



**HAL**  
open science

# Obtention de bornes garanties sur une quantité d'intérêt en dynamique

Julien Waeytens, Ludovic Chamoin, Pierre Ladevèze

► **To cite this version:**

Julien Waeytens, Ludovic Chamoin, Pierre Ladevèze. Obtention de bornes garanties sur une quantité d'intérêt en dynamique. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03390992

**HAL Id: hal-03390992**

**<https://hal.science/hal-03390992>**

Submitted on 21 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Obtention de bornes garanties sur une quantité d'intérêt en dynamique

J. WAEYTENS<sup>a</sup>, L. CHAMOIN<sup>a</sup> ET P. LADEVÈZE<sup>a,b</sup>

*a.* LMT-Cachan (ENS-Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris)

61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France

e-mail : {waeytens, chamoin, ladeveze}@lmt.ens-cachan.fr

web page : <http://www.lmt.ens-cachan.fr>

*b.* EADS Foundation Chair "Advanced Computational Structural Mechanics"

## Résumé :

Dans ce document, l'objet de l'étude est la vérification en dynamique. Pour un problème de référence donné, une solution approchée est obtenue à l'aide d'une méthode des éléments finis en espace et d'un schéma d'intégration de Newmark en temps. Dans un premier temps, un estimateur d'erreur globale de la famille des erreurs en relation de comportement est étudié afin de quantifier la fiabilité de la solution approchée. Ainsi, la reconstruction de champs admissibles satisfaisant les équations cinématiques et l'équilibre dynamique est nécessaire. Pour le schéma de Newmark des accélérations linéaires, le paramètre CFL est choisi tel que l'estimateur d'erreur soit minimal. Ensuite, une méthode utilisant un problème adjoint est développée afin de calculer des bornes garanties sur une quantité d'intérêt, par exemple la contrainte moyenne en temps et en espace sur une certaine zone de la structure. Les premiers exemples numériques en dynamique sur un problème 2D sont présentés. Le modèle viscoélastique linéaire de Maxwell est considéré.

## Abstract :

This paper deals with verification in dynamics. A given reference problem is solved with a finite element discretization in space and a Newmark scheme integration in time. First, a global error estimator based on the constitutive relation error is used to evaluate the reliability of the approximate solution. Thus, reconstruction of admissible fields verifying the kinematic equations and the dynamic equilibrium is needed. For the linear acceleration Newmark scheme, the CFL parameter is chosen such as it minimizes the error estimator. Then, a method introducing an adjoint problem is employed to compute guaranteed error bounds on a given quantity of interest, such as the mean stress over a prescribed space-time domain. First illustrations are shown on a 2D academic problem in dynamics along with a linear viscoelastic Maxwell model.

**Mots clefs :** Estimateur d'erreur, Quantité d'intérêt, Dynamique

## 1 INTRODUCTION

En ingénierie mécanique, l'estimation de la qualité d'une solution approchée obtenue par exemple à l'aide d'une méthode des éléments finis est un point crucial. "La vérification de modèle" quantifie l'erreur commise entre la solution exacte du problème de mécanique des milieux continus, qui est la plupart du temps inconnue, et la solution approchée. De nombreux estimateurs d'erreur globale ont été développés au cours des trois dernières décennies mais l'information apportée demeure insuffisante.

Les ingénieurs sont plus intéressés par la maîtrise du calcul de quantité d'intérêt, comme la contrainte moyenne en temps et en espace dans une zone donnée de la structure, le déplacement en un certain point, etc...

Dans ce papier, un estimateur d'erreur local basée sur le concept d'erreur en relation de comportement est appliqué en visco-dynamique. À partir de la quantité d'intérêt, un problème adjoint est défini. Après avoir résolu les deux problèmes, les champs admissibles associés sont construits. Ensuite, la méthode permettant d'obtenir des bornes inférieure et supérieure garanties sur la quantité d'intérêt est présentée. Pour plus de détails concernant la méthode, on peut se référer à [1].

Dans cette présentation, une structure 2D est étudiée en visco-dynamique linéaire. Le modèle viscoélastique linéaire de Maxwell est considéré. La quantité d'intérêt retenue est la contrainte "moyenne" sur un domaine donné en espace et en temps. On peut retrouver cet exemple dans [2].

## 2 LE PROBLEME DE REFERENCE

La structure étudiée occupe initialement un domaine  $\Omega$ , le bord de celui-ci est noté  $\partial\Omega$ . On considère les hypothèses de petites perturbations, de transformation isotherme et de contraintes planes. Le domaine temporel de l'étude est noté  $[0, T]$ . Pour tout  $t \in [0, T]$ , un déplacement  $\underline{U}_d$  sur le bord  $\partial_1\Omega$  et un effort surfacique  $\underline{F}_d$  sur le bord  $\partial_2\Omega$  sont imposés ( $\partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega = \partial\Omega$ ,  $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$ ). Le problème qui caractérise l'évolution de la structure sur  $[0, T]$  est :

Trouver le champ de déplacement  $\underline{U}(\underline{M}, t)$  et le champ de contrainte  $\sigma(\underline{M}, t)$ , avec  $t \in [0, T]$  et  $\underline{M} \in \Omega$ , qui vérifie :

- les contraintes cinématiques et les conditions initiales :

$$\underline{U} \in \mathbf{U}^{[0, T]}; \quad \underline{U}|_{\partial_1\Omega}(t) = \underline{U}_d(t), \quad \forall t \in ]0, T[ \quad (1)$$

$$\underline{U}(t=0) = \underline{0}; \quad \dot{\underline{U}}(t=0) = \underline{0}$$

- les équations d'équilibre (principe des puissances virtuelles) :

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathbf{S}^{[0, T]}; \quad \forall t \in ]0, T[ \quad \forall \underline{U}^* \in \mathbf{U}_{ad,0} \\ - \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \epsilon(\underline{U}^*)] d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS = \int_{\Omega} \rho \frac{d^2 \underline{U}}{dt^2} \cdot \underline{U}^* d\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

- les relations de comportement :

$$\begin{cases} \text{équation d'état : } \sigma = \mathbf{K} \epsilon_e \\ \text{loi d'évolution : } \dot{\epsilon}_p = \mathbf{B} \sigma \end{cases}, \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall \underline{M} \in \Omega \quad (3)$$

$\epsilon(\underline{U})$  représente la déformation linéarisée associée au déplacement  $\underline{U}$  ( $\epsilon(\underline{U})_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$ ).  $\mathbf{U}^{[0, T]}$  et  $\mathbf{S}^{[0, T]}$  sont des espaces de régularité assurant des solutions à énergie finie.  $\mathbf{U}_{ad,0}$  est l'espace vectoriel des vitesses virtuelles. Les opérateurs  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{B}$  sont linéaires, symétriques, définis positifs; ils caractérisent le modèle viscoélastique linéaire de Maxwell.  $\epsilon_e$  et  $\epsilon_p$  sont la partie élastique et anélastique de la déformation  $\epsilon$ . Enfin,  $\rho$  représente la masse volumique du matériau.

Une solution approchée du problème de référence est notée  $(\underline{U}_h, \sigma_h)$ .

## 3 ESTIMATEUR D'ERREUR LOCALE

### 3.1 La quantité d'intérêt choisie et le problème adjoint associé

La quantité d'intérêt  $\alpha$  est une quantité locale. Elle peut s'écrire sous la forme :

$$\alpha_{ex} = \int_0^T \int_{\Omega} \{ \text{Tr}[\sigma_{ex} \delta \dot{\underline{\Sigma}}] + \rho \dot{\underline{U}}_{ex} \delta \underline{\Gamma}_{\Sigma} \} d\Omega dt \quad (4)$$

où l'extracteur est :  $(\delta \dot{\underline{\Sigma}}, \delta \underline{\Gamma}_{\Sigma})$  over  $[0, T] \times \Omega$ . "ex" représente la solution exacte du problème de référence.

Le problème adjoint est similaire au problème de référence, excepté qu'il est rétrograde en temps

( $t' = T - t$ ).  $\delta \dot{\underline{\Sigma}}$  et  $\delta \underline{\Gamma}_{\Sigma}$  représentent la prédéformation et la préaccélération du problème. Une solution approchée du problème adjoint est notée  $(\delta \underline{\tilde{U}}_h, \delta \underline{\tilde{\sigma}}_h)$ .

### 3.2 Champs admissibles et erreur en dissipation

L'erreur en dissipation, qui est un estimateur d'erreur globale mesurant la non-vérification de la loi d'évolution, est défini par :

$$E_{CRE}(\hat{\epsilon}_p, \hat{\sigma}) = \|\hat{\sigma} - \mathbf{B}^{-1} \dot{\hat{\epsilon}}_p\|_B \quad (5)$$

où la norme énergétique est  $\|\star\|_B^2 = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \text{Tr}[\star \mathbf{B} \star] dt d\Omega$ .

Afin de calculer cet estimateur d'erreur, la construction d'une solution admissible notée avec un chapeau "•" et satisfaisant l'ensemble des équations excepté la loi d'évolution est nécessaire.

On choisit de prendre l'accélération admissible égale à l'accélération éléments finis à chaque piquet de temps. Ensuite, une interpolation linéaire est réalisée sur chaque pas de temps. Par intégration temporelle de l'accélération admissible, on en déduit la vitesse et le déplacement admissibles. De plus, à partir de l'accélération admissible, un champ de contrainte admissible est construit tel que le couple (accélération-contrainte) vérifie les équations d'équilibre et les conditions initiales. Pour plus de détails concernant la construction des champs admissibles, on peut se reporter à [3].

### 3.3 Obtention de bornes inférieure et supérieure garanties

Des bornes inférieure et supérieure sur la quantité d'intérêt sont définis par :

$$\hat{\alpha}_h + \hat{\alpha}_{hh} - E_{CRE}^h \tilde{E}_{CRE}^h \leq \alpha_{ex} \leq \hat{\alpha}_h + \hat{\alpha}_{hh} + E_{CRE}^h \tilde{E}_{CRE}^h \quad (6)$$

$$\text{où } \begin{cases} \hat{\alpha}_h = \int_0^T \int_{\Omega} \{ \text{Tr}[\hat{\sigma}_h \delta \dot{\Sigma}] + \rho \hat{U}_h \delta \tilde{\Gamma}_{\Sigma} \} d\Omega dt \\ \hat{\alpha}_{hh} = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \text{Tr}[(\delta \hat{\epsilon}_{p,h} - \mathbf{B} \delta \hat{\sigma}_h) \mathbf{B}^{-1} (\hat{\epsilon}_{p,h} - \mathbf{B} \hat{\sigma}_h)] d\Omega dt \end{cases} \quad (7)$$

$\hat{\alpha}_h$  est la quantité d'intérêt approchée issue de la solution admissible,  $\hat{\alpha}_{hh}$  est un terme correcteur dépendant des quantités du problème de référence et du problème adjoint.  $E_{CRE}$  et  $\tilde{E}_{CRE}$  sont les erreurs en dissipation de ces deux problèmes.

On remarque qu'une résolution fine du problème adjoint permet d'améliorer la précision des bornes.

## 4 Exemple numérique

### 4.1 Le problème de référence et l'erreur en dissipation associée

Le problème de référence est illustré sur la Figure 1. Concernant les paramètres matériaux, on choisit le module d'Young  $E = 10^9 Pa$ , le coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$  et la masse volumique  $\rho = 10^3 kg/m^3$ . L'opérateur  $\mathbf{B}$  est choisi tel que  $\mathbf{B} = (\tau \mathbf{K})^{-1}$  où le temps de relaxation est  $\tau = 10^{-3} s$ . Le chargement le long de l'arrête située en haut à droite de la structure augmente linéairement en fonction du temps de  $N_0 = 0$  à  $t = 0$  s à  $N_0 = 10^7 Pa$  à  $t = T = 10^{-2} s$ .

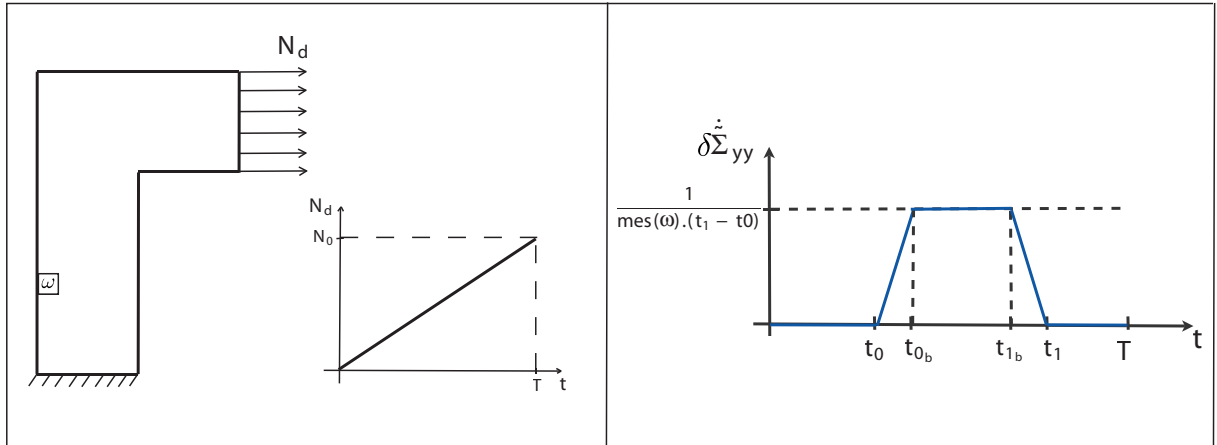


FIG. 1 – Problème de référence et domaine d'intérêt  $\omega$  (gauche), extracteur (droite)

Afin de résoudre ce problème, on utilise une méthode des éléments finis avec des éléments quadrangle à 4 nœuds et le schéma d'intégration de Newmark des accélérations linéaires, qui est conditionnellement stable. A partir du paramètre  $\beta$ , on obtient le pas de temps  $\Delta t$  tel que :

$$\beta = \frac{\Delta t}{\Delta t_c} \quad (8)$$

où  $\Delta t_c$  est le pas de temps critique.

Pour fixer le paramètre CFL  $\beta$ , l'erreur en dissipation relative  $\epsilon_{CRE}$ , définie ci-dessous, est analysée sur la Figure 2.

$$\epsilon_{CRE} = \frac{\|\hat{\sigma} - \mathbf{B}^{-1} \hat{\epsilon}_p\|_B}{\|\hat{\sigma} + \mathbf{B}^{-1} \hat{\epsilon}_p\|_B} \quad (9)$$

Quand  $\beta$  est supérieur à 0,87, l'estimateur d'erreur globale est élevé. Sinon, lorsque  $\beta$  est plus petit que 0,82, l'erreur relative est quasi-identique. Par conséquent, le paramètre CFL retenu est  $\beta = 0,61$ . Dans la partie suivante, la discrétisation du problème de référence est fixée à 400 éléments en espace et 200 pas de temps.

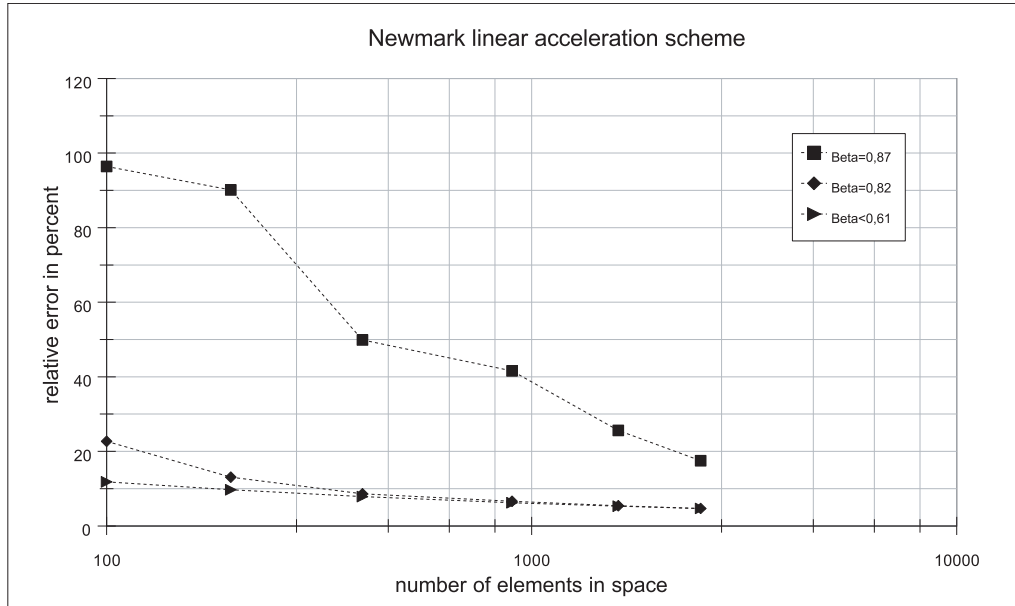


FIG. 2 – Erreur relative du problème de référence

## 4.2 Bornes inférieure et supérieure

La quantité d'intérêt retenue est la contrainte "moyenne" sur  $[t_0, t_1] \times \omega$ . Ainsi, les extracteurs sont :

$$\delta \dot{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \dot{\Sigma}_{yy} \end{bmatrix}, \quad \delta \tilde{\Gamma}_{\Sigma} = 0 \quad (10)$$

où  $\delta \dot{\Sigma}_{yy}$  est représentée sur la Figure 1.

On introduit les bornes adimensionnées inférieure et supérieure sur la quantité d'intérêt :

$$\begin{cases} \bar{\xi}^+ = \frac{\alpha_h + \alpha_{hh} + E_{CRE}^h \tilde{E}_{CRE}^h}{\alpha_{ex}} \\ \bar{\xi}^- = \frac{\alpha_h + \alpha_{hh} - E_{CRE}^h \tilde{E}_{CRE}^h}{\alpha_{ex}} \end{cases} \quad (11)$$

La quantité d'intérêt exacte  $\alpha_{ex}$  est calculée en prenant une discrétisation très fine.

Sur la Figure 3, les évolutions des bornes adimensionnées inférieure et supérieure ( $\bar{\xi}^-$ ,  $\bar{\xi}^+$ ) sont représentées en fonction de la discrétisation du problème adjoint. Avec une discrétisation de 10000 éléments en espace et 1000 pas de temps pour résoudre le problème adjoint, des bornes adimensionnées à 15% sont obtenues.

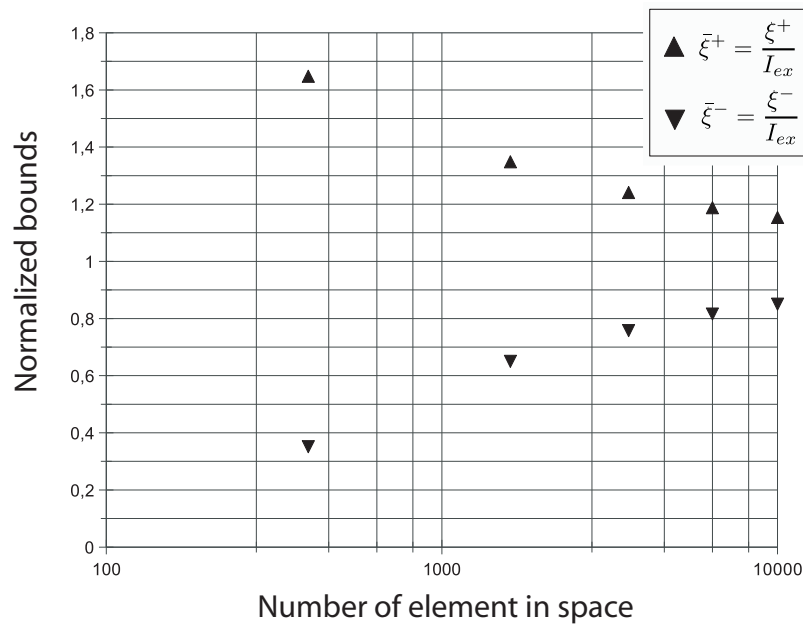


FIG. 3 – Bornes adimensionnées inférieure et supérieure sur la quantité d'intérêt

## 5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

1. Cette méthode permet d'obtenir des bornes inférieure et supérieure sur une quantité d'intérêt en dynamique.
2. La précision des bornes peut être améliorée en raffinant uniquement le problème adjoint.

Différentes possibilités sont envisagées pour améliorer la qualité des bornes :

- un raffinement local en espace et en temps peut être utilisé.
- la construction des champs admissibles peut être améliorée.
- des nouvelles bornes prenant en compte le terme d'énergie cinétique, qui a été négligé dans un premier temps, peuvent être construites en utilisant le théorème de Brun.
- des nouvelles bornes peuvent être obtenues en utilisant l'inégalité de Legendre-Fenchel à la place de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

## Références

- [1] Ladevèze P. Upper error bounds on calculated outputs of interest for linear and nonlinear structural problems. *Comptes Rendus Académie des Sciences - Mécanique*, Paris, 334, 399–407, 2006.
- [2] Ladevèze P. and Waeytens J. Model verification in dynamics through strict upper error bounds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, in press, doi :10.1016/j.cma.2008.12.020.
- [3] Ladevèze P. and Pelle J. *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*. Springer NY, 2004.