



HAL
open science

Propagation d'ondes dans un milieu poroélastique multicouches

Arnaud Mesgouez, Gaëlle Lefeuvre-Mesgouez

► **To cite this version:**

Arnaud Mesgouez, Gaëlle Lefeuvre-Mesgouez. Propagation d'ondes dans un milieu poroélastique multicouches. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03390972

HAL Id: hal-03390972

<https://hal.science/hal-03390972>

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Propagation d'ondes dans un milieu poroélastique multicouches

A. MESGOUEZ , G. LEFEUVE-MESGOUEZ

UMR EMMAH, Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse,
Faculté des Sciences,
33 rue Louis Pasteur, 84000 AVIGNON
arnaud.mesgouez@univ-avignon.fr

Résumé :

Cette communication présente une approche semi-analytique permettant l'étude de la propagation d'ondes dans les sols multicouches poroélastiques en régime transitoire. L'approche théorique est basée sur la méthode de matrice de raideur exacte adaptée à la théorie de Biot, développée dans le domaine des nombres d'ondes et couplée à une technique de conditionnement matriciel. Effectivement, les méthodes classiques peuvent fournir des systèmes matriciels mal conditionnés. La technique de conditionnement appliquée ici au cas poroélastique permet de traiter n'importe quelle configuration de problèmes, y compris ceux impliquant de hautes fréquences, de grandes valeurs de nombres d'ondes ou encore de fortes épaisseurs de couches. Différents types de milieux et d'excitations peuvent alors être étudiés. L'efficacité de la technique ainsi que l'influence de l'hétérogénéité multicouches sont présentées dans cette communication. Enfin, les techniques semi-analytiques développées peuvent servir de benchmark aux outils de simulation en poroélasticité.

Abstract :

The authors propose a semi-analytical approach to study wave propagation in multilayered poroelastic grounds due to transient loads. The theoretical development is based on the exact stiffness matrix method relative to the Biot theory, developed in the wavenumber-frequency domain, coupled to a matrix conditioning technique. The usual methods provide poorly-conditioned numerical systems due to the presence of mismatched exponential terms. In this paper, exponential terms with positive argument are not explicitly calculated. The method can thus be applied in a wide field of configurations, without restriction concerning high frequency, large Fourier transform parameter or layer thickness. Efficiency of the proposed method and effects of the layering on the solid and fluid displacements are discussed. This approach can be of interest for the validation of numerical tools.

Mots clés : milieu poroélastique multicouches, méthode de matrice de raideur exacte, théorie de Biot, conditionnement de matrices, régime transitoire

1 Introduction

L'étude de la propagation d'ondes en milieux poreux est un sujet d'importance dans de nombreux domaines en mécanique. Les premières approches théoriques traitant de la propagation d'ondes en poroélasticité d'un point de vue macroscopique ont été développées par Biot. Le milieu est modélisé par un milieu continu à deux phases composé d'un squelette solide poreux déformable élastique et d'une particule fluide. Durant les trois dernières décennies, et dans le cas de régimes transitoires, plusieurs approches semi-analytiques ont été développées : Paul [1] pour des comportements non dissipatifs, Gajo et Mongiovi [2] pour des cas 1D, Carcione et al. [3] avec une étude complète des ondes de compression pour des milieux poreux viscoacoustiques, Degrande et al. [4] pour des milieux poreux secs, partiellement ou totalement saturés, et plus récemment Gerasik et Statna [5] par intégration dans le domaine des nombres complexes. Ces travaux sont basés sur les décompositions de Helmholtz, les transformées de Fourier et/ou Hankel sur les variables temporelle et/ou spatiales. Ils conduisent à un formalisme matriciel exact. Les solutions analytiques en déplacements sont développées dans le domaine fréquentiel et des nombres d'ondes. Pour le cas particulier des configurations multicouches, plusieurs techniques peuvent être utilisées : les méthodes de matrice de transfert, de matrice de raideur exacte ou encore de matrice de transmission et réflexion (TRM). En poroélasticité, une méthode de matrice de raideur exacte a été développée par Rajapakse et Senjuntichai [6] pour des problèmes harmoniques 2D et par Degrande et al. [4] pour des milieux saturés ou non. Tous ces auteurs insistent sur les problèmes de conditionnement des matrices raideurs, en particulier pour les grandes valeurs des nombres d'ondes et de pulsations, et aussi les fortes valeurs d'épaisseur de couches. Pour résoudre ce problème, Rajapakse et Senjuntichai [6] utilisent les outils de mathématique symbolique pour obtenir des matrices exactes analytiques mieux conditionnées. La méthode

TRM a été récemment adaptée aux milieux poroviscoélastiques dans le cas d'une géométrie axisymétrique, Lu et Hanyga [7]. Une technique similaire peut être implémentée dans les approches de matrice de raideur exacte, et c'est ce qui est proposé dans cette communication.

2 Approche théorique

L'approche semi-analytique est basée sur la théorie macroscopique complète de Biot, traditionnellement écrite à l'aide des déplacements des phases solide et fluide \vec{u} et \vec{U} . Le problème se résume sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij,j} = (1 - \phi)\rho_s \ddot{u}_i + \phi\rho_f \ddot{U}_i \quad (1)$$

$$p_{,i} = -\frac{\phi}{K} \Upsilon(t) * (\dot{U}_i - \dot{u}_i) + \rho_f(a_\infty - 1)\ddot{u}_i - a_\infty\rho_f \ddot{U}_i \quad (2)$$

pour les équations du mouvement, et pour les deux lois de comportement :

$$\sigma_{ij} = \lambda_0 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta p \delta_{ij} \quad (3)$$

$$-\phi (U_{k,k} - u_{k,k}) = \beta u_{k,k} + \frac{1}{M} p \quad (4)$$

Dans les équations précédentes, nous utilisons les notations usuelles de mécanique. Pour l'aspect spécifique de la poroélasticité, ϕ représente la porosité, K la perméabilité, a_∞ la tortuosité, p la pression β et M les coefficient de Biot et ρ_s et ρ_f les masses volumiques solide et fluide respectivement. Le modèle JKD Υ de la perméabilité dynamique a été pris en compte et implémenté dans le domaine fréquentiel. Les principales étapes du développement théorique sont, cf. Lefeuvre-Mesgouez and Mesgouez [8] :

1) Une charge impulsionnelle verticale de type ondelette de Ricker est appliquée en surface d'un massif poroélastique semi-infini multicouches. Chaque couche étant homogène, il y a indépendance par couche des paramètres mécaniques vis à vis des variables spatiales : ainsi, la dérivée spatiale des lois de comportement est intégrée dans les équations du mouvement.

2) Pour des raisons de simplifications, nous retenons ici la formulation en déplacement solide - déplacement relatif $\{\vec{u}, \vec{w} = \phi(\vec{U} - \vec{u})\}$.

3) Une décomposition de Helmholtz sur les déplacements solide et relatif, combinée à une triple transformée de Fourier sur le temps (notée *, de paramètre ω) et sur les variables spatiales de surface (notée -, de paramètres γ et ζ) conduit à définir les matrices masse $[M]$, raideur $[K]$ et amortissement $[C]$ associées au problème poroélastique.

4) Nous obtenons alors le système matriciel différentiel ordinaire suivant :

$$\left(\left(\frac{d^2}{dz^2} - \gamma^2 - \zeta^2 \right) [K_P] + \omega^2 [M] - i\omega [C] \right) \begin{Bmatrix} \bar{\varphi}^* \\ \bar{\varphi}^{*r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

En notant k_{Pj} les nombres d'onde verticaux issus du déterminant associé au système (5) ($j = 1$ pour l'onde P1 et 2 pour l'onde P2), les potentiels scalaires de Helmholtz s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varphi}^* \\ \bar{\varphi}^{*r} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \bar{\Phi}_1^I e^{ik_{P1}z} + \begin{Bmatrix} 1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \bar{\Phi}_1^R e^{-ik_{P1}z} + \begin{Bmatrix} 1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \bar{\Phi}_2^I e^{ik_{P2}z} + \begin{Bmatrix} 1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \bar{\Phi}_2^R e^{-ik_{P2}z}$$

I représente l'onde "incidente" et R l'onde "réfléchie". En considérant la géométrie choisie (axe z vertical ascendant), la condition de radiation à l'infini est vérifiée pour $\Im\{k_{Pj}\} < 0$, $j = 1, 2$. De plus, la propagation a lieu selon les z décroissants pour les ondes "incidentes", ce qui fixe $\Re\{k_{Pj}\} > 0$ pour $\omega > 0$. Les potentiels vecteurs de Helmholtz s'expriment avec des expressions similaires. Le champ des déplacements transformés s'écrit alors sous la forme suivante, avec le vecteur des constantes d'intégration $\langle \bar{\Phi}^{*I}, \bar{\Phi}^{*R} \rangle^t$:

$$\langle \bar{\mathbf{u}}_z^* \rangle^t = \langle \bar{u}_x^*, \bar{u}_y^*, i\bar{w}_z^*, i\bar{w}_z^* \rangle^t = [Mat^I Z^I(z), Mat^R Z^R(z)] \langle \bar{\Phi}^{*I}, \bar{\Phi}^{*R} \rangle^t \quad (6)$$

$$Mat^I = \begin{bmatrix} i\gamma & i\gamma & 1 & 0 \\ i\zeta & i\zeta & 0 & 1 \\ -k_{P1} & -k_{P2} & \frac{-i\gamma}{k_S} & \frac{-i\zeta}{k_S} \\ -k_{P1}F_1 & -k_{P2}F_2 & \frac{-i\gamma}{k_S}G & \frac{-i\zeta}{k_S}G \end{bmatrix}, Z_I = \text{Diag}[e^{ik_{P1}z}, e^{ik_{P2}z}, e^{ik_S z}, e^{ik_S z}]$$

$$Mat^R = \begin{bmatrix} i\gamma & i\gamma & 1 & 0 \\ i\zeta & i\zeta & 0 & 1 \\ k_{P1} & k_{P2} & \frac{i\gamma}{k_S} & \frac{i\zeta}{k_S} \\ k_{P1}F_1 & k_{P2}F_2 & \frac{i\gamma}{k_S}G & \frac{i\zeta}{k_S}G \end{bmatrix}, Z_R = \text{Diag}[e^{-ik_{P1}z}, e^{-ik_{P2}z}, e^{-ik_Sz}, e^{-ik_Sz}].$$

En considérant la couche “n”, et en introduisant z_{n-1} et z_n les limites supérieure et inférieure de la couche, avec $h_n = (z_n - z_{n-1}) < 0$, il vient :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{z=z_{n-1}}^* \\ \bar{\mathbf{u}}_{z=z_n}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Mat^I Z_{z=z_{n-1}}^I & Mat^R Z_{z=z_{n-1}}^R \\ Mat^I Z_{z=z_n}^I & Mat^R Z_{z=z_n}^R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Phi}^{*I} \\ \bar{\Phi}^{*R} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \bar{\Phi}^{*I} \\ \bar{\Phi}^{*R} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Le point problématique dans la formulation précédente est le conditionnement de la matrice $[Q]$: cette matrice est connue pour être mal conditionnée, ce qui rend les résultats numériques peu fiables et entachés d’erreurs, surtout pour de grandes valeurs d’épaisseur de couche et/ou de fortes valeurs de nombres d’ondes et/ou de fréquences. Pour améliorer le conditionnement de $[Q]$, les termes exponentiels positifs sont “transférés” dans le vecteur des constantes d’intégration, qui ne sera pas déterminé explicitement. Il s’agit d’une réécriture des systèmes matriciels (7) et (8) qui ne concerne au final que la matrice résultante, sans autre implication. Cette technique de conditionnement conduit à un système numérique bien mieux conditionné, avec une nouvelle matrice $[Q']$. Il n’y a alors plus aucune restriction concernant la résolution du système matriciel pour de grandes valeurs d’épaisseur de couche et/ou de fortes valeurs de nombres d’ondes et/ou de fréquences. Ceci est particulièrement important en ce qui concerne l’étude des régimes transitoires pour lesquels les paramètres de transformées de Fourier peuvent présenter de fortes valeurs numériques.

Le nouveau vecteur des constantes d’intégration (i.e. modifié pour le conditionnement) $\bar{\Phi}_1^{*I/R}$, $\bar{\Phi}_2^{*I/R}$, $\bar{\psi}_{Sx}^{*I/R}$, $\bar{\psi}_{Sy}^{*I/R}$ et $\bar{\psi}_{Sz}^{*I/R}$ se déduit des conditions aux limites du problème considéré, ce qui définit la matrice $[S]$ de telle sorte que

$$[S] < \bar{\Phi}^{*I}, \bar{\Phi}^{*R} >^t = < \bar{\Sigma}_{z=z_{n-1}}^*, -\bar{\Sigma}_{z=z_n}^* >^t, \text{ cf. [8]} \quad (8)$$

On en déduit alors les expressions analytiques du champ de déplacements pour une couche “n” :

$$\begin{bmatrix} S^I & S^R Z'(h_n) \\ -S^I Z'(h_n) & -S^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Mat^I & Mat^R Z'(h_n) \\ Mat^I Z'(h_n) & Mat^R \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{z=z_{n-1}}^* \\ \bar{\mathbf{u}}_{z=z_n}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Sigma}_{z=z_{n-1}}^* \\ -\bar{\Sigma}_{z=z_n}^* \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Un assemblage classique entre les différentes couches est ensuite effectué, en vérifiant la continuité des contraintes et déplacements aux interfaces entre les différentes couches. Le cas de l’espace semi-infini en dessous de la dernière couche est traité séparément puis assemblé. Effectivement, seules les ondes “incidentes” doivent être conservées et la formulation matricielle s’en trouve réduite. Les déplacements transformés du massif poroélastique multicouches se présentent alors de manière analytique dans le domaine transformé des nombres d’ondes et de pulsations. Le retour dans le domaine spatio-temporel s’effectue de manière numérique. L’évaluation des intégrales est réalisée soit par une méthode spécifique (méthode de quadrature de type Filon adaptée à la gestion des intégrales pouvant présenter de fortes oscillations et des variations brusques de forme, ce qui est notre cas ici), ou bien par un algorithme de transformée de Fourier rapide (IFFT) avec des valeurs appropriées pour la discrétisation et les valeurs de troncature.

3 Résultats numériques et mécaniques obtenus

Deux types de milieux poreux seront considérés ici : tout d’abord, un sol poreux de type “Grés de Berea” saturé (totalement) d’eau ainsi qu’un sol de type sableux (Sand of Mol) également saturé d’eau. Une ondelette excitatrice de Ricker est appliquée sur une bande de largeur finie à la surface du sol, et présente deux fréquences centrales d’excitation respectivement à basse et haute fréquences, afin d’illustrer une large gamme de réponses du milieu poreux : $f_{c1} = 400Hz$ et $f_{c2} = 400kHz$. Les résultats proposés ont été obtenus par l’intermédiaire d’une IFFT avec 8192×2048 points et des valeurs appropriées pour γ_{max} et ω_{max} : ce choix émane de tests numériques plus que de l’utilisation de critères purement mathématiques dans la mesure où l’absence de recouvrement de spectres et la bonne discrétisation (i.e. absence de sensibilité) dans le domaine transformé sont les points clés à vérifier.

La Figure 1 présente l’évolution de la norme matricielle des matrices $[Q]$ et $[Q']$ précédemment définies en fonction de la pulsation, pour une valeur fixée de $\gamma = 1.5$. La norme matricielle est définie par :

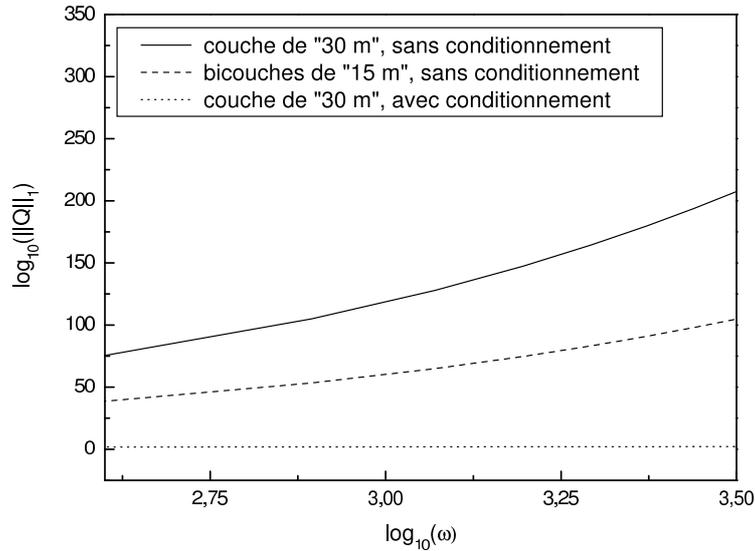


FIG. 1 – Variation de la norme matricielle de $[Q]$ ou $[Q']$ en fonction de la pulsation

$$\|Q_{M,N}\|_1 = \max_{(1 \leq j \leq N)} \left(\sum_{i=1}^M |Q_{ij}| \right) \quad (10)$$

Deux configurations de sol y sont traitées : une couche (30 m) sur espace semi-infini avec ou sans conditionnement de matrice et deux couches identiques (15 m chacune) sur espace semi-infini sans conditionnement de matrice.

De très fortes valeurs de $\|Q\|_1$ sont obtenues du fait de la présence des termes exponentiels positifs. Une diminution de l'épaisseur de la couche conduit à des valeurs de normes plus acceptables, mais la diminution de l'épaisseur de la couche ne solutionne pas le problème du mauvais conditionnement et ne permet pas l'obtention de résultats numériques fiables. De plus, la subdivision de couches en sous-couches pour réduire l'influence du mauvais conditionnement conduit à des systèmes matriciels plus importants et plus lourds à gérer numériquement : le temps d'exécution numérique peut s'alourdir considérablement. Grâce à la technique de conditionnement présentée dans cette communication, la norme matricielle reste stable pour tout ω , ce qui conduit à des résultats numériques fiables et précis.

La Figure 2 présente 4 sous-figures illustrant l'évolution temporelle des déplacements solide et relatif pour différents sols poroélastiques et pour un point situé en profondeur. Chaque sol est constitué de 2 couches (d'épaisseurs identiques ici) sur un espace semi-infini. L'épaisseur des couches est de 20 m et 0.02 m pour les fréquences centrales de l'ondelette de Ricker f_{c1} et f_{c2} . Les quatre configurations de sol (notés cas 1 jusqu'à 4) sont : les cas 1 et 4 correspondent à des sols homogènes de type "mou" (Sand of Mol) et "dur" (Berea Sandstone). Pour le cas 2, la première couche est sableuse, la seconde et l'espace semi-infini sont plus durs. Pour le cas 3, il y a inversion des couches 1 et 2, de telle sorte qu'une couche "molle" est incluse entre deux couches plus dures. Pour toutes les configurations, le même facteur de correction fréquentielle est appliqué, et le même amortissement (de type hystérétique) est pris en compte pour le squelette solide. Rappelons que cet amortissement hystérétique est un amortissement indépendant des fréquences excitatrices. Une valeur de 1% est considérée ici. Une étude similaire pourrait être menée sans amortissement ou avec un amortissement de type Kelvin-Voigt ou de type Rayleigh.

Le point d'observation choisi ici est situé à $(x, z) = (+10m, -10m)/(+0.01m, -0.01m)$ pour f_{c1} et f_{c2} respectivement. Les déplacements solides et relatifs sont normés vis à vis du déplacement maximal solide obtenu pour le cas 1. Les figures présentent une première série de pics (forme issue de l'ondelette de Ricker) due à l'onde $P1$ qui est la plus rapide. Des pics d'amplitude plus faible sont ensuite observés pour les cas 2 et 3, issus des réflexions des ondes $P1$. Ensuite, on voit apparaître des pics relatifs à l'onde S , prépondérante dans cette configuration (observation en profondeur sur le déplacement vertical). Il apparaît clairement sur les courbes que l'onde de cisaillement est prépondérante dans tous les cas de figures. Les temps d'arrivée des ondes

de cisaillement (i.e. temps centraux d'arrivée) sont donnés par, cf. Figures 2(a-b) :

$$t_S^{cas3-4} = \sqrt{200}/1741 + 2.5 \times 10^{-3} = 10.6 \times 10^{-3} s$$

$$t_S^{cas1-2} = \sqrt{200}/236 + 2.5 \times 10^{-3} = 62.4 \times 10^{-3} s$$

où les valeurs de v_S sont obtenues par l'intermédiaire des relations de dispersion (non présentées dans cette communication) et 2.5×10^{-3} est le décalage temporel de l'ondelette de Ricker.

Les mêmes temps d'arrivée sont obtenus pour les cas homogènes et hétérogènes car le point d'observation est situé dans la première couche des sols hétérogènes. La différence de réponse se visualise alors en fonction des réflexions éventuelles observées, ce qui est visible pour les cas 2 ou 3. La prise en compte de la réponse du déplacement relatif est particulièrement importante, car elle apporte une information supplémentaire par rapport aux cas purement élastiques et non poroélastiques. Pour f_{c1} (basse fréquence), les déplacements relatifs présentent de faibles amplitudes, avec un maximum pour l'onde de cisaillement de l'ordre de 1.7%. Pour f_{c2} (haute fréquence), le découplage entre les composantes solide et fluide du milieu poreux est plus marqué : la Figure 2(d) montre un déplacement relatif perceptible pour les deux types de sols, avec une amplitude plus conséquente (par rapport à la basse fréquence, et par rapport au sol de type Berea Sandstone) du déplacement relatif pour le sol constitué de Sand of Mol et pour le point d'observation considéré (cas 1 et 2). Le déplacement relatif peut ainsi atteindre des valeurs de 23%. Plus le découplage est important entre les deux phases, plus l'amplitude du déplacement relatif est marquée, car la partie fluide du milieu ne se déplace pas seule (i.e. sans couplage) à l'arrivée de l'onde S . Enfin, la visualisation de l'onde P_2 est effective sur la Figure 2(d) : de fait, à

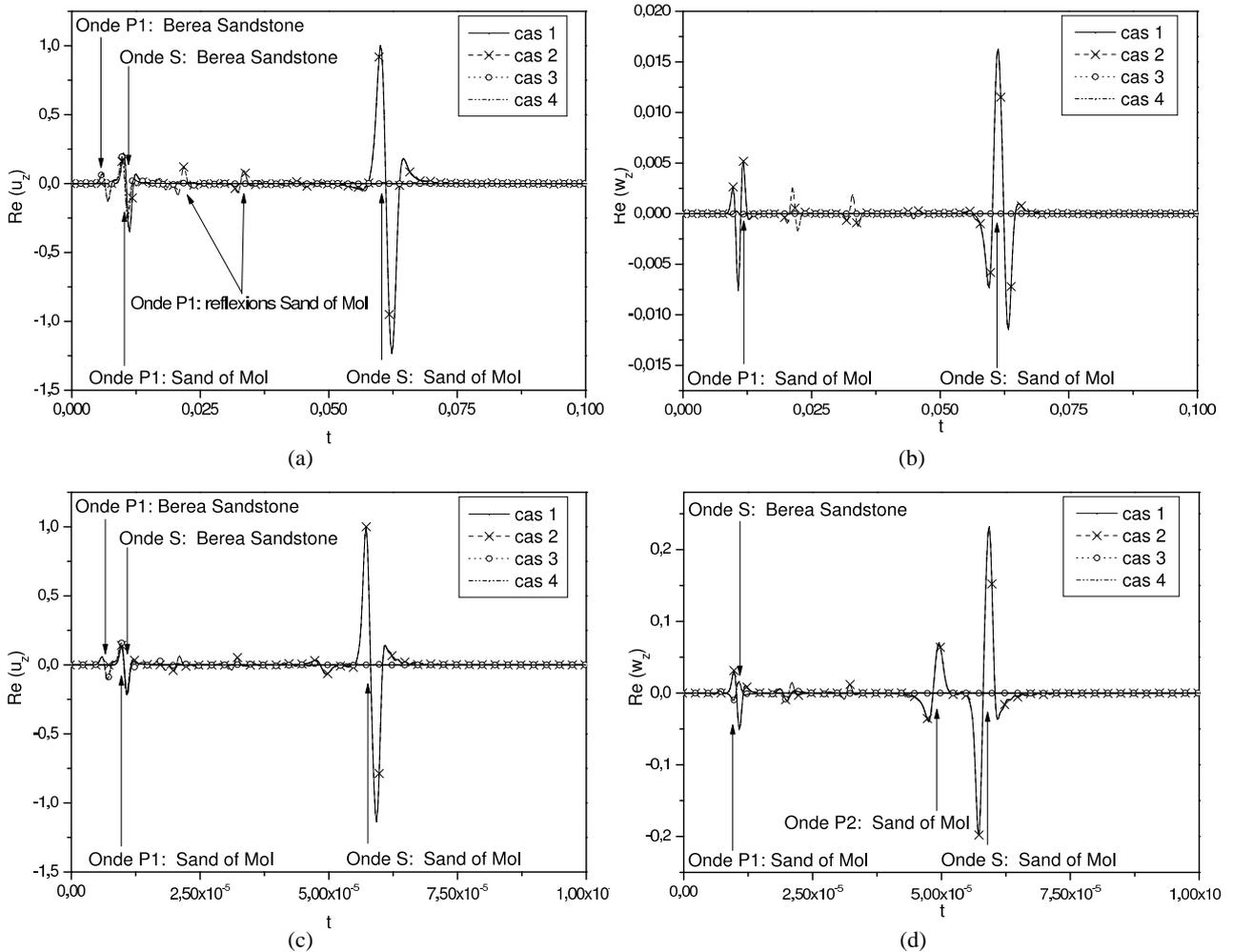


FIG. 2 – Déplacements verticaux solides (a-c) et relatifs (b-d) pour un point d'étude situé à $(x, z) = (+10m, -10m)/(+0.01m, -0.01m)$ pour f_{c1} (a-b) et f_{c2} (c-d) respectivement

haute fréquence et pour un massif à dominante “molle”, l’onde P_2 génère un déplacement relatif observé de 7% juste avant l’arrivée de l’onde S et conforme à la vitesse de propagation attendue de l’onde P_2 . Si on compare les résultats obtenus entre les deux fréquences d’étude, l’allure des déplacements solides est relativement similaire, et ce sont les déplacements relatifs qui diffèrent de façon nette puisque le découplage est plus marqué pour f_{c2} que pour f_{c1} (23% contre 1.7%). Il est d’autant plus marqué qu’on met en relief ici l’onde S “symbole” du couplage / découplage entre les phases solide et fluide. Si on compare les réponses entre les deux types de sols, ce sont principalement les vitesses des ondes et les amplitudes engendrées qui diffèrent.

4 Conclusion

Une méthode de matrice de raideur exacte couplée à une technique de conditionnement de matrice sont présentées dans le cadre de la poroélasticité et pour des régimes transitoires. L’efficacité de la technique de conditionnement est évaluée en déterminant la norme des matrices classiquement mal conditionnées. L’influence de l’hétérogénéité du milieu poreux (sous forme d’un multicouches) est visualisée par l’intermédiaire des déplacements solides et relatifs pour différents types de sols poreux.

Références

- [1] Paul S. On the displacements produced in a porous elastic half-space by an impulsive load (non-dissipative case). *Pure Appl. Geophys.*, 114(4), 605–614, 1976.
- [2] Gajo A. and Mongiovi L. An analytical solution for the transient response of saturated linear elastic porous media. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 19, 399–413, 1995.
- [3] Carcione J. and Quiroga-Goode G. Full frequency-range transient solution for compressional waves in a fluid-saturated viscoacoustic porous medium. *Geophys. Prospecting*, 44, 99–129, 1996.
- [4] Degrande G., De Roeck G., Van Den Broeck P., and Smeulders D. Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media. *Int. J. Solids Struct.*, 35(34–35), 4753–4778, 1998.
- [5] Gerasik V. and Stastna M. Poroelastic acoustic wavetrains excited by harmonic line tractions. *Proc. Royal Soc. A.*, 464(2090), 491–511, 2008.
- [6] Rajapakse R. and Senjuntichai T. Dynamic response of a multi-layered poroelastic medium. *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, 24, 703–722, 1995.
- [7] Lu J. and Hanyga A. Fundamental solution for a layered porous half space subject to a vertical point force or a point fluid source. *Comput. Mech.*, 35, 376–391, 2005.
- [8] Lefeuvre-Mesgouez G. and Mesgouez A. Ground vibration due to a high-speed moving harmonic rectangular load on a poroviscoelastic half-space. *Int. J. Solids Struct.*, 45(11-12), 3353–3374, 2008.