



**HAL**  
open science

# Influence des vibrations harmoniques verticales sur la séparation des constituants d'un mélange binaire en configuration de Rayleigh-Bénard

Bilal Elhajjar, Abdelkader Mojtabi, Marie-Catherine Charrier-Mojtabi

► **To cite this version:**

Bilal Elhajjar, Abdelkader Mojtabi, Marie-Catherine Charrier-Mojtabi. Influence des vibrations harmoniques verticales sur la séparation des constituants d'un mélange binaire en configuration de Rayleigh-Bénard. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03390991

**HAL Id: hal-03390991**

**<https://hal.science/hal-03390991>**

Submitted on 21 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Influence de vibrations harmoniques verticales sur la séparation des constituants d'un mélange binaire en configuration de Rayleigh-Bénard

B. ELHAJJAR <sup>a</sup>, M.C. CHARRIER-MOJTABI <sup>b\*</sup>, A. MOJTABI <sup>a</sup>

<sup>a</sup> IMFT, UMR CNRS/INP/UPS N°5502, UFR MIG, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062, Toulouse Cedex, France.

<sup>b</sup> Laboratoire PHASE, EA 3028, UFR PCA, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062, Toulouse Cedex, France

## Résumé :

*On étudie la convection thermosolutale avec effet Soret dans une couche poreuse horizontale de grand rapport d'aspect saturée par un fluide binaire et soumise à des vibrations verticales de haute fréquence. On s'intéresse en particulier à l'influence des vibrations verticales sur la stabilité de l'écoulement monocellulaire obtenu dans certaines gammes des paramètres physiques du problème. Nous avons considéré le cas de vibrations de haute fréquence et de faible amplitude de telle sorte que la formulation dite des équations moyennées puisse être utilisée. L'écoulement monocellulaire obtenu pour  $\Psi > \Psi_{mono}$ , où  $\Psi$  est la facteur de séparation, conduit à la migration des constituants vers les deux parois verticales de la cavité et à une séparation des espèces du mélange entre les parties gauche et droite de la cavité. Des simulations numériques 2D ont été effectuées en utilisant un code aux éléments finis (Comsol) et une méthode spectrale de collocation. Les résultats numériques et l'analyse de stabilité linéaire ont montré que les vibrations verticales retardent la transition entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire ce qui permet de séparer les espèces du mélange pour une plus large gamme du nombre de Rayleigh*

## Abstract :

*The Soret-driven convection in a horizontal porous layer of large aspect ratio saturated by a binary fluid and subjected to vertical high frequency vibrations was studied. The influence of vertical vibrations on the stability of the monocellular flow obtained for particular ranges of the physical parameters of the problem was investigated. We considered the case of high frequency, small amplitude vibrations so that a formulation using time averaged equations could be used. The monocellular flow obtained for  $\Psi > \Psi_{mono}$ , where  $\Psi$  is the separation ratio, leads to a migration of the species towards the two vertical boundaries of the cell. 2D direct numerical simulations of the averaged governing equations were performed using both a finite element code (Comsol) and a spectral collocation method. The numerical results and linear stability analysis showed that the vertical vibrations delay the transition from monocellular flow to multicellular flow making it possible to separate the species for a wider range of Rayleigh numbers.*

**Mots-clefs :** Convection thermosolutale, Effet Soret, Stabilité linéaire, Milieu poreux, Séparation, Thermogravitation, Vibrations .

## 1 Introduction

Le problème considéré concerne l'interaction entre deux phénomènes: la convection thermosolutale avec effet Soret et la convection thermo-vibrationnelle en milieu poreux. La diffusion thermogravitationnelle quant à elle est la combinaison de deux phénomènes : la convection et la thermodiffusion. Le couplage de ces deux phénomènes conduit à la séparation des espèces d'un mélange. En 1938, Clusius et Dickel [1] ont réalisé avec succès la séparation des espèces d'un mélange gazeux dans une cavité verticale. Furry, Jones et Onsager [2], ont développé la théorie de thermodiffusion (théorie de FJO) pour interpréter le processus de séparation des isotopes. Par la suite, de nombreux travaux ont été effectués visant à justifier les hypothèses ou à étendre les résultats de la théorie de FJO au cas des mélanges liquides [3]. D'autres travaux ont été consacrés à l'amélioration des dispositifs expérimentaux pour accroître la séparation. Lorenz et Emery [4], ont proposé l'introduction d'un milieu poreux dans la cavité. Platten et al. [5] ont incliné la cavité d'un certain angle par rapport à la verticale pour augmenter la séparation. Elhajjar et al. [6] ont utilisé une cavité horizontale soumise à un gradient thermique vertical pour séparer les constituants du mélange dans certaines gammes des paramètres physiques du problème. De nombreux travaux ont été consacrés à la convection thermo-vibrationnelle dans les milieux poreux. Charrier-Mojtabi et al. [7], ont étudié l'influence des vibrations sur le déclenchement de la convection thermosolutale avec effet Soret dans une cellule poreuse horizontale chauffée par le bas ou par le haut. Ils ont montré que les vibrations verticales ont un effet stabilisant alors que les vibrations horizontales ont un effet déstabilisant. Dans ce travail, nous étudions l'influence de vibrations de hautes fréquences et de faibles amplitudes sur la séparation des constituants d'un mélange binaire saturant une couche poreuse horizontale, de grande extension et chauffée par le bas. On montre que les vibrations peuvent être utilisées pour retarder la perte de stabilité de l'écoulement monocellulaire, ce qui permet la séparation des constituants pour une plus large gamme du nombre de Rayleigh comparé au cas sans vibration. Nous considérons le cas de vibrations de haute fréquence et de faible amplitude, pour pouvoir utiliser la formulation des équations moyennées. Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire de l'écoulement monocellulaire dans une cavité poreuse d'extension infinie sont corroborés par des résultats de simulations numériques directes.

## 2 Formulation mathématique

On considère une cavité rectangulaire de rapport d'aspect  $A = L/H$ , où  $H$  est la hauteur de la cavité et  $L$  est sa longueur, la profondeur de la cavité est supposée infinie. On suppose que le rapport d'aspect est infini dans l'étude de stabilité linéaire. La cavité est remplie par un milieu poreux saturé par un fluide binaire pour lequel l'effet Soret est pris en compte. Les parois horizontales imperméables à la matière sont maintenues à des températures constantes et différentes. Les parois verticales sont imperméables à la matière et adiabatiques. Toutes les parois sont supposées rigides. La cavité est soumise à des oscillations linéaires harmoniques dans la direction verticale (amplitude  $b$  et pulsation  $\omega$ ). Dans les équations régissant le problème nous avons adopté l'approximation de Boussinesq et l'équation de Darcy dans laquelle le terme temporel est pris en compte. Dans le référentiel lié à la cavité, la force volumique de pesanteur  $\rho \bar{g}$  est remplacée par  $\rho(\bar{g} + b\omega^2 \sin(\omega t') \bar{e}_z)$  où  $\bar{e}_z$  est le vecteur unitaire de l'axe vertical et  $t'$  le temps adimensionnel. Dans le cas de vibrations de haute fréquence et de faible amplitude, on peut utiliser la méthode de moyennisation pour étudier la convection thermo vibrationnelle [8]. Selon cette méthode, tous les champs sont considérés comme la superposition de deux parties: la première partie varie lentement avec le temps (i.e. le temps caractéristique est grand devant la période des vibrations) et la deuxième partie varie rapidement avec le temps (i.e. le temps caractéristique est du même ordre de grandeur que la période des vibrations). Le système d'équations moyennées régissant le problème s'écrit alors:

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{V}} &= 0 \\
B \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} &= -\bar{\nabla} P + Ra(T + \psi C) \bar{\mathbf{e}}_z + Rv[\mathbf{W} \cdot (\bar{\nabla} T + \frac{\psi}{\varepsilon} \bar{\nabla} C)] \bar{\mathbf{e}}_z \\
\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\nabla} T &= \nabla^2 T \\
\varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\nabla} C &= \frac{1}{Le} (\nabla^2 C - \nabla^2 T) \\
(T + \psi C) \bar{\mathbf{e}}_z &= \bar{\mathbf{W}} + \bar{\nabla} \xi ; \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{W}} = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

$\bar{\mathbf{V}}, P, T, C$  sont les champs moyennés (c'est à dire les valeurs moyennes des champs sur la période  $\tau = 2\pi/\omega$ ) et  $\bar{\mathbf{W}}$  est la partie solénoïdale de  $(T + \psi C) \bar{\mathbf{e}}_z$ .  $B = Da(\rho c)_f / [(\rho c)^* \varepsilon Pr]$ , où  $Pr$  est le nombre de Prandtl,  $(\rho c)_f$  la capacité calorifique volumique du mélange fluide, et  $(\rho c)^*$  la capacité calorifique volumique équivalente.  $Rv$  caractérise l'intensité des vibrations.  $Da = K/H^2$  est le nombre de Darcy et  $K$  la perméabilité du milieu poreux.  $Ra = K g \beta_T H \Delta T (\rho c)_f / (\lambda^* \nu)$  est le nombre de Rayleigh thermique, où  $\beta_T$  est le coefficient d'expansion thermique,  $\Delta T$  la différence de température entre les deux parois horizontales,  $\lambda^*$  la conductivité thermique équivalente, et  $\nu$  la viscosité cinématique du mélange.  $\psi = -(\beta_T / \beta_c)(D_T^* / D^*) C_i(1 - C_i)$  le facteur de séparation, où  $\beta_c$  est le coefficient d'expansion massique,  $D_T^*$  le coefficient de thermodiffusion,  $D^*$  le coefficient de diffusion massique,  $C_i$  la fraction massique initiale du composant le plus dense.  $Le = a/D^*$  est le nombre de Lewis, où  $a$  est la diffusivité thermique,  $\varepsilon = \varepsilon^* (\rho c)_f / (\rho c)^*$  la porosité normalisée (où  $\varepsilon^*$  est la porosité).

Les conditions aux limites correspondantes sont:

$$\begin{aligned}
T = 1 \text{ pour } z = 0 ; T = 0 \text{ pour } z = 1 ; \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \text{ pour } x = 0, A ; \\
\bar{\nabla} C \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\nabla} T \cdot \bar{\mathbf{n}} \text{ pour } z = 0, 1 ; \bar{\mathbf{V}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \text{ et } \bar{\mathbf{W}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \forall M \in \partial\Omega
\end{aligned} \tag{2}$$

Dans l'équation de conservation de quantité de mouvement, le terme  $B \partial \bar{\mathbf{V}} / \partial t$  est généralement négligé puisque  $B$  est de l'ordre de  $10^{-6}$ . Toutefois, dans notre problème les vibrations de haute fréquence provoquent des accélérations très élevées, ce qui nécessite la prise en compte du terme instationnaire [9]. Sovran et al. [10] ont montré que si le facteur de séparation  $\psi > \psi_{mono}$  avec  $\psi_{mono} = 1/(40 Le/51 - 1)$  il y a apparition d'un écoulement monocellulaire au déclenchement de la convection avec un nombre de Rayleigh critique de  $Ra_{cs} = 12/(Le\psi)$  et un nombre d'onde critique  $k_{cs} = 0$ , et ce  $\forall Rv$ . On se place dans ces conditions pour obtenir la séparation des constituants du mélange.

### 3 Stabilité linéaire de l'écoulement monocellulaire

Dans le cas d'une cavité de grand rapport d'aspect  $A \gg 1$ , nous avons utilisé l'hypothèse d'écoulement parallèle (Cormack et al. [11]). L'écoulement de base indexé 0, est alors donné

par:

$$\begin{cases} T_0 = 1 - z, U_0 = Ra m \psi (1/2 - z) \\ C_0 = m x + (m^2 Ra Le \psi (3 z^2 - 2 z^3)) / 12 - z - (m^2 Ra Le \psi) / 24 + (1 - mA) / 2 \\ m = \pm \sqrt{(10 Le Ra \psi - 120) / (Le Ra \psi)} \end{cases} \quad (3)$$

La séparation,  $S = mA$  est définie comme étant la différence des fractions massiques du constituant le plus lourd aux proximités des parois gauche et droite de la cellule. Ainsi la séparation maximale est obtenue pour  $Ra = 24 / (Le \psi)$ .

La figure 1 représente la séparation obtenue analytiquement et numériquement ( cf § 4) en fonction de  $RaLe\psi$  pour une valeur donnée du nombre  $Rv$  qui ne déstabilise pas l'écoulement monocellulaire et ce résultat est valable  $\forall Rv$ . Nous avons vérifié numériquement en résolvant les équations moyennées (1) pour  $Rv = 20$ , que l'écoulement monocellulaire reste stable et conduit à la valeur de la séparation obtenue analytiquement à partir de l'équation (3). On peut remarquer que la séparation présente un maximum correspondant au couplage optimal entre la thermodiffusion et la convection. Pour les faibles valeurs du nombre de Rayleigh, la convection est faible et la séparation résulte principalement de la thermodiffusion. Pour les grandes valeurs du nombre de Rayleigh, la convection est forte et l'écoulement induit le mélange des espèces du mélange conduisant à une faible séparation. On peut noter que, en raison des grandeurs de référence choisies, la séparation  $S$  peut dépasser la valeur 1.

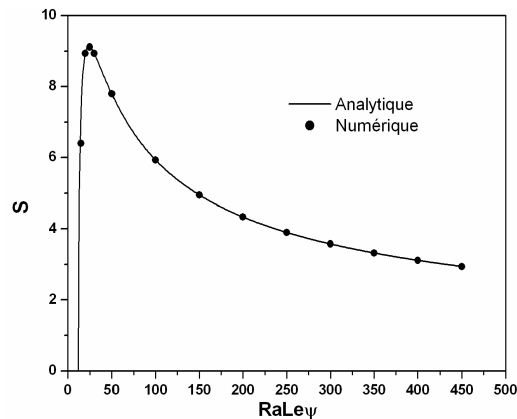


FIG. 1- Séparation en fonction de  $RaLe\psi$  pour  $Rv = 20$ ,  $(RaLe\psi)_{opt} = 24$

Nous avons étudié la stabilité de la solution monocellulaire afin de confirmer que la séparation des espèces peut se produire dans une cellule poreuse horizontale chauffée par le bas et soumise à des vibrations verticales. Pour cette étude, nous considérons des perturbations infinitésimales des différents champs. Les termes du second ordre sont négligés, nous obtenons les équations linéaires dans lesquelles les inconnues sont les perturbations. Les perturbations sont développées en modes normaux selon la direction  $O\bar{x}$ . Le problème linéaire obtenu est résolu en utilisant la méthode de Galerkin à l'ordre 4. Les valeurs critiques du nombre de Rayleigh et du nombre d'onde ont été obtenues en étudiant la bifurcation vers une solution stationnaire et vers une solution oscillante (bifurcation de Hopf). Pour les valeurs utilisées de  $\psi$  et  $Le$ , on a trouvé que le nombre de Rayleigh critique de la bifurcation stationnaire était toujours supérieur à celui de la bifurcation de Hopf. Ainsi, dans cette étude, nous considérons la bifurcations de Hopf caractérisée par un nombre de Rayleigh critique  $Ra_{c2}$  et un nombre d'onde critique  $k_{c2}$ . Les résultats de l'analyse de stabilité linéaire pour  $Le = 20$  et  $\psi = 0.1$  sont donnés dans le

tableau 1. On observe d'après ce tableau, que les vibrations ont un effet stabilisant puisque le nombre de Rayleigh critique augmente avec  $Rv$ . Ainsi, les vibrations peuvent être utilisées pour maintenir une structure d'écoulement monocellulaire pour des valeurs plus élevées du nombre de Rayleigh et permettre la séparation des constituants du mélange binaire pour une plus large gamme de valeurs du nombre de Rayleigh thermique. Mais il faut aussi noter que la séparation diminue pour les grandes valeurs de  $Ra$ . On peut remarquer que les vibrations réduisent le nombre d'onde critique  $k_{c2}$ . Cela signifie que les vibrations peuvent également être utilisées pour diminuer le nombre de cellules convectives (lié à la valeur de  $k_{c2}$ ) à la transition entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire.

$Rv$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$Ra_{c2}$	32.79	37.95	42.49	46.60	50.83	53.83	57.08	60.14	63.03	65.78	68.41
$k_{c2}$	2.80	2.59	2.42	2.28	2.16	2.07	1.99	1.91	1.85	1.80	1.75

Tableau 1 : Effet des vibrations sur les valeurs critiques du nombre de Rayleigh  $Ra_{c2}$  et du nombre d'onde  $k_{c2}$  associées à la transition entre l'écoulement monocellulaire et multicellulaire pour  $Le = 20$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\psi = 0.1$ , et  $B = 10^{-6}$  (Méthode de Galerkin à l'ordre 4).

#### 4 Simulations numériques

Pour les résultats présentés ci-dessous, on prend toujours  $B = 10^{-6}$ ,  $\varepsilon = 0.5$  et  $Le = 20$ . Pour  $\psi = 0.1$ , l'analyse de stabilité linéaire montre que, sans vibration, l'écoulement monocellulaire perd sa stabilité via une bifurcation de Hopf pour  $Ra_{c2} = 32.79$ . Pour le même mélange ( $\psi = 0.1$ ) soumis à des vibrations caractérisées par  $Rv = 50$ , l'écoulement monocellulaire perd sa stabilité pour  $Ra_{c2} = 53.83$ . Ces résultats ont été confirmés par des simulations numériques directes en utilisant un code d'éléments finis (Comsol) et un code spectral de collocation.

La figure 2 montre les lignes de courant à un instant donné durant les oscillations pour  $Ra = 33$ . Cette valeur de  $Ra$  correspond à la transition entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire sans vibration ( $Rv = 0$ ). La figure 3 montre les lignes de courant et les isoconcentrations pour le même mélange et pour les mêmes paramètres, mais avec vibration ( $Rv = 50$ ). On peut noter qu'en utilisant des vibrations verticales, l'écoulement monocellulaire pourra être maintenu pour une valeur plus élevée du nombre de Rayleigh conduisant ainsi à la séparation des espèces entre les parois gauche et droite de la cellule horizontale. Cet écoulement monocellulaire reste stable jusqu'à  $Ra = 54$ . La figure 4 montre les lignes de courant à un instant donné durant les oscillations à la transition entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire ( $Ra = 54$ ) pour  $Rv = 50$ .



FIG . 2 -Lignes de courant à un instant donné durant les oscillations pour  $Le = 20$ ,  $\psi = 0.1$ , et  $Ra = 33$  : cas sans vibration ( $Rv = 0$ ).

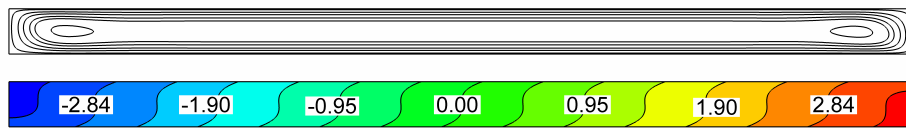


FIG. 3-Lignes de courant et Isoconcentrations pour  $Le = 20$ ,  $\psi = 0.1$ ,  $Ra = 33$  et  $Rv = 50$



FIG. 4 -Lignes de courant à un instant donné durant les oscillations pour  $Le = 20$ ,  $\psi = 0.1$ ,  $Ra = 54$ , et  $Rv = 50$ .

## 5 Conclusions

On a étudié analytiquement et numériquement, l'influence de vibrations verticales de hautes fréquences et de faibles amplitudes sur la stabilité de l'écoulement monocellulaire obtenu pour des valeurs de  $\psi > \psi_{mono}$ , dans une couche poreuse horizontale de grand rapport d'aspect, saturée par un fluide binaire. Les simulations numériques directes obtenues par un code aux éléments finis et un code spectral de collocation corroborent les résultats de l'étude de stabilité linéaire et permettent l'étude de la structure de l'écoulement qui apparaît après la transition. On a remarqué que l'écoulement monocellulaire associé à un champ de concentration stratifié conduisait à une séparation horizontale des constituants du mélange binaire. On a montré que les vibrations verticales ont un effet stabilisant, puisqu'elles augmentent la valeur du nombre de Rayleigh critique correspondant à la transition entre l'écoulement monocellulaire et l'écoulement multicellulaire. Ainsi les vibrations verticales permettent la séparation des espèces d'un mélange binaire pour une plus large gamme de valeurs du nombre de Rayleigh comparé au cas sans vibration. On peut également noter que les vibrations verticales réduisent le nombre d'onde critique  $k_{c2}$ .

## Références

- [1] K. Clusius, G. Dickel, *Naturwisse* **6**, 546, (1938)
- [2] W. H. Furry, R. Clark Jones, L. Onsager, *Physical Review* **55**, 1083, (1939)
- [3] S. R. De Groot, *Physica* **9**, 8, 801, (1942)
- [4] M. Lorenz, A. H. Emery, *Chemical Engineering Science* **11**, 1, 16, (1959)
- [5] J. K. Platten, M. M. Bou-Ali, and J. F. Dutrieux, Enhanced Molecular Separation in Inclined Thermogravitational Columns, *Journal of Physical Chemistry B* **107**, 42, 11763, (2003)
- [6] B. Elhajjar, M. C. Charrier-Mojtabi, A. Mojtabi, Separation of a binary fluid in a porous horizontal cavity, *Physical Review E*, **77**, 2, 026310 (2008)
- [7] M. C. Charrier Mojtabi, Y. P. Razi, K. Maliwan, A. Mojtabi, Influence of vibration on Soret-driven convection in porous media, *Numerical Heat Transfer Part A*- **46**, 1-13, (2004)
- [8] G.Z. Gershuni, D.V. Lyubimov, *Thermal Vibrational Convection* (Wiley, Chichester, 1998)
- [9] S. Zen'kovskaya and T. Rogovenko. Filtration convection in a high-frequency vibration field. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **40** (3), 379 (1999).
- [10] O. Sovran, M.C. Charrier-Mojtabi, M. Azaiez and A. Mojtabi, Onset of Soret-driven convection in porous medium under vertical vibration, *IHTC12*, Grenoble, 2002
- [11] D. E. Cormack, L. G. Leal, J. Imberger, Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls, *Journal of fluid Mechanics* **65**, 2, 209-229 (1974)