



HAL
open science

Formulation thermodynamique d'une loi de comportement d'un matériau quasi-fragile couplant élasticité, endommagement et frottement : Application au béton

Lucas Adelaïde, Benjamin Richard, Frédéric Ragueneau, Christian Cremona,
Jean-Louis Tailhan

► To cite this version:

Lucas Adelaïde, Benjamin Richard, Frédéric Ragueneau, Christian Cremona, Jean-Louis Tailhan. Formulation thermodynamique d'une loi de comportement d'un matériau quasi-fragile couplant élasticité, endommagement et frottement : Application au béton. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03391013

HAL Id: hal-03391013

<https://hal.science/hal-03391013>

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Formulation thermodynamique d'une loi de comportement d'un matériau quasi-fragile couplant élasticité, endommagement et frottement : application au béton

L. ADELAÏDE^a, B. RICHARD^a, F. RAGUENEAU^b, C. CREMONA^c, J-L. TAILHAN^a

a. Univ. Paris-Est/Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), 58 Boulevard Lefèbvre, 75015 PARIS

b. Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT), ENS Cachan/Univ. Paris VI/Univ. Sud, 61 avenue du Président Wilson, 94230 CACHAN

c. Commissariat Général au Développement Durable, Direction de la Recherche et de l'Innovation, 92055 LA DEFENSE

Résumé :

La précision du comportement mécanique des ouvrages en béton nécessite une prise en compte satisfaisante de la fissuration. Dans ce travail, une formulation thermodynamique d'un modèle prenant en compte l'endommagement, les déformations résiduelles et, partiellement les effets unilatéraux propres au béton est présentée. Afin de montrer les potentialités d'une telle formulation, l'étude d'une poutre en béton armé sous chargement mécanique est exposée.

Abstract :

The accuracy of the mechanical behavior of concrete structures requires taking into account cracking in an efficient manner. In this work, a three-dimensional thermodynamical formulation including the damage, the residual deformation and partly unilateral effects specific to the concrete is introduced. In order to show the capabilities of such a formulation, the study of a reinforced concrete beam under mechanical loading is presented.

Mots clefs : béton armé, endommagement, fissuration, effet unilatéral

1 Introduction

Le béton est un des matériaux de construction le plus utilisé, en raison de ses propriétés mécaniques, de sa souplesse d'utilisation et de son faible coût. Il s'agit d'un matériau composite, composé d'un mélange précisément dosé de ciment, de granulats (sables, gravillons), d'eau et d'adjuvants. Selon les proportions de chacun de ses constituants, le béton peut être formulé pour un usage bien précis (béton armé, béton précontraint, béton bitumineux, béton fibré) [1]. Le béton est de ce fait un matériau évolutif sujet à des dégradations chimiques et mécaniques. Cet aspect couplé à une fragilité au chargement (traction) favorise le développement et la propagation de fissures ainsi que différents modes de rupture [2]. La dégradation que subissent les ouvrages se manifeste à plusieurs échelles, celle de la structure et celle du matériau. Cette dégradation peut être due à une augmentation de charges de service et/ou environnementales et/ou un manque d'entretien. En conséquence, les exigences de performance (durabilité, aptitude au service, sécurité structurale) de l'ouvrage peuvent ne pas être respectées [3]. Cela peut engendrer un coût élevé pour le gestionnaire d'ouvrages. Actuellement, la conception des ouvrages est basée sur une approche performantielle donnée dans l'Eurocode 2 [4]. L'estimation de l'ouverture et de l'espacement des fissures est fournie par des formules empiriques. Mais, toutes ces formulations ont un domaine de validité restreint. De même, les outils de calculs dont dispose l'ingénierie ne sont pas suffisamment performants pour déterminer un état représentatif de la fissuration des structures en béton armé et/ou précontraint surtout si elles sont soumises à des sollicitations sévères. En effet, depuis plusieurs décennies, de nombreuses études sont menées de manière expérimentale et numérique à plusieurs échelles, dans le but de mettre en place un modèle capable de décrire et de prédire de manière convenable et pertinente selon l'échelle d'observation, le comportement du béton. De nos jours, il existe deux grandes familles de modèles, les modèles sans discontinuité cinématique et ceux avec prise en compte explicite de la discontinuité cinématique. Le projet national CEOS-FR (Comportement et Evaluation des Ouvrages Spéciaux vis-à-vis de la Fissuration et du Retrait) tente de répondre à ces interrogations en essayant de faire progresser de façon significative les outils dont dispose l'ingénierie en matière d'estimation et de prévision de l'état d'endommagement lié à la fissuration d'éléments de structures en béton armé et/ou précontraint en fonction de leur usage [5]. Pour ce faire, dans un premier temps, un benchmark sur la modélisation faisant appel à des phénomènes physiques différents a été lancé. Dans le cadre de ce benchmark, qui repose sur une expérimentation numérique, une loi de comportement développée au LCPC a été testée vis-à-vis du thème, la fissuration sous chargement statique monotone. Cette loi

de comportement est capable de modéliser des matériaux élasto-frottant endommageables. Elle s'inscrit dans le cadre rigoureux de la thermodynamique des processus irréversibles et ne viole donc pas les grands principes physiques de conservation et d'évolution [6], [7]. Dans cette article, tout d'abord, les équations constitutives du comportement élasto-frottant endommageable du béton sont présentées [8], [9]. Cette présentation offre l'intérêt de montrer les propriétés d'une telle formulation. Une poutre en béton armé en flexion trois points est enfin étudiée jusqu'à rupture pour illustrer son application.

2 Potentiel thermodynamique et lois d'état

Dans cette partie, nous présentons un modèle s'inscrivant dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles [6], [7]. Ce modèle est applicable à des matériaux de type élasto-frottant endommageable tels que le béton. Par conséquent, il doit être capable de prendre en compte les boucles d'hystérésis dues au frottement interne dans le béton, les effets unilatéraux et l'endommagement dû au caractère fragile du béton en traction [10]. La convexité et la différentiabilité du potentiel et la positivité de la dissipation doivent être assurées. Pour décrire convenablement le frottement et l'endommagement du béton, le tenseur des déformations totales $\underline{\underline{\varepsilon}}$ est décomposé en une partie sphérique et une déviatorique ainsi,

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^s + \underline{\underline{\varepsilon}}^d$$

$$\text{où } \underline{\underline{\varepsilon}}^s = \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}}$$

Dans le but de prendre en compte les effets unilatéraux au moins de manière partielle, on suppose que l'endommagement affecte la partie positive du tenseur des déformations sphérique dans le cadre de la prise en compte du mode I (l'ouverture) qui est largement plus néfaste. D'autre part, l'endommagement affecte également le tenseur des déformations déviatorique $\underline{\underline{\varepsilon}}^d$ vis-à-vis du mode II (le cisaillement). Le glissement entre les lèvres des fissures tend à provoquer du frottement qui se traduit par des boucles d'hystérésis en chargement cyclique. Le cisaillement étant grandement responsable de ce phénomène, seule la partie déviatorique $\underline{\underline{\varepsilon}}^d$ est affecté par $\underline{\underline{\varepsilon}}^\pi$, qui est le tenseur de glissement supposé purement déviatorique (soit $\text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^\pi) = 0$). Le mécanisme de glissement mis en place est capable de supporter les effets hystériques dus au frottement des lèvres des fissures responsable de l'irréversibilité des déformations [11]. Ainsi, cela permet d'obtenir une meilleure description du comportement du matériau en chargements cyclique et dynamique. En s'inspirant de l'approche proposée par [11], l'énergie libre s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho\psi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\kappa}{3} (1-d) < \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) >_+^2 - \frac{\kappa}{3} < -\text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) >_+^2 + 2\mu(1-d) \underline{\underline{\varepsilon}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}^d + 2\mu d \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^d - \underline{\underline{\varepsilon}}^\pi \right) : \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^d - \underline{\underline{\varepsilon}}^\pi \right) \right\} \quad (1)$$

$$+ \frac{1}{2} \gamma \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{\alpha}} + H(z)$$

où ρ est la masse volumique du matériau considéré, κ le module de compressibilité, μ le module de Coulomb, $\underline{\underline{\varepsilon}}^\pi$ le tenseur purement déviatorique, modélisant le glissement entre les lèvres des fissures engendrées, d la variable d'endommagement scalaire variant entre 0 (matériau sain) et 1 (matériau totalement endommagé), $\underline{\underline{\alpha}}$ le tenseur associé au mécanisme d'écrouissage cinématique, γ un paramètre matériau à identifier et z une variable scalaire associée à l'écrouissage isotrope par endommagement à laquelle est attachée une fonction de consolidation, H .

Afin d'établir les lois d'état, nous commençons par fournir l'expression de la dissipation intrinsèque volumique qui doit de surcroît être positive. Cette expression provient de l'écriture de l'inégalité de Clausius-Duhem-Truesdell [12] pour un processus de déformation isotherme :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad (2)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy et $\dot{\psi}$ la dérivée temporelle de ψ .

En développant l'expression de $\dot{\psi}$ par rapport à toutes les variables d'état que sont $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^\pi$, d , z et $\underline{\underline{\alpha}}$, et en la reportant dans l'inégalité de la dissipation intrinsèque volumique 2, la relation suivante peut être obtenue :

$$\left(\underline{\underline{\sigma}} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\sigma}}^\pi : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^\pi} + Y : \dot{d} - Z : \dot{z} - \underline{\underline{X}} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} \geq 0 \quad (3)$$

où Y est la force thermodynamique associée à l'endommagement, Z celle associée à l'écrouissage isotrope et $\underline{\underline{X}}$ la contrainte de rappel.

3 Potentiels de dissipation et lois d'évolution

Dans cette partie, les lois d'évolution des différents mécanismes sont introduites.

3.1 Endommagement et écrouissage isotrope

Les mécanismes dissipatifs que sont l'endommagement et l'écrouissage isotrope suivent une évolution associée. Elle est capable de prendre en compte les effets dus à la fissuration du matériau ainsi que la dissymétrie entre la traction et la compression avec une seule et unique variable d'endommagement scalaire à l'aide de la fonction de consolidation $H(z)$. La surface de charge s'exprime donc de la manière suivante :

$$f_d(\bar{Y}, Z, Y_0) = \bar{Y} - (Z + Y_0) \quad (4)$$

où \bar{Y} correspond à la quantité d'énergie dissipée par endommagement et Y_0 à un seuil initial d'endommagement associé au matériau. Afin de gérer de manière efficace la dissymétrie entre la traction et la compression, le taux d'énergie dissipée par endommagement, \bar{Y} a été décomposé de la sorte :

$$\bar{Y} = Y_{\mathbf{Dir}} + Y_{\mathbf{Ind}} \quad (5)$$

où $Y_{\mathbf{Dir}}$ et $Y_{\mathbf{Ind}}$ représentent les taux d'énergie de déformation par unité de volume associés à l'extension directe et induite (effets de poisson) respectivement. Ces deux quantités sont déterminées à partir des tenseurs d'extension directe et induite qui sont déduits du tenseur des déformations totales. Ces tenseurs sont définis par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{\mathbf{Dir}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_+ \mathcal{H}(\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_+ : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_{\mathbf{Ind}} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_{\mathbf{Dir}} \quad (6)$$

La fonction de consolidation basée sur la proposition de [10], peut être déterminée de manière à ce que la variable d'endommagement soit intégrée explicitement :

$$H'(z) = \frac{-z}{1+z} \left\{ \frac{\mathcal{H}(\langle \mathbf{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \rangle_+ : \langle \mathbf{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_+)}{A_{\mathbf{Dir}}} + \frac{1 - \mathcal{H}(\langle \mathbf{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \rangle_+ : \langle \mathbf{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle_+)}{A_{\mathbf{Ind}}} \right\} \quad (7)$$

où \mathcal{H} est la fonction de Heaviside qui prend la valeur 0 pour tous les réels strictement négatifs et la valeur 1 partout ailleurs, $A_{\mathbf{Dir}}$ et $A_{\mathbf{Ind}}$ des paramètres matériau à identifier respectivement en traction directe et en compression simple.

Le principe de dissipation maximale nous permet d'obtenir les lois de normalité dans lesquelles un unique multiplicateur de Lagrange, $\dot{\lambda}_d$ intervient [12]. Ainsi, on a :

$$\dot{d} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial \bar{Y}} \quad \text{et} \quad \dot{z} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial f_d}{\partial Z}$$

Afin de déterminer ce multiplicateur de Lagrange, les conditions de complémentarité de Kuhn-Tucker [12] sont considérées :

$$f_d < 0, \quad \lambda_d > 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda}_d f_d = 0$$

3.2 Glissement et écrouissage cinématique

Pour introduire un écrouissage cinématique non linéaire, l'évolution du glissement est gérée de manière non associée [8]. Le seuil de glissement est défini ainsi :

$$f_\pi = J_2(\underline{\underline{\sigma}}^\pi - \underline{\underline{X}}) + cI_1(\underline{\underline{\sigma}}^\pi - \underline{\underline{X}}) \quad (8)$$

où $J_2(\cdot)$ est le second invariant du déviateur de (\cdot) , $I_1(\cdot)$ le premier invariant de (\cdot) et c un paramètre matériau à identifier.

Ensuite, le potentiel d'écoulement formulé et retenu est le suivant [13] :

$$\varphi_\pi = J_2(\underline{\underline{\sigma}}^\pi - \underline{\underline{X}}) + cI_1(\underline{\underline{\sigma}}^\pi - \underline{\underline{X}}) + \frac{a}{2} \underline{\underline{X}} : \underline{\underline{X}} \quad (9)$$

où a est un paramètre matériau à identifier.

Ainsi, les lois d'évolution s'écrivent sous cette forme :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^\pi = \dot{\lambda}_\pi \frac{\partial f_\pi}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^\pi} \quad \text{et} \quad \dot{\alpha} = -\dot{\lambda}_\pi \frac{\partial \varphi_\pi}{\partial \underline{\underline{X}}}$$

Le multiplicateur de Lagrange λ_π est calculé numériquement par un algorithme de type retour radial (return mapping) [11]. Dans ce mécanisme de glissement, deux cas ont été distingués. Le premier cas est celui d'un glissement mobilisant du frottement (les lèvres des fissures sont en contact) et le second cas, celui d'un glissement sans frottement (mode I). Cet effet est pris en compte en définissant les paramètres suivants, que l'on identifie en compression cyclique :

$$\gamma = \gamma_0 \mathcal{H}(\langle \underline{\varepsilon} \rangle_+; \langle \underline{\sigma} \rangle_+) \quad \text{et} \quad a = a_0 \mathcal{H}(\langle \underline{\varepsilon} \rangle_+; \langle \underline{\sigma} \rangle_+)$$

Afin de garder une objectivité vis-à-vis du maillage et ainsi régulariser la réponse du modèle, un limiteur de localisation est utilisé, il s'agit d'une approche non locale [14].

4 Application numérique : Etude d'une poutre en béton armé sollicitée en flexion

4.1 Protocole expérimental

La poutre considérée est de forme rectangulaire et de dimensions $5,4 \times 0,5 \times 0,2 \text{ m}$. Cette dernière est longue de 5 m entre appuis. Le ferrailage longitudinal est constitué de deux aciers HA8 pour la partie supérieure et de deux aciers HA32 pour la partie inférieure. Le ferrailage transversal est constitué de cadres de diamètre 8 mm espacés régulièrement de $0,10 \text{ m}$. La poutre a été testée sur appuis simples en flexion trois points à l'Ecole Centrale de Nantes [15]. Huit cycles charge/décharge ont été réalisés de manière statique jusqu'à rupture. Les matériaux ont été caractérisés par des essais mécaniques classiques. Pour le béton, la résistance moyenne à la compression, à la traction et le module d'Young valent respectivement $36,08 \text{ MPa}$, $3,45 \text{ MPa}$ et $37,2 \text{ GPa}$. Dans le but de suivre, au cours des différents cycles de chargement, la réponse mécanique des aciers inférieurs, six jauges d'extensiométrie ont été positionnées. Ces dernières sont repérées par J1 jusqu'à J6. La position de ces capteurs est précisée sur la figure 1. Les caractéristiques de l'acier sont respectivement 195 GPa , 466 MPa et 615 MPa pour le module d'élasticité, la limite élastique et la résistance à la traction.

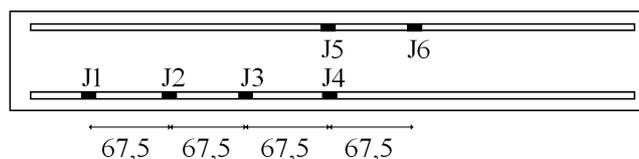


FIG. 1 – Position des jauges extensiométriques le long des aciers inférieurs (vue de dessus)

4.2 Modélisation

Pour ce cas d'étude, une modélisation tridimensionnelle aux éléments finis massifs a été retenue par le biais du code de calcul CAST3M, développé par le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA). Néanmoins, dans le but de réduire le coût de calcul lié à une telle approche, seul un quart de poutre a été modélisé (par symétrie). Suite à l'identification des paramètres, les valeurs retenues sont $A_{\text{Dir}} = 1,6 \cdot 10^{-3}$, $A_{\text{Ind}} = 1,6 \cdot 10^{-5}$, $\gamma_0 = 7,0 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ et $a_0 = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ Pa}^{-1}$. La réponse du béton obtenue à l'échelle du point de Gauss est présentée sur la figure 2a en traction et en compression. Les armatures longitudinales sont supposées suivre un comportement classique de type élasto-plastique avec écrouissage isotrope scalaire [6]. Les cadres sont supposés élastiques linéaires. La figure 2b permet de comparer la réponse locale de la loi de l'acier avec la courbe de traction fournie.

4.3 Résultats obtenus

Dans cette section, les résultats obtenus à l'issue de l'étude numérique de la poutre en flexion trois points sont présentés.

Sur la figure 3a, il est possible d'observer le résultat global sous forme de diagrammes Force/Flèche numériques et expérimentaux. Plus précisément, on peut distinguer trois phases classiques pour ce type d'essai : une première phase linéaire, une seconde caractéristique de la fissuration du béton et la dernière essentiellement influencée par la plastification des aciers. Il est constaté que la loi de comportement de béton utilisée [8], [9] permet, d'une part, de rendre compte de manière efficace des déformations permanentes en fin de chaque cycle de chargement et d'autre part, de rendre compte des effets hystérétiques apparaissant suite au frottement entre les lèvres des fissures progressivement créées. Au final, cette figure montre que les résultats du modèle sont comparables à ceux de l'essai.

Les diagrammes force/déformation dans les aciers inférieurs sont présentés sur la figure 3b pour les quatre premiers capteurs. En effet, un quart de poutre seulement ayant été modélisé en raison des coûts de calculs, les courbes aux capteurs J5 et J6 n'ont pas été calculées. Deux remarques peuvent être formulées au vu de ces

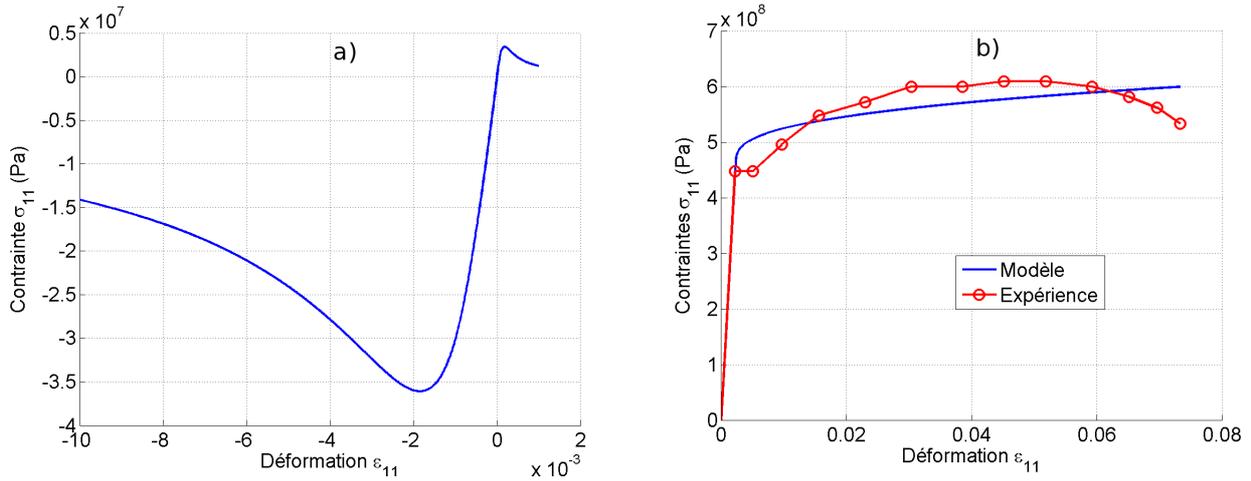


FIG. 2 – a) Réponse uniaxiale en un point de Gauss de la loi de béton & b) Comparaison entre la réponse locale uniaxiale de la loi de l’acier avec la courbe de traction fournie

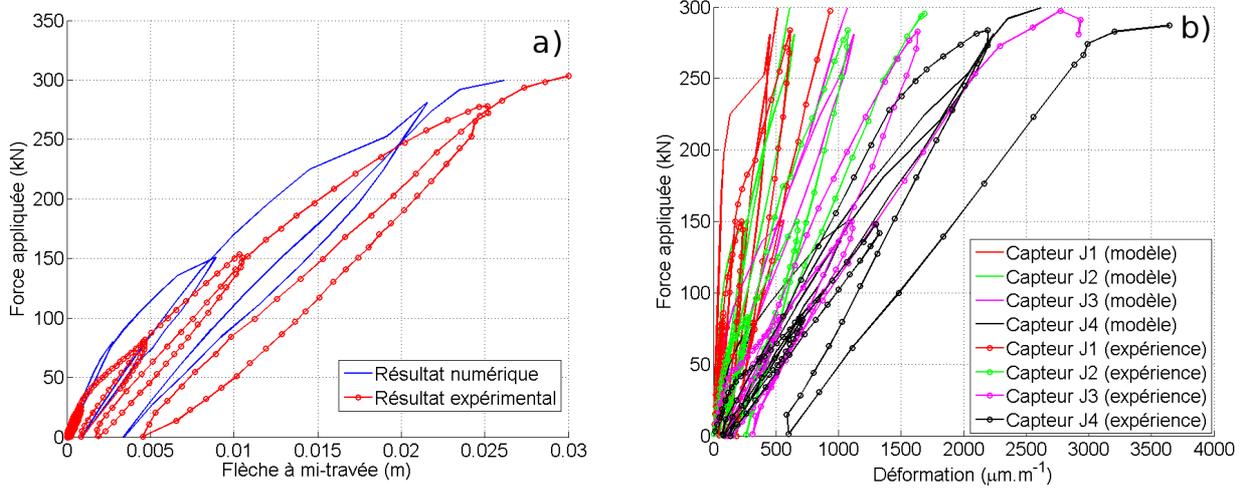


FIG. 3 – a) Réponse en flexion trois points de la poutre en béton armé & b) Diagrammes force/déformation dans les aciers inférieurs aux capteurs J1 à J4

résultats. En premier, les effets hystériques sont clairement observables sur la réponse des aciers. En second lieu, la plastification des aciers ne semble concerner que la zone voisine du capteur J4. Les résultats numériques sont assez cohérents avec ceux fournis par l’expérience [15], [16]. Les figures 4a, 4b, 4c et 4d, respectivement pour les forces 80 kN, 150 kN, 281 kN et 299 kN donnent la cartographie d’endommagement. Nous pouvons constater que le béton en compression est nettement endommagé pour une force appliquée de 299 kN.

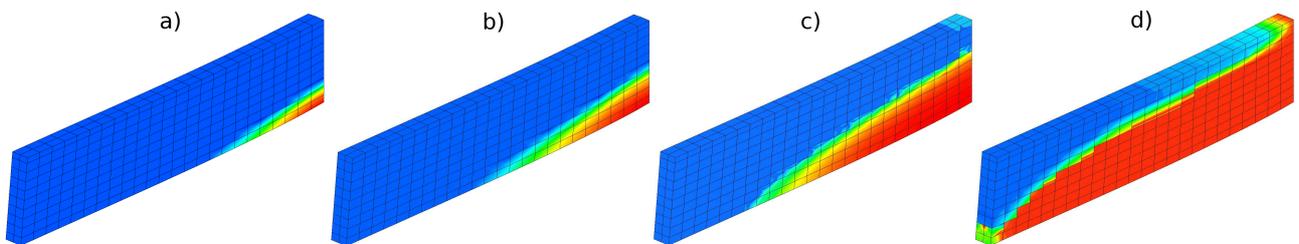


FIG. 4 – Isovaleurs d’endommagement obtenues à 80kN a), à 150kN b), à 281kN c) et à 299kN d)

5 Conclusion

Une loi de comportement formulée dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles a été exposée. Cette loi est capable de prendre en compte la combinaison de certains des phénomènes non linéaires associés au comportement du béton (endommagement, glissement). Une étude numérique sur une poutre en béton armé en flexion trois points a été présentée. Les résultats obtenus ont été comparés à des données expérimentales. Il a été constaté que l'utilisation d'un limiteur de localisation rend les résultats difficilement interprétables en terme d'ouvertures de fissures. Néanmoins, le comportement global de la poutre a été prédit de manière tout à fait satisfaisante jusqu'à rupture. Cette étude a montré que la loi de comportement utilisée permet une analyse globale d'éléments de structure en béton armé mais atteint sa limite pour l'obtention d'informations très locales telles que l'ouverture et l'espacement des fissures.

Remerciements

Les résultats dans cet article ont été obtenus dans le cadre du benchmark associé au projet national CEOS-FR et ont bénéficié de l'aide de ce dernier.

Références

- [1] Walter H. Modélisation 3D par éléments finis du contact avec frottement et de l'endommagement du béton. Thèse de doctorat, INSA de Lyon, 1999.
- [2] Dal Pont S. et Tailhan JL. Etude bibliographique sur la modélisation du béton. Livrable du projet APPLLET, Laboratoire Centrale des Ponts et Chaussées, 2009.
- [3] De Cassia Silva R. Contribution à l'analyse probabiliste de la performance des ponts en béton armé. Thèse de doctorat, ENPC, 2004.
- [4] Eurocode 2 : Calcul des structures en béton - partie 2 : Ponts en béton - calcul et dispositions constructives & partie 1.1 : Règles générales et règles pour les bâtiments. Normes européennes, Comité Européen de Normalisation, 2004 & 2005.
- [5] La Borderie C. CEOS-FR, Comportement et Evaluation des Ouvrages Spéciaux vis-à-vis de la Fissuration et du Retrait, 2008-2012. <http://www.ceosfr.org>.
- [6] Lemaître J. A course on damage mechanics. Springer Verlag, 1992.
- [7] Lemaître J. et Chaboche J. Mécanique des matériaux solides. Dunod, 2004.
- [8] Richard B., Ragueneau F., Adelaide L., Cremona C., et Tailhan JL. A simple behaviour law for quasi-brittle materials and its finite element implementation. En préparation, 2009.
- [9] Richard B., Adelaide L., Ragueneau F., Cremona C., et Tailhan JL. Une contribution à la modélisation des ouvrages dégradés par corrosion. GC'09, Cachan, France, 2009.
- [10] Laborderie C. Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l'analyse des structures en béton. Thèse de doctorat, Université de Paris VI, 1991.
- [11] Ragueneau F. Fonctionnement dynamique des structures en béton, influence des comportements hystérétiques locaux. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1999.
- [12] Besson J., Cailletaud G., Chaboche J., et Forest S. Mécanique non linéaire des matériaux. Hermès, 2001.
- [13] Armstrong P. et Frederick C. A mathematical representation of the multiaxial baushinger effect. GEGB, 1967.
- [14] Pijaudier-Cabot G. et Bazant Z. Nonlocal damage theory. J. Eng. Mech, ASCE, 113, 1512–1533, 1987.
- [15] Benchmark meca poutre en flexion trois points. Rapport d'essais, Ecole Centrale de Nantes, EDF.
- [16] Ghavamian S. et Delaplace A. Modèle de fissuration du béton, projet MECA. Revue française de génie civil, 7(5), 2003.