



HAL
open science

Modélisation de la transition vers la turbulence dans un écoulement en conduite de fluide rhéofluidifiant: approche par calcul d'ondes non linéaires

Nicolas Roland, Emmanuel Plaut, Chérif Nouar

► To cite this version:

Nicolas Roland, Emmanuel Plaut, Chérif Nouar. Modélisation de la transition vers la turbulence dans un écoulement en conduite de fluide rhéofluidifiant: approche par calcul d'ondes non linéaires. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03390935

HAL Id: hal-03390935

<https://hal.science/hal-03390935>

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation de la transition vers la turbulence dans des écoulements en conduite de fluide rhéofluidifiant : approche par calcul d'ondes non linéaires

NICOLAS ROLAND, EMMANUEL PLAUT ET CHÉRIF NOUAR

LEMTA, Nancy-Université & CNRS, 2 avenue de la Forêt de Haye, 54516 Vandœuvre cedex

Résumé :

Une nouvelle approche a émergé récemment pour affronter le problème difficile de la modélisation de la transition vers la turbulence dans des écoulements en conduite cylindrique. Elle repose sur des calculs, réalisés en plusieurs étapes, de solutions numériques ondes non linéaires. Cette approche a déjà donné des résultats intéressants en fluides newtoniens [1, 2]. Nous la mettons en place dans le cas de fluides rhéofluidifiants. Les résultats obtenus pour des structures faiblement symétriques, de nombre d'onde azimutal de base égal à 1, montrent que les premières étapes du procédé de calcul des ondes sont fortement modifiées par les effets de rhéofluidification. En particulier le nombre d'onde critique q_c de l'instabilité inflexionnelle des structures très cohérentes bidimensionnelles forcées diminue de façon sensible lorsque l'indice de rhéofluidification n diminue, i.e. lorsque les effets de rhéofluidification deviennent plus forts.

Abstract :

Recently, new ideas have come out to tackle the difficult problem of modelling the transition to turbulence in pipe flow : a multi-step process has been set up to compute traveling wave solutions. This approach has already given interesting results in the case of newtonian fluids [1, 2]. We implement this approach in the case of shear-thinning fluids, for which the viscosity μ diminishes with the rate of strain $\dot{\gamma}$ according to the Carreau model (6). For this purpose an ad-hoc pseudo-spectral code has been constructed. Poorly symmetric structures, of fundamental wavenumber in the azimuthal direction $m_0 = 1$, are studied. The first steps of the wave computation process, as defined in [3], are strongly influenced by shear-thinning effects. In particular the critical value q_c of the axial wavenumber q at onset of the inflexional instability of the forced exact coherent structures (figures 2 and 3) decreases significantly when the shear-thinning index decreases, i.e. when shear-thinning effects become stronger (figure 4c).

Mots clefs : instabilités & bifurcations, structures cohérentes

1 Introduction

L'étude de la transition vers la turbulence dans des écoulements en conduite cylindrique de fluides newtoniens pose des problèmes de modélisation redoutables, l'écoulement laminaire de Hagen-Poiseuille étant linéairement stable. Une approche intéressante a émergé récemment, avec l'idée de calculer des ondes non linéaires qui constitueraient des solutions instables sur lesquelles s'organisent les écoulements turbulents [1, 2, 3], ou encore qui séparerait l'attracteur turbulent de l'attracteur laminaire [4]. Cette idée a pu se concrétiser grâce au développement de modèles où l'on force l'équation de Navier-Stokes (forçage d'amplitude F) afin d'induire des « structures très cohérentes » bidimensionnelles, constituées de « rouleaux » et de « jets ». Ces jets sont susceptibles de subir une bifurcation sous critique par instabilité inflexionnelle, qui peut elle même mener à des solutions ondes non linéaires tridimensionnelles à forçage nul $F = 0$, qui sont les seules à avoir une véritable signification physique ; ces solutions sont calculées par des méthodes de continuation [3, 5]. La pertinence de cette approche a été confirmée par des études expérimentales [2]. Dans le cas de fluides non newtoniens rhéofluidifiants, pour lesquels la viscosité diminue avec le taux de cisaillement (cf. par exemple la loi de Carreau 6), l'écoulement laminaire est aussi stable, et il semble donc intéressant d'appliquer la même approche. Alors qu'en fluides viscoélastiques plusieurs études de ce type ont déjà vu le jour, en géométrie plane toutefois, [6, 7, 8], à notre connaissance cette approche n'a jamais été appliquée à des fluides rhéofluidifiants, dans quelque géométrie que ce soit. L'objet de cette communication est de présenter les premiers résultats d'un code pseudo spectral construit pour le calcul d'ondes non linéaires en écoulements en conduite cylindrique de fluides rhéofluidifiants.

2 Modèle utilisé : rhéologie, géométrie, méthodes numériques

Nous utilisons le modèle de Carreau de fluide rhéofluidifiant [9]. L'écoulement a lieu dans un tuyau cylindrique de rayon a , et est décrit en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Les paramètres de contrôle sont la vitesse axiale $\widehat{W}_b(0)$ en $r = 0$ de l'écoulement laminaire, la viscosité dynamique à cisaillement nul $\widehat{\mu}_0$, la viscosité dynamique à cisaillement infini $\widehat{\mu}_\infty$, le temps caractéristique du fluide $\widehat{\lambda}$ et l'indice de rhéofluidification n . Après adimensionnements utilisant la longueur a , la vitesse $\widehat{W}_b(0)$, la viscosité $\widehat{\mu}_0$, on fait apparaître un nombre de Reynolds

$$Re = a\rho\widehat{W}_b(0)/\widehat{\mu}_0 \quad (1)$$

avec ρ la masse volumique du fluide. En notant sans chapeau les quantités adimensionnées, l'équation de la quantité de mouvement prend la forme

$$\partial_t \mathbf{v} + \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -\nabla p + Re^{-1} \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \quad (2)$$

avec \mathbf{v} (resp. p) le champ de vitesse (resp. pression), $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$ le tenseur des contraintes visqueuses

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = \mu \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}} \quad (3)$$

Dans cette équation

$$\underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}} = \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v} + (\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v})^T \quad (4)$$

est le tenseur des taux de déformations, dont le second invariant

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{ij} \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{ij} / 2)^{1/2} \quad (5)$$

La viscosité dynamique

$$\mu = \mu(\dot{\boldsymbol{\gamma}}) = \mu_\infty + (1 - \mu_\infty)(1 + \lambda^2 \dot{\boldsymbol{\gamma}}^2)^{(n-1)/2} \quad (6)$$

Dans tous nos calculs nous avons utilisé $\mu_\infty = \widehat{\mu}_\infty / \widehat{\mu}_0 = 10^{-3}$. A priori le paramètre λ s'écrit sous la forme

$$\lambda = \widehat{\lambda} \widehat{W}_b(0) / a = (\widehat{\lambda} \widehat{\mu}_0 / \rho a^2) Re \quad (7)$$

S'il est nul, ou si $n = 1$, la loi de comportement (3), (6) redonne celle d'un fluide newtonien. Pour simplifier, nous avons considéré dans tout ce qui suit que $\lambda = 2$. Le fluide étant supposé incompressible,

$$\underline{\underline{\text{div}}} \mathbf{v} = 0 \quad (8)$$

Afin d'être capable de calculer des solutions ondes de l'équation de la quantité de mouvement (2), qui est fortement non linéaire du fait de la loi de comportement (6), un code pseudo spectral original a été écrit. La méthode numérique de codage des équations (2), (8) est celle de [10], qui s'intéressaient toutefois à des fluides newtoniens. Cette méthode repose sur un développement spectral du champ de vitesse de la forme

$$\mathbf{v} = \sum_{n=0}^{2N+1} \sum_{m=-M}^{+M} \sum_{l=-L}^{+L} a_{nml} \mathbf{v}_{nml}(r) \exp[i(m\theta + lq_0(z - ct))] \quad (9)$$

pour les solutions les plus complexes calculées, i.e. des ondes fortement non linéaires (cf. la section 6 pour une définition des paramètres m_0 , q_0 et c). Le paramètre de troncature radial N détermine le degré le plus élevé en r des polynômes utilisés dans les champs de base $\mathbf{v}_{nml}(r)$, de l'ordre de $2N$; plus précisément deux familles différentes de champs de base sont utilisées pour chaque valeur de m et l , cf. [10]. Des valeurs typiques des paramètres de troncature N , M et L des développements radial, azimutal et axial sont données dans la légende de la figure 5. Par projection, i.e. produit scalaire puis intégration volumique, sur des champs tests à divergence nulle, le terme de gradient de pression fluctuant (hors pression de base p_b liée à l'écoulement laminaire \widehat{W}_b) est éliminé, et un système algébrique est obtenu pour les coefficients de développement a_{nml} . L'intégrale volumique est calculée par une formule de quadrature de Gauss-Lobatto pour l'intégrale en r , par des formules du trapèze pour les intégrales en θ et z , en utilisant des points de collocation (r_n, θ_m, z_l) . D'autres précisions seront données au fur et à mesure de la présentation des études effectuées. La seule hypothèse de symétrie utilisée pour réduire le nombre de coefficients spectraux dans (9) est celle de l'invariance vis-à-vis du miroir $y \mapsto -y$ ou

$$(r, \theta, z) \mapsto (r, -\theta, z + \pi/q_0), \quad (v_r, v_\theta, v_z) \mapsto (v_r, -v_\theta, v_z), \quad (10)$$

qui a aussi été utilisée par [3].

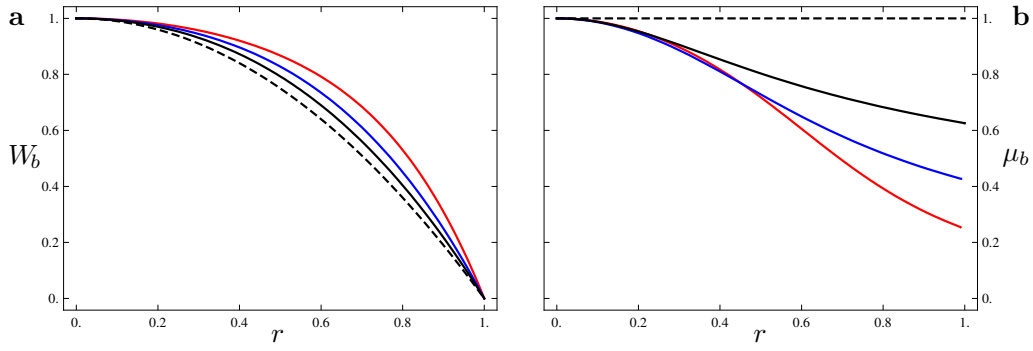


FIG. 1 – Vitesse axiale (a) et viscosité (b) des écoulements laminaires de base pour $n = 1$ (trait noir tireté), 0,7 (trait noir continu), 0,5 (trait bleu) et 0,3 (trait rouge).

3 Écoulements laminaires de base

Un développement spectral de la composante axiale $W_b(r)$ du champ de vitesse unidirectionnel de ces écoulements est utilisé. Après projection, le terme de gradient de pression survit puisque le champ de pression est non périodique dans la direction axiale. On rajoute donc la condition $W_b(0) = 1$ aux équations obtenues pour les coefficients du développement spectral de $W_b(r)$ afin d'obtenir un système non linéaire bien posé. Celui-ci est résolu par une méthode de Newton. Des résultats typiques sont présentés sur la figure 1. On constate que lorsque le fluide devient plus fortement rhéofluidifiant, lorsque n diminue, l'écoulement tend à devenir uniforme au centre du tuyau, tandis que le cisaillement tend à se concentrer près des parois, où la viscosité diminue. Cette diminution de viscosité peut être mesurée expérimentalement en mesurant la contrainte pariétale (grâce à des prises de pression). On introduit souvent, en conséquence, le nombre de Reynolds basé sur la viscosité à la paroi $\hat{\mu}_p$,

$$Re_p = a\rho\widehat{W}_b(0)/\hat{\mu}_p = Re/\mu_p > Re. \quad (11)$$

Les gradients de pression de base associés aux écoulements de la figure 1 s'écrivent de façon dimensionnelle

$$\widehat{\nabla p}_b = -f\frac{\rho\widehat{W}_d^2}{4a}\mathbf{e}_z \quad (12)$$

avec f le coefficient de perte de charge,

$$f Re_p = 64 \text{ pour } n = 1, \quad 65,5 \text{ pour } n = 0,7, \quad 68,4 \text{ pour } n = 0,5, \quad 76,4 \text{ pour } n = 0,3, \quad (13)$$

\widehat{W}_d la vitesse débitante,

$$\begin{aligned} \widehat{W}_d &= \frac{2}{a^2} \int_0^a \widehat{W}_b(\widehat{r})\widehat{r}d\widehat{r}, \\ \frac{\widehat{W}_d}{\widehat{W}_b(0)} &= 0,5 \text{ pour } n = 1, \quad 0,534 \text{ pour } n = 0,7, \quad 0,567 \text{ pour } n = 0,5, \quad 0,616 \text{ pour } n = 0,3. \end{aligned} \quad (14)$$

4 Structures très cohérentes bidimensionnelles forcées

Suivant la méthode imaginée par [5], et son implantation effective dans le cas d'écoulements de fluides newtoniens en conduite cylindrique par [3], nous réalisons dans un premier temps une étude de la stabilité linéaire des écoulements laminaires vis-à-vis de perturbations bidimensionnelles « rouleaux » ne dépendant pas de z , de la forme (l'indice f signifiera *forçage*, cf. l'équation 18)

$$\mathbf{v}_f = u_f(r)\cos(m_0\theta)\mathbf{e}_r + v_f(r)\sin(m_0\theta)\mathbf{e}_\theta. \quad (15)$$

Cette analyse de stabilité est réalisée en se ramenant numériquement à un problème aux valeurs propres généralisé. Comme dans le cas newtonien, le mode le moins amorti correspond à $m_0 = 1$ (cf. la table 1 de [3]). Une autre raison nous poussant à nous concentrer, dans un premier temps, sur le cas d'un nombre d'onde azimutal égal à 1, est le fait que ce nombre d'onde correspond à celui observé expérimentalement par [11] dans le cas de fluides très fortement rhéofluidifiants. Le mode linéaire (15) le moins amorti, normalisé grâce à la condition

$$\max u_f(r) = 1, \quad (16)$$

est alors introduit comme terme de forçage dans l'équation de la quantité de mouvement (2), avec une amplitude de forçage F . On cherche ensuite à équilibrer ce terme avec des « rouleaux » et des « jets », c'est-à-dire

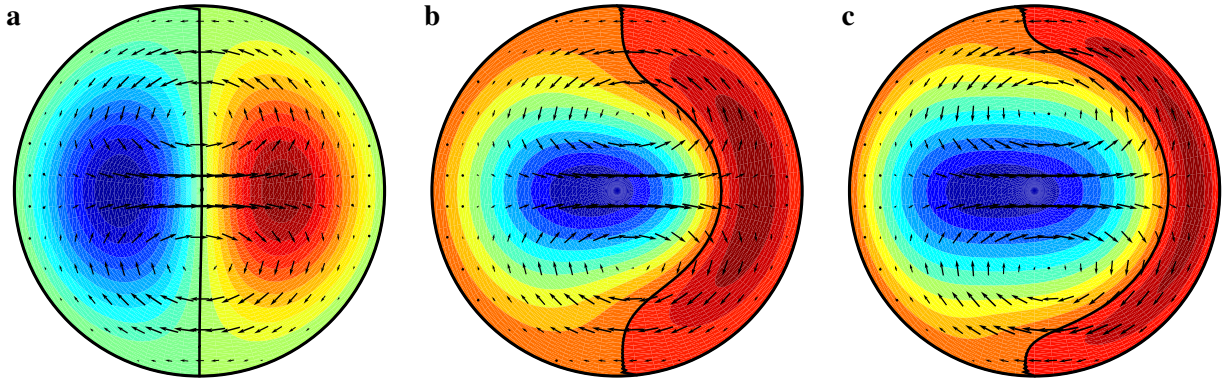


FIG. 2 – Structures très cohérentes forcées pour $n = 1$, $Re = 200$ (a), $n = 1$, $Re = 2000$ (b), $n = 0,5$, $Re = 2000$ (c). Dans tous les cas l'amplitude de forçage $F = 10^{-4}$. Les flèches représentent le champ transverse $U_r \mathbf{e}_r + V_r \mathbf{e}_\theta$ associé aux « rouleaux » ; pour les cas présentés $\max U_r = 0,00143$ (a), $0,0137$ (b), $0,0145$ (c). Les niveaux de couleurs représentent la correction de vitesse axiale W_j associée aux « jets » ; ils sont espacés de $-\min W_j/10$; pour les cas présentés $\min W_j = -0,00876$ (a), $-0,459$ (b), $-0,536$ (c). Le niveau tracé avec un trait noir épais est le niveau $W_j = 0$ qui sépare le jet lent du jet rapide.

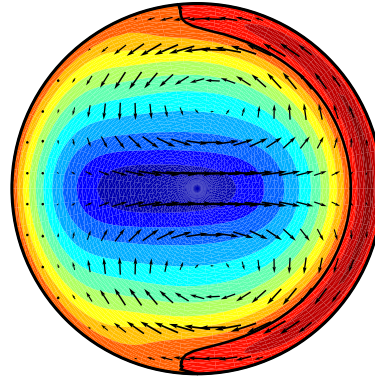


FIG. 3 – Structure très cohérente forcée pour $n = 0,3$, $Re = 2000$, $F = 10^{-4}$. On a $\max U_r = 0,0243$, $\min W_j = -0,605$. On peut noter que les rouleaux deviennent très véloces près des parois dans la région du jet rapide ($\theta \simeq \pm 50^\circ$).

que l'on calcule une structure très cohérente de la forme (l'indice b signifie *base*, r signifie *rouleaux*, j signifie *jets*)

$$\mathbf{v} = W_b(r) \mathbf{e}_z + U_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + V_r(r, \theta) \mathbf{e}_\theta + W_j(r, \theta) \mathbf{e}_z \quad (17)$$

solution de

$$\underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -\nabla p_b - \nabla p + Re^{-1} \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\tau}} + F \mathbf{v}_f. \quad (18)$$

Dans cette équation le champ de pression p_b est le champ de pression de base défini par (12), tandis que la correction de pression p est indépendante de z . Ce problème non linéaire est résolu par une méthode de Newton. Des exemples de structures ainsi calculées sont montrés sur la figure 2. Les rouleaux calculés ressemblent aux rouleaux du forçage, et induisent par advection du fluide rapide situé près du centre un jet rapide, par advection du fluide lent situé près des parois un jet lent. Dans le cas newtonien à faible nombre de Reynolds (figure 2a) les jets sont quasiment symétriques par rapport au miroir $x \mapsto -x$ ou

$$(r, \theta, z) \mapsto (r, \pi - \theta, z), \quad (v_r, v_\theta, v_z) \mapsto (-v_r, v_\theta, -v_z). \quad (19)$$

Lorsque le nombre de Reynolds est augmenté (figure 2b), les effets d'advection deviennent plus forts d'où une déformation des jets lent et rapide conduisant à une structure disymétrique. En fluide rhéofluidifiant on peut noter un élargissement du jet lent (figure 2c) et un écrasement du jet rapide près de la paroi (figure 3). Dans le même temps, de grandes vitesses transverses sont atteintes près de la paroi.

Signalons que, même en fluides newtoniens, l'étude de ce cas $m_0 = 1$ avec un forçage aussi simple (15), caractérisé lui aussi par $m_0 = 1$ n'a jamais fait l'objet de publications. En effet [3] par exemple ont alors utilisé un forçage $m_0 = 2$, même si ensuite les ondes ont été calculées avec $m_0 = 1$; ce forçage $m_0 = 2$ produit des structures dont le champ moyen est plus compliqué, avec plusieurs jets rapides et lents au lieu d'un jet rapide et un jet lent. Dans d'autres travaux rapportés par exemple dans [4], des forçages encore plus compliqués, avec plusieurs harmoniques azimutales (de $m = 1$ à 7), ont été introduits.

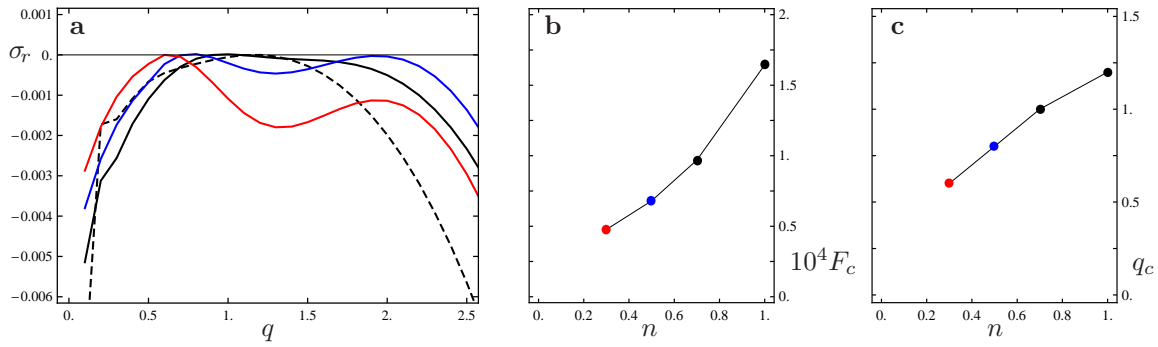


FIG. 4 – (a) : Partie réelle de la valeur propre de stabilité des structures très cohérentes vis-à-vis de perturbations ondes tridimensionnelles, en fonction du nombre d'onde axial de celles-ci, pour $n = 1$ (trait noir tireté), 0,7 (trait noir continu), 0,5 (trait bleu) et 0,3 (trait rouge). Dans chaque cas l'amplitude de forçage a été réglée à sa valeur critique, montrée sur la figure (b). L'évolution des nombres d'ondes critiques en fonction de n est montrée sur la figure (c). Dans tous les cas le nombre de Reynolds $Re = 2000$.

5 Instabilités des structures très cohérentes forcées

En suivant toujours la méthode de [5, 3], nous réalisons une analyse (numérique) de stabilité des structures très cohérentes forcées (17) vis-à-vis de perturbations prenant la forme d'ondes tridimensionnelles, de nombre d'onde axial q . Une instabilité structurante est observée lorsque l'amplitude de forçage F excède une valeur critique F_c , pour un nombre d'onde critique $q_c > 0$. Des exemples de valeurs propres en fonction de q sont montrés sur la figure 4a. Dans le cas newtonien $n = 1$, on obtient une courbe proche de celles obtenues sur leur figure 2 par [3], qui correspondait toutefois à d'autres valeurs du nombre d'onde azimutal, $m_0 = 2$ et 3 ; à notre connaissance dans le cas newtonien des courbes de valeurs propres pour $m_0 = 1$ n'ont jamais été publiées. On observe sur les figures 4b,c une forte diminution de l'amplitude de forçage critique F_c et du nombre d'onde critique q_c lorsque n diminue. Ceci indique une augmentation de la longueur d'onde critique $\lambda_c = 2\pi/q_c$ lorsque le fluide devient rhéofluidifiant. Cet effet peut être mis en parallèle avec le fait que la structure cohérente observée expérimentalement par [11] présente une très grande échelle axiale, même si d'autres études devront être menées pour affermir cette comparaison.

6 Ondes non linéaires forcées

En l'absence d'autres études publiées sur le cas $m_0 = 1$ avec forçage $m_0 = 1$, nous étudions le scénario de bifurcation vers des ondes non linéaires en choisissant un nombre d'onde axial de base $q_0 = 1$, valeur représentative des nombres d'onde critiques de la figure 4c. On se place à une amplitude de forçage F très légèrement supérieure à celle à laquelle la bifurcation a lieu, i.e. $\sigma_r(q_0, F) = 0$. On perturbe alors la structure très cohérente avec le mode linéaire déterminé par l'analyse de stabilité présentée en section 5, et une méthode de Newton est utilisée pour déterminer une solution numérique de la forme (9) de l'équation de la quantité de mouvement forcée,

$$\partial_t \mathbf{v} + \underline{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -c \partial_z \mathbf{v} + \underline{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -\nabla p_b - \nabla p + Re^{-1} \text{div} \underline{\underline{\tau}} + F \mathbf{v}_f. \quad (20)$$

Dans cette équation le champ de pression p_b est le champ de pression de base défini par (12), tandis que la correction de pression p est périodique sous $z \mapsto z + 2\pi/q_0$. La vitesse de phase inconnue c est déterminée grâce à une condition de phase du type $\text{Re}[a_{111}] = 0$, qui empêche les ondes de dériver sans fin dans le tuyau. La première solution obtenue présente typiquement des modes $l = 0$ proches de la solution bidimensionnelle (17). On suit par continuation la branche bifurquée avec une approche de prédiction-corrrection de type Euler-Newton. Cette branche est paramétrée soit par un coefficient du développement spectral bien choisi, soit par une abscisse curviligne (cf. [12]). Par analogie avec la définition (5.1) de [3], nous définissons une « amplitude tridimensionnelle » des ondes par une norme des coefficients correspondant au mode tridimensionnel a priori le plus important, i.e. le mode $m = m_0 = 1, l = 1$,

$$A = \sqrt{\sum_{n=1}^{2N} |a_{n11}|^2}. \quad (21)$$

La figure 5 présente en noir les amplitudes tridimensionnelles de solutions ondes obtenues dans le cas d'un fluide newtonien, d'indice $n = 1$. On observe sur la figure 5 une bifurcation sur-critique. C'est encore le cas pour un fluide faiblement rhéofluidifiant d'indice $n = 0,9$, avec les données présentées en rouge. Dans les deux cas les vitesses de phase varient peu, et sont de l'ordre de $c_0 = 0,5$.

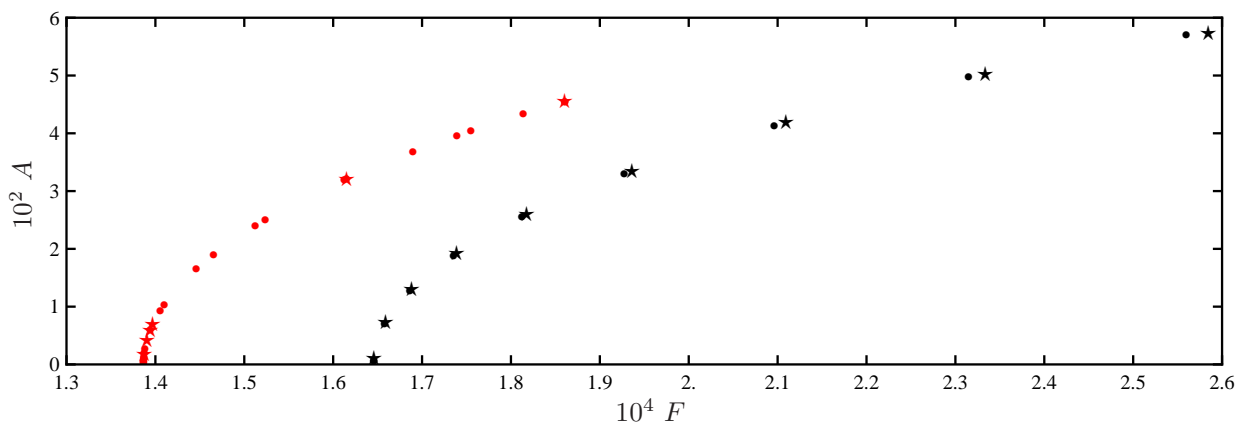


FIG. 5 – Amplitude tridimensionnelle A des ondes bifurquant par instabilité des structures très cohérentes forcées en fonction de l’amplitude de forçage F , pour un nombre de Reynolds $Re = 2000$, dans les cas newtonien $n = 1$ (noir) et faiblement rhéofluidifiant $n = 0,9$ (rouge). Le nombre d’onde axial de base $q_0 = 1$. Les paramètres de troncature utilisés sont $(N, M, L) = (28, 8, 5)$ (disques noirs), $(30, 9, 6)$ (étoiles noires), $(30, 12, 3)$ (disques rouges), $(32, 14, 4)$ (étoiles rouges).

7 Conclusions et perspectives

Cette étude représente les premiers résultats d’un nouveau code pseudo-spectral en cours de mise au point au LEMTA, dont on peut signaler qu’il a fait l’objet d’une validation par rapport à [3] dans le cas d’ondes plus symétriques, de nombre d’onde azimutal de base $m_0 = 2$ et 3 ; nous avons alors reproduit les diagrammes de bifurcations des figures 4 et 5 de [3]. Dans le cas $m_0 = 1$ avec forçage $m_0 = 1$, non documenté en fluide newtonien, cette première étude est encourageante car elle montre que le passage d’un fluide newtonien à un fluide non newtonien a une influence certaine sur les structures très cohérentes et les ondes non linéaires correspondantes, c’est-à-dire que le ‘*self-sustaining process*’ tel qu’il a été défini par [3] est altéré par des effets de rhéofluidification. Les travaux présentés ici sont en cours d’extension. Bien entendu il faut valider les calculs faits en fluide rhéofluidifiant. Des études plus systématiques seront ensuite menées, concernant notamment l’influence du mode choisi pour le forçage, du nombre d’onde axial q_0 , de l’indice de rhéofluidification n , et du paramètre λ , temps caractéristique réduit, qui a pour l’instant été fixé à la valeur $\lambda = 2$. On peut espérer que dans certains cas une bifurcation sous-critique sera obtenue, conduisant à des ondes non forcées à $F = 0$. Si cela était, on ne manquerait pas de comparer le champ de vitesse axial moyen de ces ondes à celui obtenu expérimentalement en régime faiblement turbulent par [11].

Références

- [1] Faisst H. and Eckhardt B. Traveling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.*, 91, 224502, 1–4, 2003.
- [2] Hof B., van Doorne C. W. H., Westerweel J., Nieuwstadt F. T. M., Faisst H., Eckhardt B., Wedin H., Kerswell R. R., and Waleffe F. Experimental observation of nonlinear traveling waves in turbulent pipe flow. *Science*, 305, 1594–1598, 2004.
- [3] Wedin H. and Kerswell R. R. Exact coherent structures in pipe flow : travelling wave solutions. *J. Fluid Mech.*, 508, 333–371, 2004.
- [4] Duguet Y., Willis A. P., and Kerswell R. R. Transition in pipe flow : the saddle structure on the boundary of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 613, 255–274, 2008.
- [5] Waleffe F. Three-dimensional coherent states in plane shear-flows. *Phys. Rev. Lett.*, 81, 4140–4143, 1998.
- [6] Stone P. A., Waleffe F., and Graham M. D. Toward a structural understanding of turbulent drag reduction : nonlinear coherent states in viscoelastic shear flows. *Phys. Rev. Lett.*, 89, 208301, 1–4, 2002.
- [7] Stone P. A., Roy A., Larson R., Waleffe F., and Graham M. D. Polymer drag reduction in exact coherent structures of plane shear flow. *Phys. Fluids*, 16, 3470–3482, 2004.
- [8] Li W., Xi L., and Graham M. D. Nonlinear travelling waves as a framework for understanding turbulent drag reduction. *J. Fluid Mech.*, 565, 353–362, 2006.
- [9] Bird B., Armstrong R., and Hassager O. Dynamics of polymeric liquids. Wiley-Interscience, 1987.
- [10] Meseguer A. and Mellibosky F. On a solenoidal Fourier-Chebyshev spectral method for stability analysis of the Hagen-Poiseuille flow. *App. Num. Math.*, 57, 920–938, 2007.
- [11] Esmael A. and Nouar C. Transitional flow of a yield-stress fluid in a pipe : Evidence of a robust coherent structure. *Phys. Rev. E*, 77, 057302, 1–4, 2008.
- [12] Seydel R. Practical bifurcation and stability analysis. From equilibrium to chaos. Springer-Verlag, 1994.