



HAL
open science

Etude d'un modèle à gradient d'endommagement

Kim Pham, Jean-Jacques Marigo, Corrado Maurini

► **To cite this version:**

Kim Pham, Jean-Jacques Marigo, Corrado Maurini. Etude d'un modèle à gradient d'endommagement. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03391224

HAL Id: hal-03391224

<https://hal.science/hal-03391224>

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Etude de la stabilité d'un modèle d'endommagement à gradient : barre cylindrique composite sous traction

K. PHAM¹, J-J. MARIGO¹, C. MAURINI¹

¹ Institut Jean Le Rond d'Alembert
Université Paris 6, 4 Place Jussieu, Case 162, 75252 Paris Cedex 05
pham@lmm.jussieu.fr, marigo@lmm.jussieu.fr, maurini@lmm.jussieu.fr

Résumé :

Nous étudions un barre cylindrique composite que l'on soumet à une extrémité à traction croissante. Celle-ci est composée d'un bimatériau adoucissant-incassable. Le matériau adoucissant est modélisé à l'aide d'un modèle d'endommagement à gradient. En suivant une approche variationnelle, on s'intéresse alors à l'évolution et à la stabilité de la structure au cours du chargement. Des expériences numériques sont alors comparées aux résultats théoriques.

Abstract :

A cylindrical composite bar is submitted to an increasing tensile loading. The bar is made of an elastic unbreakable core, surrounded by a softening elastic material. The softening material behavior is governed by a damage model with gradient damage. By following a variational approach, we highlight the evolution and stability of the structure during the increasing loading. Finally we compare numerical experiments to theoretical results.

Mots clefs : endommagement, régularisation, modèle à gradient, stabilité, matériau adoucissant

Introduction

L'usage de matériaux fragiles adoucissants comme le béton ou la céramique est courante dans de nombreuses constructions. Cependant, leur étude reste encore difficile pour de multiples raisons : d'un point de vue théorique, le problème d'évolution est mal posé [1] et l'utilisation de modèles standards d'endommagement ne peut conduire qu'à l'apparition de solutions instables. Ceci se traduit d'un point de vue numérique par de la "localisation" i.e. une sérieuse dépendance au maillage du champs d'endommagement. L'introduction de modèles non-locaux, vus comme des régularisés des modèles standards, a pour but de pallier ces problèmes [2,4]. Ceux-ci peuvent être vus comme une approximation de la rupture fragile [3]. Dans la formulation adoptée dans [2], la régularisation intervient directement dans la forme postulée de l'énergie de déformation W

$$W(\varepsilon, \alpha, \nabla \alpha) = \left(\frac{1}{2} E_0 \ell^2 \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha + \frac{1}{2} A(\alpha) \varepsilon \cdot \varepsilon + w(\alpha) \right) \quad (1)$$

où α et ε désignent l'endommagement et la déformation tandis que E_0 , $A(\alpha)$ et w représentent respectivement le module de Young du matériau sain, la loi de comportement et l'énergie volumique dissipée dans le matériau élastique endommageable au cours d'un processus d'endommagement homogène ($\nabla \alpha = 0$). Le paramètre ℓ joue le rôle d'une longueur interne au modèle et mesure l'influence de la régularisation. On se propose d'étudier dans le cadre de cette classe de modèles d'endommagement une barre cylindrique de faible épaisseur en traction. La première partie est consacrée à la mise en place du problème. Dans la deuxième partie, nous étudions l'évolution et la stabilité du problème au cours du temps. Enfin dans une dernière partie, nous simulons le problème numériquement et comparons les résultats issus de la simulation à ceux de la théorie.

1 Mise en place du problème

On considère une barre cylindrique mince Ω de longueur L et de diamètre extérieur e . On suppose que e est petite devant les autres dimensions de la structure, ainsi que devant la longueur interne ℓ au modèle non-local (1). La barre composite est constituée d'un coeur élastique incassable et d'une matrice élastique adoucissante en périphérie extérieure qui occupent respectivement des volumes de fractions volumiques η_f and η_m (avec $\eta_f + \eta_m = 1$). On appelle alors Ω_m et Ω_f les domaines respectifs qu'occupent la matrice et la fibre. On suppose en outre que les deux matériaux sont élastiques isotropes, leurs lois de comportement pouvant alors s'écrire localement

$$A_m(\alpha) \varepsilon = \lambda_m(\alpha) \text{Tr}(\varepsilon) \mathbf{1} + 2\mu_m(\alpha) \varepsilon \quad A_f \varepsilon = \lambda_f \text{Tr}(\varepsilon) \mathbf{1} + 2\mu_f \varepsilon$$

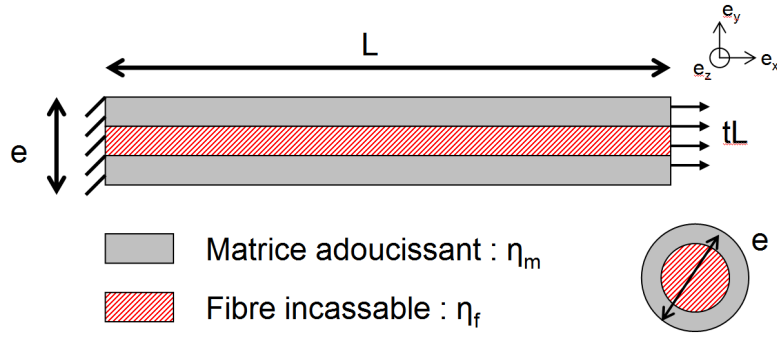


FIG. 1 – Barre composite en traction

où $\lambda_m(\alpha)$ et $\mu_m(\alpha)$ sont des fonctions qui dépendent localement de l'endommagement. On modélise le comportement adoucissant de la matrice à l'aide de l'énergie (1). L'énergie volumique de déformation s'écrit alors

$$W_m(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) = \frac{1}{2}E_m^0 \ell^2 \nabla\alpha \cdot \nabla\alpha + \frac{1}{2}A_m(\alpha)\varepsilon \cdot \varepsilon + w_m(\alpha) \quad \text{dans la matrice adoucissante} \quad (2)$$

$$W_f(\varepsilon) = \frac{1}{2}A_f \varepsilon \cdot \varepsilon \quad \text{dans la fibre incassable} \quad (3)$$

où E_m^0 désigne le module de Young sain de la matrice. On applique à une extrémité du cylindre une traction croissante qui se traduit par les conditions de chargement en déplacement suivantes (cf (Fig.1)) :

$$\begin{aligned} \text{En } x = 0 : u_x = u_y = u_z = 0 \\ \text{En } x = L : u_x = tL, u_y = u_z = 0 \\ \text{Sur la surface latérale libre d'effort } \sigma \cdot e_r = 0 \end{aligned}$$

où t est un paramètre de chargement croissant de 0 à $+\infty$.

2 Problème d'évolution

On définit les espaces d'admissibilité auxquelles appartiennent les variables d'endommagement et de déplacement de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_e &= \{ \beta \mid \beta \in H^1(\Omega_1, \mathbb{R}) \text{ avec } \beta \geq 0 \text{ p.p.} \} \\ \mathcal{C}_e^t &= \left\{ u \mid u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ avec } \vec{u}(L, y, z) = tL\vec{e}_x, \vec{u}(0, y, z) = \vec{0} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Pour un couple (u, α) pris dans $\mathcal{C}_e^t \times \mathcal{D}_e$, l'énergie potentielle totale du système s'écrit alors

$$J_e(u, \alpha) = \int_{\Omega_m} W_m(\varepsilon(u), \alpha, \nabla\alpha) d\Omega + \int_{\Omega_f} W_f(\varepsilon(u)) d\Omega \quad (5)$$

L'évolution du problème s'obtient de manière variationnelle à partir de l'énergie potentielle en écrivant une condition d'optimalité du premier ordre. En tenant compte de la condition d'irréversibilité ($\dot{\alpha}_t \geq 0$), l'équation d'évolution au temps t s'écrit alors

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\alpha_t, u_t) \in \mathcal{D}_e \times \mathcal{C}_e^t \text{ tel que} \\ J'_e(u_t, \alpha_t)(v - \dot{u}_t, \beta - \dot{\alpha}_t) \geq 0 \quad \forall (v, \beta) \in \dot{\mathcal{C}}_e^t \times \mathcal{D}_e \end{aligned} \quad (6)$$

où J'_e désigne la dérivée au sens de Gâteaux de J_e . L'une des difficultés réside dans le caractère tridimensionnel du problème de départ. En partant de l'hypothèse de faible épaisseur du cylindre, il est alors possible de montrer que les points critiques de J_e (5) convergent vers les points critiques d'une fonctionnelle limite unidimensionnelle J_0 . Celle-ci est définie sur des champs scalaires (u, α) pris dans les espaces limites (4) (u représentant la limite du déplacement longitudinal u_x).

$$\begin{aligned} J_0(u, \alpha) &= \int_0^L \frac{1}{2} \eta_m E_m^0 \ell^2 \alpha'^2 + \frac{1}{2} (\eta_m E_m(\alpha) + \eta_f E_f) u'^2 + \eta_m w_m(\alpha) dx \quad \text{avec } (u, \alpha) \in \mathcal{D}_0 \times \mathcal{C}_0^t \\ \mathcal{D}_0 &= \{ \beta \mid \beta \in H^1(0, 1) \text{ avec } \beta \geq 0 \text{ p.p.} \} \\ \mathcal{C}_0^t &= \{ u \mid u \in H^1(0, 1) \text{ avec } u(L) = tL \text{ et } u(0) = 0 \} \end{aligned} \quad (7)$$

Le cas limite correspond ici à de l'homogénéisation dans l'épaisseur de la barre. Le problème d'évolution limite s'obtient alors en transposant le principe variationnel (6) à la fonctionnelle limite (7)

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\alpha_t, u_t) \in \mathcal{D}_0 \times C_0^1 \text{ tel que} \\ & J'_0(u_t, \alpha_t)(v - \dot{u}_t, \beta - \dot{\alpha}_t) \geq 0 \quad \forall (v, \beta) \in \dot{C}_0^1 \times \mathcal{D}_0 \end{aligned} \quad (8)$$

En suivant le même raisonnement que dans [2], le problème variationnel (8) peut se séparer en deux problèmes implicitement liés. On a tout d'abord un problème classique d'élasticité à endommagement fixé en faisant $\beta = \dot{\alpha}_t$ dans (8)

$$\int_0^L (\eta_m E_m(\alpha_t) + \eta_f E_f) u_{t,x} v_{,x} dx = 0 \quad \forall v \in C_0^1 \quad (9)$$

On déduit de (9) que la contrainte est constante dans la barre et est donnée par

$$\sigma_t = (\eta_m E_m(\alpha_t) + \eta_f E_f) u_{t,x} \quad \text{avec} \quad \sigma_t = \frac{tL}{\int_0^L dx / (\eta_m E_m(\alpha_t) + \eta_f E_f)} \quad (10)$$

En faisant $v = \dot{u}_t$ dans (8), on obtient un problème en endommagement, qui après intégration par parties s'écrit localement :

• Dans $]0, L[$

$$\text{Irreversibilité : } \dot{\alpha}_t \geq 0 \quad (11)$$

$$\text{Critère d'endommagement : } \frac{1}{2} E'_m(\alpha_t) u_{t,x}^2 + w'_m(\alpha_t) - E_m^0 \ell^2 \alpha_{t,xx} \geq 0 \quad (12)$$

$$\text{Équilibre d'énergie : } \dot{\alpha}_t \cdot \left(\frac{1}{2} E'_m(\alpha_t) u_{t,x}^2 + w'_m(\alpha_t) - E_m^0 \ell^2 \alpha_{t,xx} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\text{Conditions limites en } x = 0 \text{ et } x = 1 : \quad \dot{\alpha}_t \cdot \alpha_{t,x} = 0, \quad \dot{\alpha}_t \geq 0 \quad (14)$$

Avec la montée en chargement, plusieurs phases d'évolution vont se succéder. Nous nous proposons dans la suite de faire une étude analytique du problème en étudiant chacune de ces phases en terme d'évolution et de stabilité.

2.1 Phase élastique

Durant la phase élastique, l'endommagement est nul dans la barre. Le déplacement longitudinal associé à chaque temps de chargement s'écrit

$$u_t(x) = tx \quad (15)$$

En réinjectant (15) dans le critère d'endommagement (12) et en utilisant la nullité de l'endommagement dans la structure (pour la phase élastique), on voit que le critère d'endommagement n'est pas satisfait (inégalité stricte) tant que $t < t_e$ où t_e est donné par

$$t_e = \sqrt{\frac{-2w'_m(0)}{E'_m(0)}} \quad (16)$$

Pour $t = t_e$, le critère en endommagement (12) est nul et l'endommagement apparaît pour la première fois dans la structure. D'autre part, d'après (16), pour $w'_m(0) = 0$, on remarque que cette phase élastique n'a pas lieu (i.e. $t_e = 0$), le cylindre pouvant s'endommager dès le premier instant de mise en chargement. Par exemple, si w_m est une loi proportionnelle à α^2 , on trouve que $t_e = 0$ et le cylindre s'endommagera donc dès le premier instant de mise en chargement. En revanche, pour des énergies volumiques dissipées w_m proportionnelles à α , le temps t_e sera non nul et on observera donc bien une phase élastique.

2.2 Étude de la branche homogène endommagée

D'un point de vue pratique, l'étude des états homogènes d'endommagement revêt de multiples intérêts. En effet dans le but d'identifier les lois matériaux qui régissent le modèle, un état homogène d'endommagement permet de relier directement la courbe force-déplacement relevée en bout de barre au diagramme contrainte-déformation identique en tout point de l'éprouvette. Son étude et les conditions sous lesquelles il est possible d'observer un état homogène au cours d'un essai présentent donc de nombreux intérêts.

2.2.1 Évolution en temps

Une fois le critère d'endommagement atteint, l'endommagement commence à croître dans la structure. Dans cette partie, nous nous intéressons à des endommagements qui soient d'une part solutions du problème d'évolution et d'autre part homogènes. Le déplacement associé dans ce cas est le même que celui de la phase élastique (15). En étudiant le problème d'endommagement, on obtient la valeur de l'endommagement homogène à chaque temps t

$$\frac{-2w'_m(\alpha_t)}{E'_m(\alpha_t)} = t^2 \quad (17)$$

En prenant comme loi d'endommagement

$$E_m = E_m^0(1 - \alpha)^2 \quad \text{et} \quad w_m(\alpha) = \frac{\sigma_m^2}{E_m^0} \alpha, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (18)$$

on trouve en injectant (18) dans (17)

$$\alpha_t = 1 - \left(\frac{t_e}{t}\right)^2, \quad t \geq t_e \quad (19)$$

2.2.2 Stabilité

Sachant qu'il est possible physiquement d'observer, au cours d'un essai, différents scénarios d'évolution (*e.g.* non-unicité de l'endroit où fissurerait une éprouvette de béton en traction simple), les bifurcations qui peuvent apparaître dans un modèle d'endommagement ne sont donc que le reflet de la complexité du comportement des matériaux adoucissants. Le caractère "bien-posé" d'un problème qui impliquerait l'unicité de la solution serait alors dans ce cas un cadre trop restrictif pour la modélisation du phénomène observé. Ainsi, en acceptant l'existence de ces bifurcations, on peut plutôt se poser la question de savoir parmi ces dernières lesquelles sont stables (dans un sens restant à définir) et peuvent être des chemins physiquement acceptables et donc observables. A cette fin, l'approche variationnelle de la mécanique de l'endommagement se révèle judicieuse puisqu'elle introduit naturellement la stabilité d'un état comme une condition d'optimalité du second ordre de l'énergie. En effet, un état déplacement-endommagement sera dit stable s'il n'est pas possible de trouver parmi un environnement d'états accessibles un état d'énergie moindre. Par ailleurs, l'accessibilité est une notion fondamentale dans ce critère de stabilité au sens où l'on ne peut aller tester que des états ayant un endommagement au moins égal à celui soumis au critère. De manière formelle, ce dernier s'écrit

$$\text{Critère de stabilité : } \exists r > 0, \forall \beta \in \mathcal{D}_0 : \|\beta\| = 1, \forall h \in [0, r] \quad J_0(u, \alpha) \leq J_0(u + hv, \alpha + h\beta) \quad (20)$$

En pratique, la stabilité étant une notion locale (étude du voisinage d'un point critique), on développe le critère (20) autour de $h = 0$:

$$J_0(u_t + hv, \alpha_t + h\beta) = J_0(u_t, \alpha_t) + hJ'_0(u_t, \alpha_t)(v, \beta) + \frac{h^2}{2}J''_0(u_t, \alpha_t)(v, \beta) + o(h^2) \quad (21)$$

où J'_0 et J''_0 désignent respectivement les dérivées premières et secondes de l'énergie potentielle. L'étude se ramène alors à connaître le signe de ces dérivées directionnelles. Pour l'état homogène d'endommagement, la dérivée première vaut

$$J'_0(u_t, \alpha_t)(v, \beta) = (\eta_m E_m(\alpha_t) + \eta_f E_f) \int_0^L u_t v' dx + \left(\frac{1}{2} \eta_m E'_m(\alpha_t) + \eta_m w'_m(\alpha_t) \right) \int_0^L \beta dx \quad (22)$$

La première intégrale de (22) est nulle car u_t réalise l'équilibre de la barre à l'instant t (9). Il suffit alors de connaître le signe du deuxième terme pour conclure sur le signe de la dérivée première. Durant la phase élastique ($t \leq t_e$), le critère en endommagement (12) étant strictement positif, on en déduit donc que l'énergie première est strictement positive pour des β non nuls et que la phase élastique est stable. En revanche, en dehors de la phase élastique, l'endommagement croît avec un critère (12) atteint sur toute la barre. On en déduit alors que le terme devant la deuxième intégrale est nul et que la dérivée première est donc nulle pour $t \geq t_e$. D'après (20), l'étude de la stabilité se ramène donc pour des temps $t \geq t_e$ à la connaissance du signe de la dérivée seconde. L'étude effective de la dérivée seconde étant longue, on se propose ici dans dégager les principaux résultats que l'on représente sous forme de diagrammes de stabilité (Fig.2). En particulier, on veut comprendre d'une part l'influence du matériau incassable sur la stabilité de la solution homogène et d'autre part les effets d'échelle inhérents à l'introduction d'une longueur interne dans le modèle régularisé. On se limite ici à la loi (18) bien que l'étude puisse être menée dans un cadre plus général. Tout d'abord dans le cas où la barre est composée seulement du matériau adoucissant (cas où $\eta_f E_f / \eta_m E_m^0 = 0$), on constate

que pour n'importe longueur de barre, l'état homogène devient instable aux temps longs. En particulier si la barre est suffisamment grande ($L \gg \ell$), l'état homogène devient instable dès la fin de la phase élastique. En revanche pour des barres de tailles comparables à la longueur interne, l'état homogène sera stable durant un laps de temps suivant la fin de la phase élastique. Cet effet d'échelle qui apparaît dans les résultats de stabilité du modèle à gradient ne se retrouve pas dans les modèles locaux d'endommagement pour lesquels la solution homogène est instable pour n'importe quelle longueur de barre. Etudions les conséquences de l'adjonction d'un matériau incassable au coeur de la barre (cas où $\eta_f E_f / \eta_m E_m^0 > 0$). Tout d'abord, on remarque sur (Fig.2) que la présence du matériau incassable rend nécessairement stable la solution homogène aux temps longs. D'autre part, plus $\eta_f E_f / \eta_m E_m^0$ est grand, plus la zone d'instabilité se réduit. En particulier pour $\eta_f E_f / \eta_m E_m^0 > 3$, l'état homogène est stable à tout temps et pour toute longueur de barre ! En revanche pour des ratios inférieurs et des longueurs de barres suffisamment grandes, on retrouve le phénomène d'instabilité qui suit la fin du régime élastique. La structure va alors bifurquer vers un chemin d'évolution non-homogène. Toutefois, sachant que l'endommagement homogène finit par être stable par la suite, une question ne manque pas de surgir : est-il possible après avoir bifurqué vers une solution non-homogène de suivre un chemin d'évolution qui nous permette de retrouver la solution homogène quand celle ci regagne sa stabilité ? L'étude numérique qui suit nous apporte des éléments de réponse.

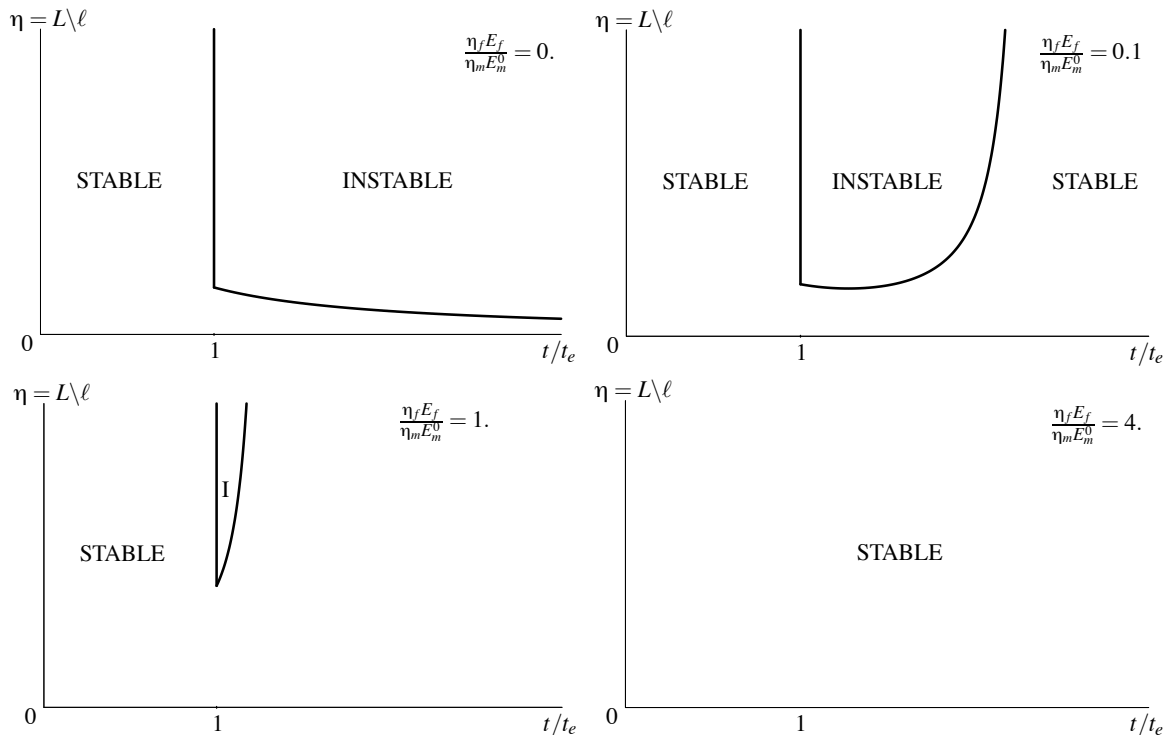


FIG. 2 – Diagramme de stabilité de la solution endommagée homogène

3 Etude numérique comparative

Le modèle d'endommagement à gradient (1) sur lequel se base notre étude nous offre l'avantage de pouvoir travailler avec des éléments finis classiques. En effet, l'endommagement se calcule de la même manière que le déplacement, c'est à dire à chaque noeud du maillage et non pas après post-traitement aux points de Gauss comme dans une formulation locale du problème d'endommagement. Dans le cas du modèle adoucissant, l'énergie n'étant plus convexe par rapport au couple déplacement-endommagement, on n'est plus assuré que le minimum global de l'énergie soit l'unique point critique. De ce fait, la résolution de la formulation variationnelle (8) (i.e. la condition d'optimalité d'ordre 1), nous assure seulement d'avoir trouvé un point critique qui peut être au choix un point selle ou un minimum local. Pour obtenir à chaque pas de temps un point critique de l'énergie, on utilise un algorithme de minimisation alternée qui s'appuie sur les propriétés mécaniques du système. En effet, on sait que l'énergie totale est convexe par rapport à chacune des variables isolément (l'autre étant fixée), on est donc assuré de converger vers un point critique à l'issue de ce processus. En prenant la loi (18) pour l'endommagement, on peut alors utiliser des éléments finis 1D pour la simulation. L'algorithme consiste alors à minimiser (7) alternativement dans chaque direction, l'autre direction étant fixée. On prend le choix suivant de coefficients,

$$\eta_m E_m^0 = 1., \quad \frac{\eta_f E_f}{\eta_m E_m^0} = 1., \quad \ell = 0.1, \quad L = 1, \quad \sigma_m = 1 \quad \text{d'où} \quad t_e = 1 \quad (23)$$

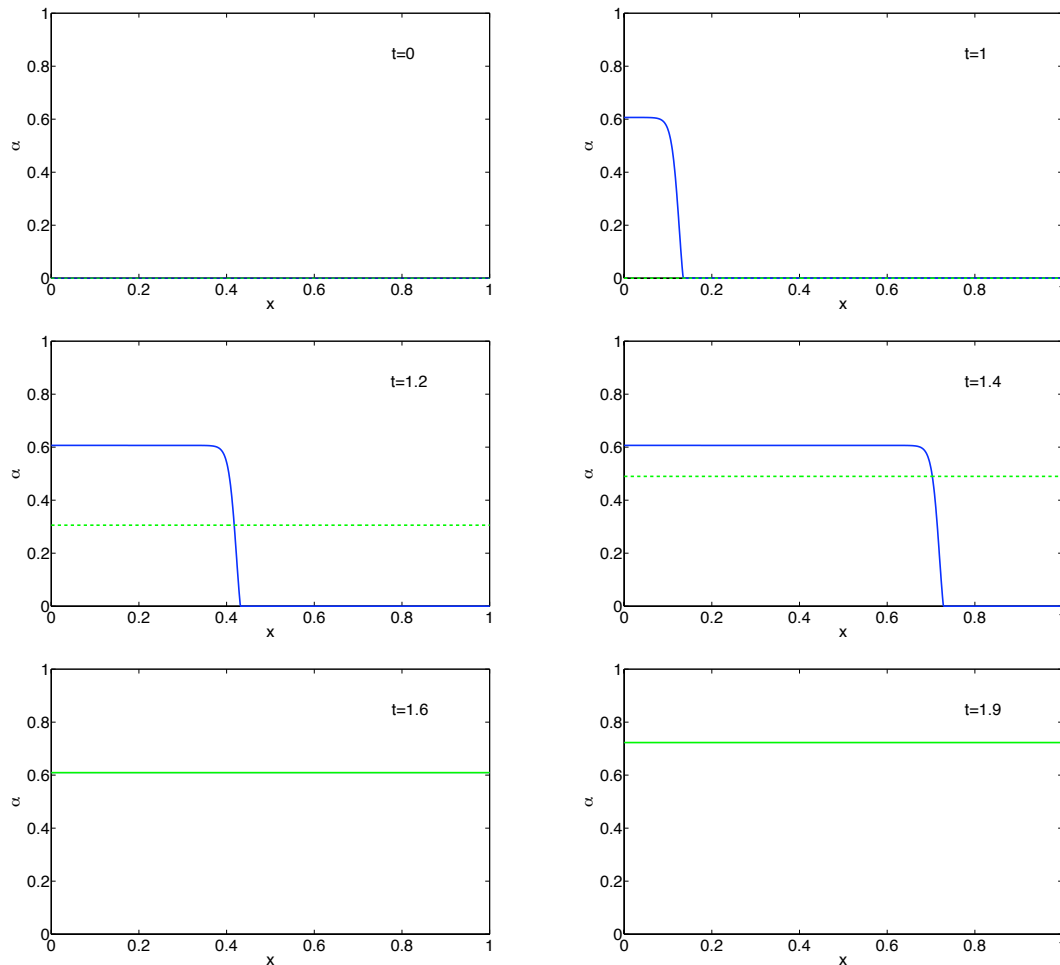


FIG. 3 – Profil de l'endommagement le long de la barre pour différents temps

(Fig.3) montre les différentes étapes de la formation d'endommagement prises à différents temps. La courbe en pointillée représente la courbe homogène qui est tracée d'après les valeurs analytiques (23). La courbe au trait continu est celle obtenue numériquement par l'algorithme de minimisation alternée. D'après la partie précédente, pour la valeur de ratio $\eta_f E_f / \eta_m E_m^0 = 1$, la solution homogène n'est pas stable durant un laps de temps qui suit la phase élastique et l'évolution se fait nécessairement de manière inhomogène. L'étude numérique vient confirmer ces résultats. En effet, on constate numériquement que après une phase élastique que l'algorithme arrive à suivre jusqu'à son terme, il apparaît une bifurcation dans le chemin d'évolution à $t = t_e (= 1)$. Cette bifurcation est localisée sur une partie de la barre de taille comparable à la longueur interne du modèle ($\ell = 0.1$). Cependant plutôt que de continuer à croître sur une zone localisée, cet endommagement va se propager le long de la barre à la manière d'une transition de phase (une zone endommagée à $\alpha = \alpha_c = 0.61$, une zone saine à $\alpha = 0$ et enfin une zone réalisant la transition entre les 2 phases sur une distance de l'ordre de ℓ). Une fois avoir endommagé l'ensemble de la barre au niveau critique α_c à l'instant $t = 1.6$ (temps au delà de celui de gain de stabilité de la solution homogène, cf (Fig.2)), l'endommagement se développe de manière homogène. Les expériences numériques ont donc permis d'exhiber des chemins d'évolution capables de rejoindre, par le biais d'une transition de phase, la solution homogène dans sa partie stable.

Références

- [1] A. Benallal, R. Billardon, et G. Geymonat. Bifurcation and localization in rate independent materials. In Q. Nguyen, editor, *C.S.I.M Lecture Notes on Bifurcation and Stability of Dissipative Systems*. Springer-Verlag.
- [2] A. Benallal et J.-J. Marigo. Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 15 : 283 – 295, 2007.
- [3] B. Bourdin, G. Francfort, et J.-J. Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 :797-826, 2000.
- [4] E. Lorentz et S. Andrieux. Analysis of non-local models through energetic formulations. *Int. J. Solids Struct.*, 40 :2905-2936, 2003.