre le développement de la fissuration. Toutefois l'espace variationnel discret utilisé n'est pas compatible avec un modèle à discontinuité forte en raison de l'enrichissement. On utilise alors une méthode de projection basée sur un critère énergétique :

$$\min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}) = \mathcal{E}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon^h) \quad \text{sous la contrainte} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^D \quad \text{sur} \quad \Gamma^D,$$

où l'énergie est donnée par

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega.$$

## 4 Quelques résultats de simulations

On considère une géométrie simple rectangulaire perforée de deux défauts semi-circulaires situés en  $\mathbf{O}_1$  et  $\mathbf{O}_2$ , soumis à un chargement de traction, voir Figure 3. Les deux défauts ont des rayons respectifs de 2 mm et 1 mm ; la distance  $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$  vaut 30 mm. La Figure 4 montre deux maillages : le premier, fin, correspond au domaine perturbé  $\Omega_\varepsilon$  et est utilisé pour calculer la solution de référence  $\mathbf{u}_\varepsilon$  à des fins de comparaison, le second maillage  $\Omega_0$  assez grossièrement et permet de mettre en œuvre la méthode numérique décrite au paragraphe précédent. Les solutions sont comparées sur la Figure 5 : l'erreur relative est de l'ordre de 0.25%.

Enfin, on présente sur la Figure 6 la concentration de contraintes due aux inclusions (obtenue par transfert de champ) ainsi que le développement de la fissure. On observe que l'initiation de la fissure a lieu au point  $\mathbf{O}_1$  qui porte la plus grande inclusion ; son développement est accompagné d'un déchargement élastique de l'ensemble du domaine, la perturbation centrée en  $\mathbf{O}_2$  ne génère pas de deuxième fissuration.

## Références

- [1] Bonnaillie-Noël V., Dambrine M., Tordeux S., and Vial G. Interactions between moderately close inclusions for the laplace equation. M3AS, 2009.
- [2] Dambrine M. and Vial G. A multiscale correction method for local singular perturbations of the boundary. M2AN Math. Model. Numer. Anal., 41(1), 111–127, 2007.
- [3] Brancherie D. and Ibrahimbegovic A. Novel anisotropic continuum-discrete damage model capable of representing localized failure of massive structures. part i : theoretical formulation and numerical implementation. Engineering Computations, 2009.
- [4] Melenk J. and Babuška I. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. Comp. Meth. in applied Mechanics and Engineering, 136, 289–314, 1996.
- [5] Chahine E., Laborde P., Pommier J., Renard Y., and Salaun M. Study of some optimal xfem type methods. Comput. Methods Appl. Sci., 5, 27–38, 2007.

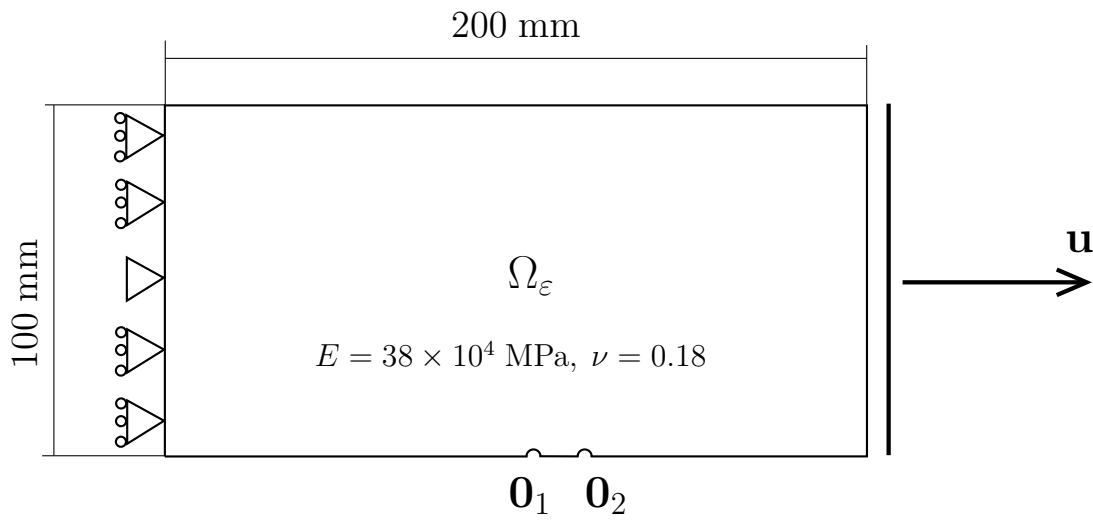
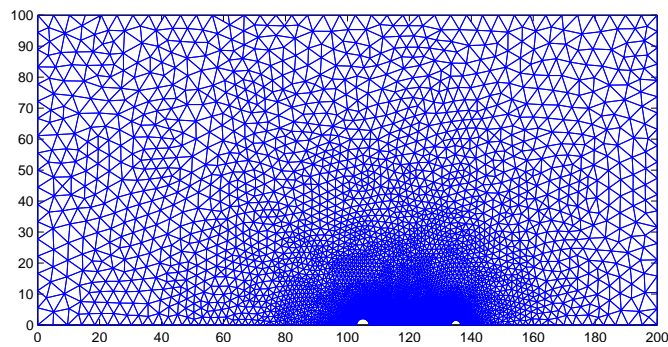
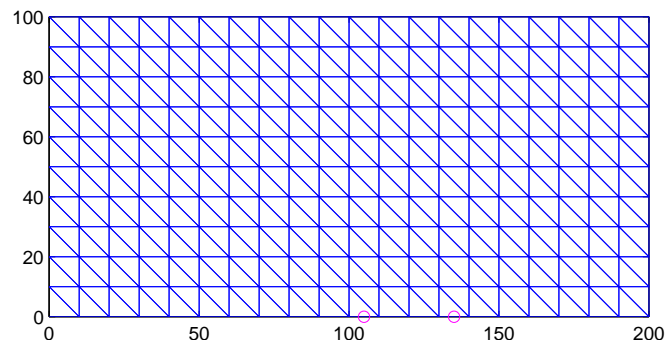


FIG. 3 – Définition du problème modèle.



(a) maillage fin



(b) maillage grossier

FIG. 4 – Maillages utilisés

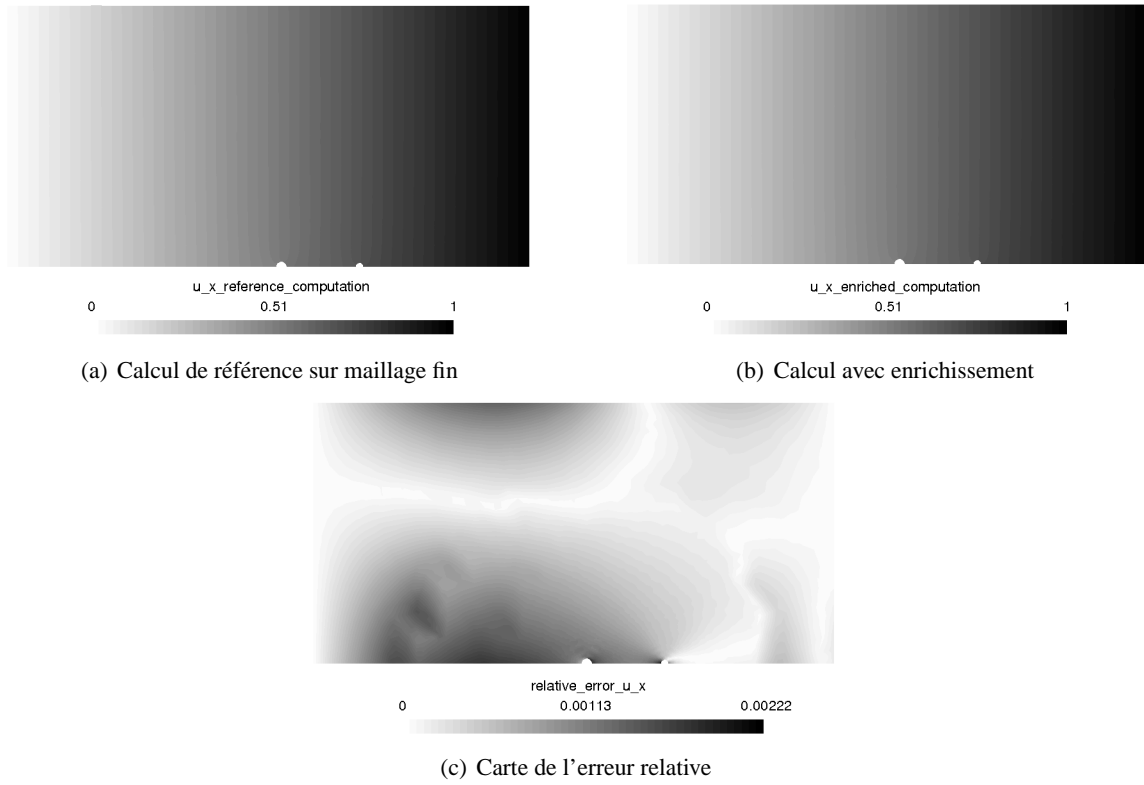


FIG. 5 – Déplacements  $u_x$  obtenus par calcul standard sur maillage fin, et avec enrichissement, carte de l'erreur relative.

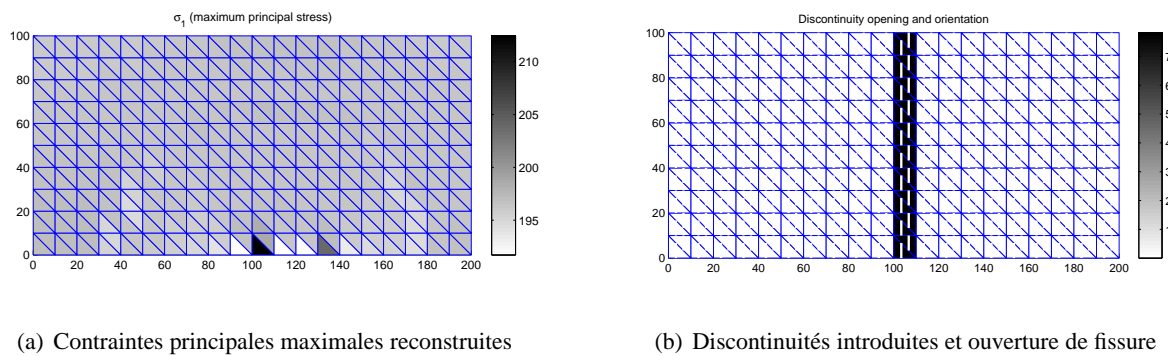


FIG. 6 – Différence entre le champ de déplacement reconstruit et le champ obtenu sur le domaine non perturbé, contraintes principales maximales reconstruites