



HAL
open science

Transmission des contraintes dans les milieux granulaires solides

Vincent Topin, Farhang Radjai, Jean-Yves Delenne

► **To cite this version:**

Vincent Topin, Farhang Radjai, Jean-Yves Delenne. Transmission des contraintes dans les milieux granulaires solides. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03391225

HAL Id: hal-03391225

<https://hal.science/hal-03391225>

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distribution des contraintes dans les milieux granulaires solides

V. TOPIN, J-Y. DELENNE, F. RADJAI

LMGC UMR 5508 CNRS-Université Montpellier 2, Pl. E. Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France

Résumé :

Nous nous basons sur une méthode sur réseau (Lattice Element Method ou LEM) pour simuler et analyser à l'échelle sub-particulaire les champs de contraintes dans des milieux granulaires solides constitués de particules de rigidité variable assemblées entre elles par une matrice remplissant partiellement les espaces interstitiels. Nous trouvons que les distributions des forces de contact déterminées à partir des contraintes sont similaires avec celles obtenues à l'aide d'une approche de type dynamique moléculaire (Discrete Element Method ou DEM) à l'échelle des particules. Ceci signifie que les propriétés bien connues des distributions des forces obtenues à l'aide des modèles classiques des matériaux granulaires, c'est à dire avec des particules rigides et sans matrice interstitielle, peuvent être étendues à des matériaux tels que le béton et les conglomerats comportant une phase particulaire percolée. Nous remarquons que les distributions de contraintes sont exponentielles au niveau des zones de contact et sont principalement guidées par la phase particulaire en compression et par la matrice en traction. Nous montrons également que les distributions sont de plus en plus large avec la diminution de la fraction volumique de matrice en tension alors qu'elles dépendent uniquement de la rigidité des particules en compression.

Abstract :

We rely on the lattice element method to simulate and analyze the stress fields at sub-particle scales in 2D granular solids composed of particles of variable stiffness together with an interstitial matrix of variable volume fraction. We find that the contact force distributions as approached from the sub-scale stresses are similar to those obtained from a particle-scale discrete element approach. This means that the well-known properties of force distributions in model granular media, with hard particles and without an interstitial phase, can be extended to materials such as concrete and sandstone involving a jammed particle phase. Interestingly, the stress distributions are exponential at the contact zones and they are mainly guided by the particle phase in compression and by the matrix in tension. We also show that the distributions are increasingly broader for a decreasing matrix volume fraction in tension whereas in compression they depend only on the particle stiffness. t

Mots clefs : granular solids, stress field, lattice element method

1 Introduction

La nature très hétérogène de la transmission des forces dans les milieux granulaires est un sujet de recherche récurrent qui a motivé un grand nombre de travaux expérimentaux et numériques depuis 15 ans [1, 2, 3, 4, 5]. Un résultat essentiel est que le réseau de force comprend d'un point de vue mécanique deux sous-réseaux distincts [6] : 1) le réseau des forces fortes (chaînes de forces), typiquement supérieures à la force moyenne, présentant une distribution exponentielle décroissante et 2) le réseau des forces faibles qui présentent une probabilité non nulle même lorsque les forces tendent vers zéro.

Cette caractérisation du réseau de force de contact est essentielle pour la rhéologie des matériaux granulaires et semble être de manière plus générale une empreinte des systèmes percolés [7].

Le problème réside dans le fait que ces résultats concernent uniquement les systèmes granulaires modèles avec une texture très simplifiée. La plupart des matériaux granulaires rencontrés dans la nature ou dans l'industrie sont composés de particules déformables agglomérés dans une matrice solide de fraction volumique variable. Les roches sédimentaires (conglomerats, grès) ou certains biomatériaux tel que l'albumen de blé (granules d'amidon formant une structure compacte et liés entre eux par une matrice protéique)[8, 9], et un grand nombre de géo-matériaux comme les mortiers, bétons, ou asphaltes (aggrégats de taille variable agglomérés par une colle cimentaire)[10] sont des exemples bien connus de milieux granulaires solides.

Il n'est pas évident que ces caractéristiques concernant la transmission des forces puissent être appliquées à cette large gamme de matériaux granulaires constitués d'une microstructure complexe. En particulier, on peut se demander si la présence d'un squelette particulaire suffit à elle seule à produire les mêmes distributions de force que dans les milieux granulaires solides. L'effet de la fraction volumique de matrice ainsi que la manière

dont elle affecte la transmission des contraintes dans le milieu sont des points qui nécessitent d'être précisés. De plus la généralisation des distributions de forces sous un chargement en compression au cas d'un chargement en traction avec une interface particule-matrice cohésive n'est pas non plus évidente.

Dans le même sens, le rôle de la rigidité des particules et des zones de contact entre elles dans la transmission des contraintes n'est pas clairement identifié.

Pour traiter ce problème l'utilisation d'une approche dans laquelle les contraintes sont calculées à une échelle inférieure à celle des particules (et de la matrice) est nécessaire si on souhaite accéder non seulement aux contraintes à l'intérieur des particules et de la matrice mais aussi aux forces de contacts entre les particules à partir des contraintes à une échelle inférieure. Une telle approche nous permet de re-visiter mais aussi de valider les distributions des forces de contact établies dans la limite de particules infiniment rigides sans matrice avec des modèles de milieux granulaires tel que la DEM.

Dans cet article, nous proposons une méthode basée sur une discrétisation sur réseau des particules, de la matrice et des interfaces. Dans cette méthode nommée Lattice Element Method (LEM), la déformation élastique des particules est prise en compte non seulement au niveau des contacts avec les autres particules ou avec la matrice, comme en DEM, mais aussi dans leur volume. La matrice est introduite dans les pores entre les particules avec un volume variable et une adhésion avec les particules. La méthode LEM est assez efficace numériquement pour pouvoir simuler un grand nombre de particules maillées finement. Nos résultats sont cohérents avec l'idée que le squelette granulaire est à l'origine des chaînes de contraintes mise en évidence également en présence d'une matrice. En comparant les distributions de force pour un échantillon simulé alternativement par LEM et DEM dans la limite d'une fraction volumique de matrice faible, nous confirmons la pertinence des deux méthodes. On montre enfin que la fraction volumique de matrice, la rigidité des particules et le chargement affectent de manière significative le niveau d'hétérogénéité des forces, reflété dans la largeur des distributions de contraintes.

2 Méthode numérique

L'approche LEM a été largement utilisée dans le cadre de la mécanique statistique de la rupture dans les milieux multiphasiques, et appliquée pour étudier les propriétés de fissuration des céramiques, des bétons [10] et de certains biomatériaux comme l'albumen de blé [8, 9]. L'espace est discrétisé sur une grille de noeuds connectés entre eux par des éléments (liens) 1D. Chaque élément peut transmettre une force normale, une force en cisaillement et un moment jusqu'à ce que le seuil de rupture en force ou en énergie soit atteint, représentant la cohésion d'une phase ou de son interface avec une autre phase. Chaque phase (particule, matrice) et ses frontières sont matérialisées par des éléments portant les mêmes propriétés. Les échantillons sont déformés en imposant des déplacements ou des forces sur les noeuds formant leurs contours. L'énergie élastique totale du système est une fonction convexe du déplacement des noeuds et trouver la configuration unique d'équilibre des noeuds équivaut à un problème de minimisation. La minimisation de l'énergie à chaque pas de chargement implique que le système est soumis une déformation quasi-statique. La méthode utilisée ici est explicitée en détail dans Ref. [8].

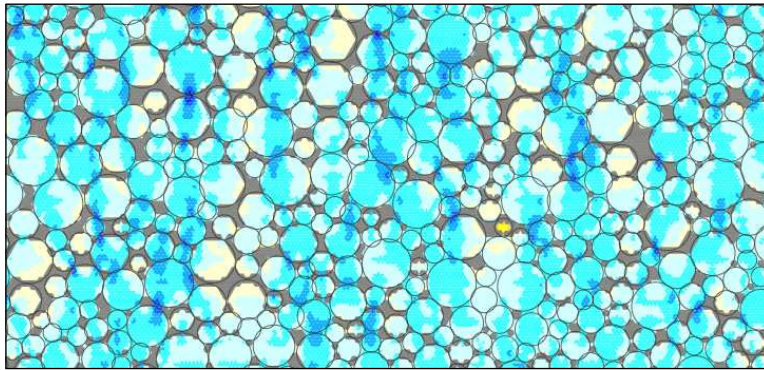


FIG. 1 – Champ des contraintes verticales σ_{yy} représenté en niveaux de couleurs.

Nous intéressons d'abord aux contraintes dans un échantillon granulaire soumis à une compression verticale avec bords latéraux libres. L'échantillon est construit en compressant isotropiquement un assemblage de disques par DEM avec un coefficient de frottement nul dans le but d'obtenir une compacité élevée. Une portion rectangulaire de cet assemblage contenant environ 5000 particules est ensuite discrétisée sur un réseau triangulaire de type Lattice. Le diamètre des particules d varie entre d_{min} et $d_{max} = 3d_{min}$ en suivant une distribution uniforme par fraction volumique ($P(d) \propto d^2$).

La matrice est introduite sous la forme de ponts, de largeur variable en fonction de la fraction volumique globale, placés entre les particules voisines et distribués de manière homogène à travers le système. Les propriétés élastiques de chaque phase sont contrôlées par les propriétés élastiques linéaires des éléments du réseau. Les principaux paramètres considérés dans cet article sont les constantes de Hooke k^p et k^m des éléments apparte-

nant respectivement aux phases "particule" et "matrice". Les raideurs des phases discrétisées correspondantes sont données par $E^p = \sqrt{3}k^p/(2a)$ et $E^m = \sqrt{3}k^m/(2a)$, où a est la longueur des éléments dans le cas d'un réseau triangulaire régulier [8]. L'état initial correspond à la configuration de référence. Soumis à une déformation verticale, les éléments se déforment et un champ de contrainte s'établit dans l'échantillon. Un tenseur de contrainte σ^a peut être attribué à chaque noeud a du réseau [11, 8] : $\sigma_{ij}^a = \frac{1}{V^a} \sum_b r_i^{ab} f_j^{ab}$, où j correspond aux noeuds voisins, r_i^{ab} est la composante i du vecteur reliant le noeud a au centre de l'élément ab et f_j^{ab} est la composante j de la force sur l'élément.

La figure 1 montre le champ de contrainte vertical σ_{yy} pour un échantillon contenant une faible fraction volumique de matrice ρ^m et soumis à une compression verticale. Les contraintes sur les noeuds sont représentées en niveaux de couleur sur des cellules élémentaires hexagonales centrées sur chaque noeud. On observe des chaînes de contraintes portées par des particules et une concentration plus élevée au niveau des zones de contact entre les particules. On note que dans cet exemple, les déformations sont élastiques et aucun élément n'est endommagé. Un élément peut être endommagé si le seuil de rupture en force est atteint, mais ce cas n'est pas considéré ici ou nous faisons l'hypothèse que tous les éléments sont actifs.

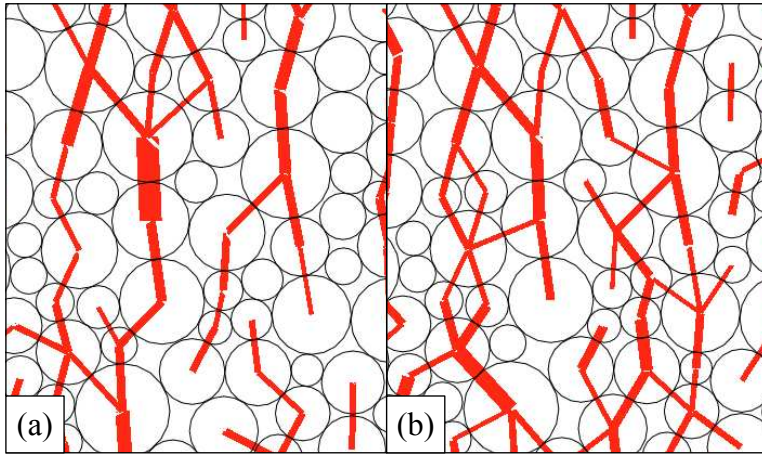


FIG. 2 – Carte des forces normales dans une partie d'un échantillon soumis à une compression verticale simulé par DEM (a) et LEM (b). L'épaisseur des traits est proportionnelle à la force.

3 Comparaison entre les approches LEM et DEM

Dans cette section, nous comparons les résultats d'un échantillon simulé d'une part avec l'approche LEM, et d'autre part avec l'approche DEM où seules les forces de contact sont accessibles. Dans l'approche LEM nous calculons les forces de contact \vec{f} en sommant les forces f^{ab} sur l'ensemble des éléments ab appartenant à la zone de contact S : $\vec{f} = \sum_{ab \in S} f^{ab}$.

La figure 2 montre la carte des forces normales entre les particules pour le même échantillon simulé avec l'approche LEM, et avec une approche DEM dans laquelle on introduit une cohésion en appliquant une résistance en traction au niveau des points de contact entre particules. On observe des chaînes de forces très similaires bien que les deux méthodes soient radicalement différentes. Les densités de probabilité (probability density functions ou pdf) des forces normales et tangentielles obtenues par les simulations LEM et DEM sont montrées à la figure 3.

On note que les deux pdfs coïncident sur l'ensemble des gammes de forces. Cette similitude entre les résultats issues des simulations LEM et DEM est d'autant plus intéressante qu'en DEM les particules sont considérées rigides et les contraintes à l'intérieur des particules ne sont pas prises en compte dans le calcul des forces de contact. Les pdfs présentent une distribution qui est classiquement observée dans les matériaux granulaires secs. Les forces inférieures à la force moyenne sont distribuées quasi-uniformément alors que les forces supérieures présentent une distribution exponentielle du type : $P_f(f_n) \propto e^{-\beta f_n / \langle f_n \rangle}$.

Cette corrélation forte entre les pdfs des forces avec $\beta \simeq 1.35$ s'avère être une validation des simulations DEM du fait que les forces de contact dans les simulations LEM sont calculées à une échelle plus fine [2, 4, 5].

4 Caractérisation de la distribution des contraintes

Nous utilisons désormais l'approche LEM pour analyser la distribution des contraintes à l'intérieur d'un échantillon, avec une fraction volumique de matrice $\rho^m = 0.01$. Le pdf des contraintes verticales σ_{yy} pour un échantillon soumis à une compression verticale est présenté à la figure 4 (a). L'échantillon étant soumis à une compression verticale, seulement 4% des contraintes verticales sont en tension et par conséquent ne

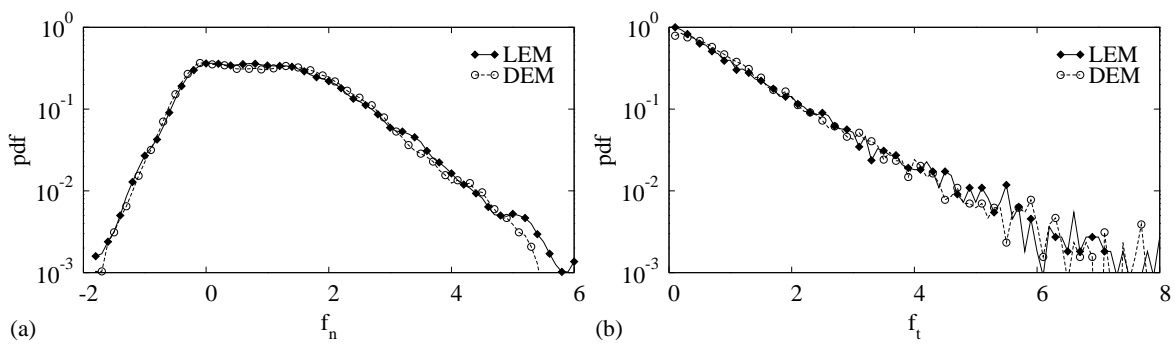


FIG. 3 – Densités de probabilité des forces normales (a) et tangentielles (b) sur un échantillon en compression axiale par simulations LEM et DEM. Les forces sont normalisées par la force normale moyenne.

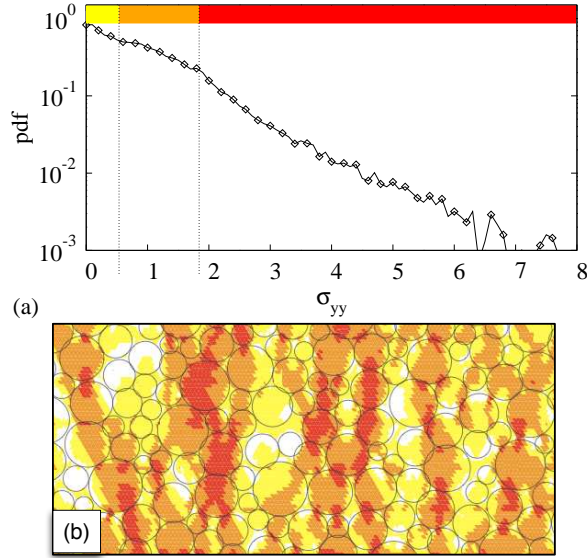


FIG. 4 – (Couleur en ligne) (a) Densité de probabilité des contraintes verticales normalisées par la contrainte moyenne en compression ; (b) Carte tricolore des contraintes verticales où les contraintes faibles, intermédiaires et fortes sont représentées respectivement en jaune, orange et rouge.

sont pas représentées à la figure Fig. 4 (a). On peut distinguer trois parties sur les pdfs des contraintes : 1) les contraintes faibles ; 2) les contraintes intermédiaires et 3) les contraintes fortes. La figure 4 (b) montre les zones correspondantes à ces trois types de contrainte dans l'échantillon. Les contraintes fortes chutent exponentiellement comme les forces de contact entre les particules (Fig. 3), $P_\sigma(\sigma_{yy}) \propto e^{-\beta\sigma_{yy}/\langle\sigma_{yy}\rangle}$ avec $\beta \simeq 0.95$, et sont essentiellement concentrées au niveau des zones de contact. Les contraintes faibles présentent une probabilité non nulle qui reflète l'effet de voûte et interviennent principalement à l'intérieur des particules non chargées. Enfin, les contraintes intermédiaires sont centrées sur la contrainte moyenne et sont localisées à l'intérieur des particules.

5 Effet de la fraction volumique de matrice

L'effet de la matrice est de redistribuer de manière plus homogène les contraintes dans le milieu. Les figures 5 (a) et (b) montrent P_σ pour trois valeurs de ρ^m en traction et en compression, avec $k^p = 100k^m$. La queue exponentielle persiste autant en traction qu'en compression, mais les pdfs des contraintes fortes sont plus étendus en compression qu'en traction à fraction volumique de matrice égale. Cela signifie que la distribution des contraintes est plus homogène en traction qu'en compression.

Il est aussi intéressant de noter que si les densités de probabilité des contraintes ne sont pas affectées par la fraction volumique de matrice en compression, elles sont de plus en plus larges en traction lorsque ρ^m diminue, reflétant ainsi la concentration des contraintes de plus en plus élevée au niveau des ponts entre les particules. En traction, l'exposant β varie de 1.10 à 2.55 lorsque ρ^m varie de 0.08 à 0.12, alors qu'en compression nous obtenons $\beta \simeq 0.95$ indifféremment de la valeur de ρ^m . Pour des valeurs plus élevées de ρ^m , le pdf des contraintes intermédiaires, qui correspond principalement aux contraintes localisées à l'intérieur des particules, tend vers une gaussienne centrée sur la contrainte moyenne.

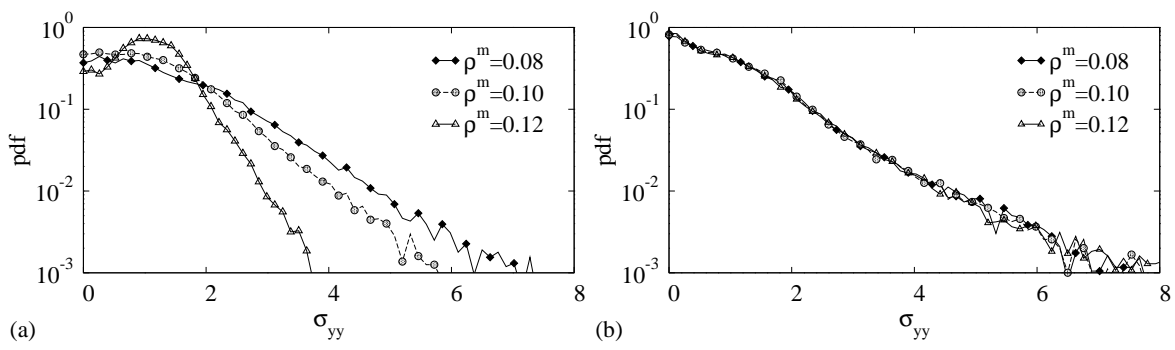


FIG. 5 – Densités de probabilité des contraintes verticales normalisées pour trois valeurs de la fraction volumique de matrice ρ^m (a) en traction et (b) en compression.

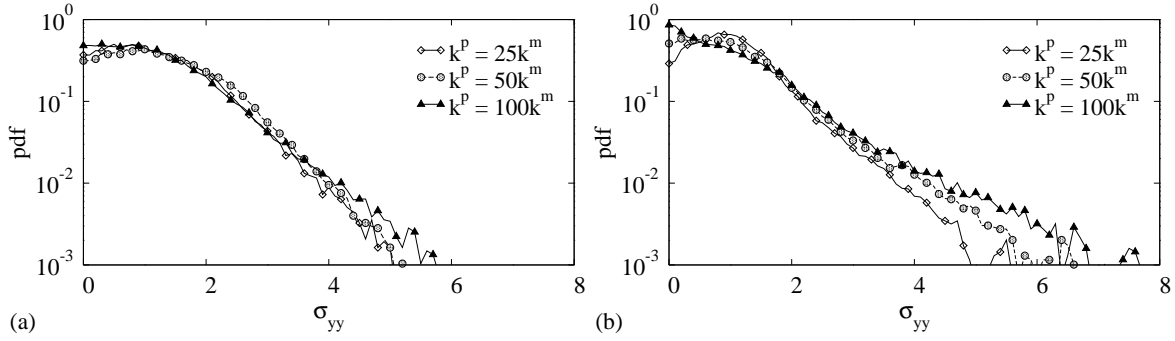


FIG. 6 – Densités de probabilité des contraintes verticales normalisées pour trois valeurs de la rigidité relative k^p/k^m (a) en traction et (b) en compression.

6 Effet de la rigidité des particules

Nous considérons dans cette section l'influence de la rigidité relative k^p/k^m sur la distribution des contraintes. Les figures 6 (a) et (b) montrent les pdfs des contraintes verticales pour trois valeurs de k^p/k^m en traction et en compression pour $\rho^m = 0.10$. On remarque qu'en traction la rigidité des particules n'a quasiment aucune influence sur la forme des pdfs, alors qu'en compression les pdfs deviennent de plus en plus larges avec l'augmentation de k^p/k^m .

Du fait de la présence du squelette granulaire, on note que les chaînes de contraintes sont essentiellement guidées par la matrice en traction, et par la phase particulaire en compression. Par conséquent, la transmission des contraintes n'est pas affectée par la fraction volumique de matrice en compression et seulement légèrement influencée par la rigidité des particules en traction.

Il est important de mentionner que, dans nos simulations LEM, la seule source de désordre est la configuration des particules, le réseau sous-jacent étant régulier. Par conséquent, la distribution des contraintes et sa variabilité en tant que fonction de ρ^m et k^p/k^m sont uniquement liées au désordre granulaire. Ceci explique pourquoi les pdfs des contraintes sont robustes et dépendent seulement qualitativement des paramètres. En particulier l'exposant β de la partie exponentielle des pdfs des contraintes fortes reflète le degré of d'inhomogénéité de la transmission des contraintes. Les tendances sont similaires pour les autres composantes de la contrainte.

7 Conclusion

En résumé, l'approche LEM fournit un outil efficace pour l'étude des champs de contraintes dans les matériaux granulaires complexes. En utilisant cette méthode et en intégrant les contraintes à une échelle inférieure à celle des particules, nous avons obtenu les mêmes distributions au niveau des forces de contact entre les particules que celles observées habituellement avec des simulations DEM ou expérimentalement. Nos résultats indiquent que indépendamment de la rigidité des particules et de la fraction volumique de matrice, les contraintes fortes sont essentiellement localisées au niveau des zones de contact entre les particules et présentent une distribution exponentielle de façon similaire aux forces de contacts appartenant au réseau fort. Ces résultats permettent de penser que les propriétés bien connus des distributions de force observées dans les modèles de milieux granulaires peuvent être étendues à des matériaux granulaires cimentés tels que les bétons, les conglomerats et les composites avec un phase particulaire dense.

Références

- [1] Liu C., Nagel S. R., Schecter D. A., Coppersmith S. N., Majumdar S., Narayan O., and Witten T. A. Force fluctuations in bead packs. *Science*, 269, 513, 1995.
- [2] Radjaï F., Jean M., Moreau J. J., and Roux S. Force distribution in dense two-dimensional granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77(2), 274, 1996.
- [3] Jaeger H. and Nagel S. Granular solids, liquids and gases. *Reviews of Modern Physics*, 68, 1259–1273, 1996.
- [4] Mueth D. M., Jaeger H. M., and Nagel S. R. Force distribution in a granular medium. *Phys. Rev. E*, 57, 3164, 1998.
- [5] Majmudar T. S. and Behringer R. P. Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials. *Nature*, 435(1079), 1079–1082, June 2005.
- [6] Radjaï F., Wolf D. E., Jean M., and Moreau J. J. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Phys. Rev. Lett.*, 80(1), 61–64, 1998.
- [7] Liu A. J. and Nagel S. R., editors. *Jamming And Rheology*. Taylor and Francis, New York, 2001.
- [8] Topin V., Delenne J.-Y., Radjaï F., Brendel L., and Mabilie F. Strength and fracture of cemented granular matter. *The European Physical Journal E*, 23, 413–429, 2007.
- [9] Topin V., Radjai F., Delenne J.-Y., Sadoudi A., and Mabilie F. Wheat endosperm as a cohesive granular material. *Journal of Cereal Science*, 47(2), 347–356, March 2008.
- [10] Schlangen E. and Garboczi E. J. Fracture simulations of concrete using lattice models : Computational aspects. *Engineering Fracture Mechanics*, 57(2-3), 319–332, 1997.
- [11] Moreau J. J. Numerical investigation of shear zones in granular materials. In Wolf D. E. and Grassberger P., editors, *Friction, Arching, Contact Dynamics*, pages 233–247, Singapore, 1997. World Scientific.