



HAL
open science

Méthode de design optimal d'un absorbeur essentiellement non linéaire

Tuan Anh Nguyen, Stephane Pernot, Claude-Henri Lamarque

► **To cite this version:**

Tuan Anh Nguyen, Stephane Pernot, Claude-Henri Lamarque. Méthode de design optimal d'un absorbeur essentiellement non linéaire. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. <hal-03390931>

HAL Id: hal-03390931

<https://hal.science/hal-03390931v1>

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Méthode de design optimal d'un absorbeur non linéaire¹

TUAN ANH NGUYEN, STÉPHANE PERNOT, CLAUDE HENRI LAMARQUE

Département Génie Civil et Bâtiment URA CNRS 1652
École Nationale des Travaux Publics de l'État
3, rue Maurice Audin, 69120 Vaulx-en-Velin Cedex France

Résumé :

Dans le cadre de recherche d'une efficacité optimale de transferts d'énergie pour le contrôle passif de systèmes mécaniques, une méthodologie originale de dimensionnement de la raideur d'absorbeurs non linéaires est développée. L'approche analytique est comparée à des simulations numériques.

Abstract :

In the context of targeted energy transfer, an original methodology is introduced to design the optimal stiffness of a nonlinear absorber aimed to passively control vibrations induced in a mechanical system. The analytical approach is compared with numerical simulations

Mots clés : Absorbeur non linéaire, design optimal, pompage énergétique, énergie d'activation.

1 Introduction

Les travaux portant sur le concept de transfert énergétique dans le domaine vibratoire ont fait l'objet de nombreuses publications [1, 2] depuis plus d'une dizaine d'années déjà. Le pompage énergétique consiste à transférer de manière irréversible l'énergie d'un système maître vers un système auxiliaire NES par l'intermédiaire d'une liaison essentiellement nonlinéaire qui permet de déclencher des résonances entre les modes nonlinéaires sous-jacents. Le pompage se traduit généralement par l'apparition de bifurcations vers des branches de solutions plus stables pour lesquels l'énergie se trouve localisée dans le système auxiliaire. La plupart des études précédentes s'attachant à démontrer la faisabilité du pompage dans certaines configurations de résonances mais aucune d'elles n'a jusqu'alors envisagé de construire un critère de design de la raideur nonlinéaire caractérisant l'attache et permettant de garantir un fonctionnement efficace et robuste du phénomène de pompage énergétique. La présente étude tente d'apporter un nouvel éclairage à ce propos en définissant un critère de design optimal dans le cadre d'un oscillateur linéaire amorti couplé à un NES.

2 Étude analytique exemple académique

Modèle considéré

On considère ici un système mécanique constitué d'un oscillateur linéaire couplé à une masse auxiliaire via un attachement à nonlinéarité cubique illustré en Fig. 1 et régi par :

$$\begin{cases} M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{x}) + k(y - x)^3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Approche analytique : Complexification et Échelles multiples

Après adimensionnalisation et changement de variable $v_0 = x + \epsilon y$; $v_1 = x - y$, on obtient des équations à l'ordre d'approximation $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\begin{cases} (\ddot{v}_0 + \omega_0^2 v_0) + \epsilon [\lambda_0 \dot{v}_0 - \omega_0^2 (v_0 - v_1)] = 0 \\ (\ddot{v}_1 + \omega_0^2 v_1) + \lambda \dot{v}_1 + \omega_0^2 (\Omega v_1^3 + v_0 - v_1) + \epsilon (\lambda_0 \dot{v}_0 + \lambda \dot{v}_1 + \Omega \omega_0^2 v_1^3) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

1. Ce travail a été financé dans le cadre du projet ANR-07-BLAN-0193 ADYNO

où $\epsilon = \frac{m}{M} \ll 1$ est homogène à un ratio de masse et $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$, $\epsilon\lambda_0 = \frac{C}{M}$, $\lambda = \frac{c}{m}$, $\Omega = \frac{k}{m\omega_0^2}$ sont les caractéristiques modales de l'oscillateur.

Une complexification de Manevitch [3] est introduite via les relations :

$$\varphi_0 e^{i\omega_0 t} = \frac{\dot{v}_0}{\omega_0} + iv_0; \quad \varphi_1 e^{i\omega_0 t} = \frac{\dot{v}_1}{\omega_0} + iv_1 \quad (3)$$

suivie d'une analyse aux échelles multiples qui donne une approximation des amplitudes lentes complexifiées en ne retenant que les termes séculaires :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} \xi_0 \varphi_{00} + \frac{i}{2} (\varphi_{00} - \phi_{10}) &= 0 \\ \frac{1}{2} \xi \phi_{10} + \frac{i}{2} (\phi_{10} - \varphi_{00}) - \frac{3i}{4} \Omega |\phi_{10}|^2 \phi_{10} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

avec $\phi_{10}(\tau_1, \dots) = \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \varphi_{10}(\tau_0, \tau_1, \dots)$ qui représente la tendance moyenne de φ_{10} .

Un passage en polaires met en évidence les échanges énergétiques entre modes de vibration nonlinéaires :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial Z_0}{\partial \tau_1} &= -\xi_0 Z_0 - \xi Z_1 \\ Z_0 &= Z_1 \left[\xi^2 + \left(1 - \frac{3}{4} Z_1 \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5)$$

où $Z_0 = \Omega |\varphi_{00}|^2$ et $Z_1 = \Omega |\phi_{10}|^2$ représentent les niveaux moyens d'énergie des modes d'ensemble et interne. Le taux de dissipation énergétique du mode d'ensemble est équivalent à la somme de sa propre énergie et de celle du mode interne pré-multipliés par les coefficients d'amortissement respectifs. La relation énergétique entre les modes ne dépend que du coefficient d'amortissement ξ du NES mais pas de l'amortissement ξ_0 du système maître ce qui permet de négliger la contribution de ξ_0 dans (5). Le problème de design optimal du NES est abordé en exploitant les relations (5) d'échanges énergétiques entre les modes d'ensemble et interne.

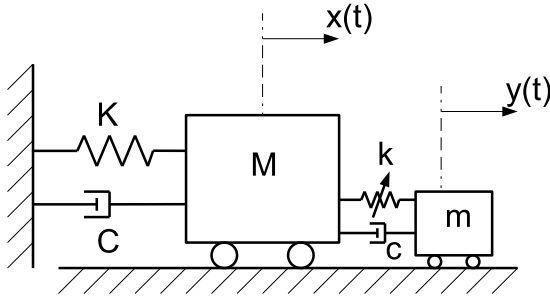


FIGURE 1 – Structure linéaire couplée à un NES

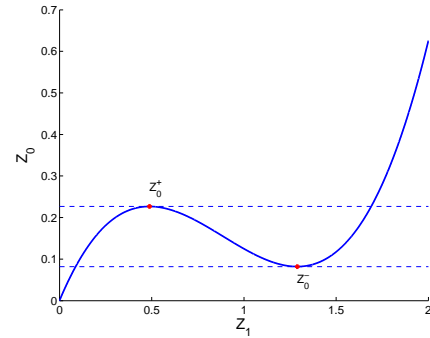


FIGURE 2 – Relation énergétique entre modes d'ensemble et interne avec $\xi = 0.25$

3 Méthode de design optimal

Scénarios de transfert énergétique et raideur optimale

En différenciant la deuxième équation du système (5)

$$\frac{dZ_0}{dZ_1} = \frac{9}{16} Z_1^2 - 3Z_1 + (1 + \xi^2) \quad (6)$$

Il est possible de prouver l'existence d'un intervalle d'amortissement $\xi \in [0, \xi_{max} = \sqrt{1/3}]$ pour lequel l'énergie Z_1 possède de multiples racines fonctions de Z_0 correspondant à un saut brusque de l'énergie relative Z_1 comme le montre la Fig. 2. La courbe présente alors deux extrema donnés par :

$$\begin{aligned} \text{maximum} : Z_1^+ &= \frac{4}{9}(2 - \gamma); & Z_0^+ &= \frac{8}{81} [4 - \gamma^2(3 - \gamma)] \\ \text{minimum} : Z_1^- &= \frac{4}{9}(2 + \gamma); & Z_0^- &= \frac{8}{81} [4 - \gamma^2(3 + \gamma)]; & \gamma &= \sqrt{1 - 3\xi^2} \end{aligned} \quad (7)$$

et définissant une zone de dissipation efficace par transfert énergétique. En réalité, la variable Z_1 ne représente que la tendance moyenne de l'énergie relative qui pilote le taux de dissipation de l'énergie centrale (voir Eq. (5)). Par conséquent, un saut brusque de Z_1 implique un taux de dissipation très petit et on peut dire que l'occurrence de ce saut marque la fin de l'efficacité du pompage énergétique. En supposant une probable continuité de Z_1 avant et après le saut, l'évolution de cette tendance moyenne de l'énergie relative peut être décrite par l'intégrale première :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} \frac{dZ_1}{d\tau_1} &= -\frac{\xi Z_1}{\frac{27}{16} Z_1^2 - 3Z_1 + (1 + \xi^2)} \\ \Rightarrow f(Z_1) &= \frac{27}{32} Z_1^2 - 3Z_1 + (1 + \xi^2) \ln(Z_1) = C - \omega_0 \xi \tau_1 \end{aligned} \quad (8)$$

Selon les conditions initiales choisies, la relation énergétique va suivre soit la branche supérieure, soit la branches intermédiaire (instable) soit la branche inférieure. Les différents scénarios possibles sont illustrés en Fig. 3.

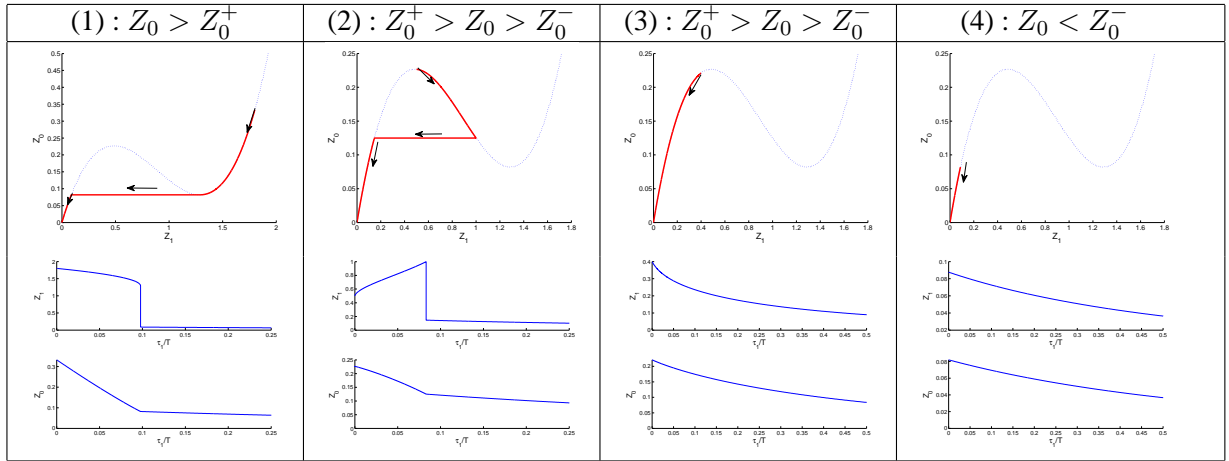


FIGURE 3 – Multiples scénarios de transfert énergétique

Une étude approfondie des scénarios de la Fig. 3 montre que le 3^{ème} et le 4^{ème} ne sont pas du tout efficace, le 2^{ème} est comparativement plus efficace mais instable ; au final seul le 1^{er} scénario se révèle intéressant. En fait, quand Z_0 est proche de Z_0^+ par valeurs supérieures, la relation d'échange énergétique va être attirée par la branche supérieure mais la faible dynamique du système fait que la solution n'a pas réellement le temps d'atteindre cette branche et rejoint en chemin soit la branche intermédiaire, soit la branche inférieure qui correspondent aux scénarios 3 et 4. En résumé, le critère de design optimal pour lequel efficacité et robustesse du pompage sont exigés correspond au scénario 1 :

$$\Omega E_0 = Z_0 > Z_0^+ = \frac{8}{81} \left[4 - (1 - 3\xi^2) \left(3 - \sqrt{1 - 3\xi^2} \right) \right] \quad (9)$$

associé à la valeur de raideur nonlinéaire optimale

$$k > k_{opt} = \Omega_{opt} m \omega_0^2 = \frac{8}{81} \frac{m \omega_0^2}{E_0^{init}} \left[4 - (1 - 3\xi^2) \left(3 - \sqrt{1 - 3\xi^2} \right) \right] \quad (10)$$

Influence de l'énergie initiale - Énergie d'activation

Le critère (9) permet de définir une énergie d'activation dépendant de la raideur nonlinéaire k du NES :

$$E_{act} = \frac{8}{81} \frac{m \omega_0^2}{k} \left[4 - (1 - 3\xi^2) \left(3 - \sqrt{1 - 3\xi^2} \right) \right] \quad (11)$$

Lorsque $E_0^{init} > E_{act}$, le NES est actif et il est possible de calculer le taux de chute et la durée efficace du pompage énergétique :

$$\begin{aligned} P_{drop} &= 1 - \frac{Z_0^-}{Z_0^{init}} = 1 - \frac{8}{81} \frac{4 - \gamma^2(3 + \gamma)}{\Omega E_0^{init}} \\ \epsilon T_{pump} &= \frac{1}{2\pi\xi} [f(Z_1^{init}) - f(Z_1^-)] \end{aligned} \quad (12)$$

L'accroissement de E_0^{init} a pour effet d'augmenter le taux de chute mais aussi d'allonger la durée du pompage. Par conséquent, pour obtenir un pompage énergétique efficace, l'énergie initiale doit être supérieure à l'énergie d'activation (11) mais pas trop au risque de dégrader les performances liées au temps de chute.

3.1 Influence de l'amortissement du NES

Considérons maintenant le cas optimal où l'énergie initiale se situe juste au dessus du seuil d'énergie d'activation du pompage. Le taux et la durée de chute se simplifient selon les expressions :

$$P_{drop} = 1 - \frac{Z_0^-}{Z_0^+} = \frac{(1 - 3\xi^2)^{3/2}}{4 - (1 - 3\xi^2)(3 - \sqrt{1 - 3\xi^2})} \quad (13)$$

$$\epsilon T_{pump} = \frac{1}{2\pi\xi} \left[\frac{4}{3} \sqrt{1 - 3\xi^2} - (1 + \xi^2) \log \frac{2 + \sqrt{1 - 3\xi^2}}{2 - \sqrt{1 - 3\xi^2}} \right]$$

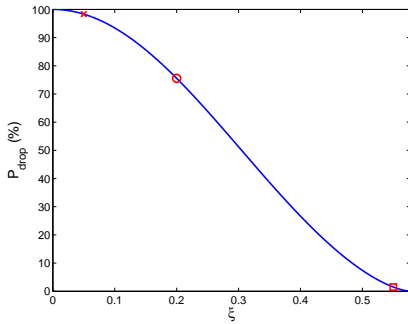


FIGURE 4 – Taux de chute P_{drop}

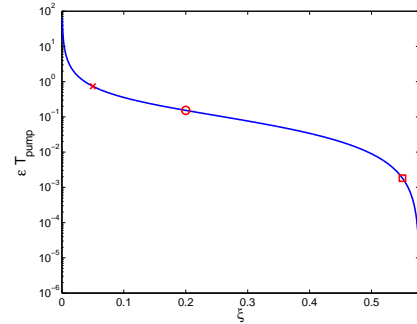


FIGURE 5 – Durée de pompage T_{pump}

L'influence de l'amortissement ξ donnée par les Figs. 4 et 5 permettent de retrouver qualitativement le compromis nécessaire entre énergie et temps. Lorsque ξ tend vers 0, la durée de pompage va augmenter très vite vers l'infinie et au contraire, quand ξ s'approche de la limite $\sqrt{1/3}$, le pompage énergétique est quasi-inefficace avec $P_{drop} \simeq 0$.

3 points de fonctionnement sont donnés à titre d'exemple :

point \times	: $\xi = 0.05$;	$P_{drop} = 98.3\%$;	$\epsilon T_{pump} = 0.74$;
point o	: $\xi = 0.2$;	$P_{drop} = 75.5\%$;	$\epsilon T_{pump} = 0.15$;
point \square	: $\xi = 0.55$;	$P_{drop} = 1.5\%$;	$\epsilon T_{pump} = 0.002$;

En résumé, le choix de l'amortissement du NES est crucial pour effectuer un design efficace qui mérite d'être approfondi.

4 Robustesse du critère de design

Des simulations numériques sont réalisées d'une part sur le modèle initial (1) et les résultats sont comparés avec les tendances de chutes énergétiques obtenues analytiquement. La robustesse du critère optimal est vérifiée par comparaison avec le régime libre de l'oscillateur amorti seul. L'influence de l'amortissement du NES et de l'énergie initiale est étudiée.

Choix des paramètres du système

Oscillateur principal : $M = 1 \text{ kg}$; $\xi_0 = 1 \text{ } \epsilon$; $K = 4\pi^2 \text{ Kg/m}$ correspondant à une fréquence propre $f_0 = 1 \text{ Hz}$,

NES : ratio de masse $\epsilon = 1\%$, amortissement du NES ξ fixé au choix à la valeur $\xi = 0.2$ ou $\xi = 0.05$,

Conditions initiales : $x_0 = 0 \text{ m}$; $\dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s} \Rightarrow E_0^{init} = \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2} + x_0^2 = 2.5e - 4 \text{ m}^2$.

La raideur nonlinéaire optimale donnée en appliquant le critère (10) est :

$$k_{min} = \frac{8}{81} \frac{m\omega_0^2}{E_0^{init}} \left[4 - (1 - 3\xi^2) \left(3 - \sqrt{1 - 3\xi^2} \right) \right] = \begin{cases} 336 \text{ Kg/m}^3 & \text{pour } \xi = 0.2 \\ 309 \text{ Kg/m}^3 & \text{pour } \xi = 0.05 \end{cases} \quad (14)$$

Le choix considéré est le suivant : $\begin{cases} k = 400 \text{ Kg/m}^3 & \text{pour } \xi = 0.2 \\ k = 325 \text{ Kg/m}^3 & \text{pour } \xi = 0.05 \end{cases}$

Les simulations numériques sont réalisées pour différentes conditions initiales en vitesse : $\dot{x}_0 = 0.1$, $\dot{x}_0 = 0.09$ et $\dot{x}_0 = 0.2$, le déplacement initial étant fixé à zéro. Pour chaque jeu de paramètres, les énergies modales $E_0 = \frac{(\dot{x} + \epsilon\dot{y})^2}{\omega_0^2} + (x + \epsilon y)^2$ et $E_1 = \frac{(\dot{x} - \dot{y})^2}{\omega_0^2} + (x - y)^2$ sont dessinées en comparaison avec les prédictions analytiques comme illustré en Fig. 6.

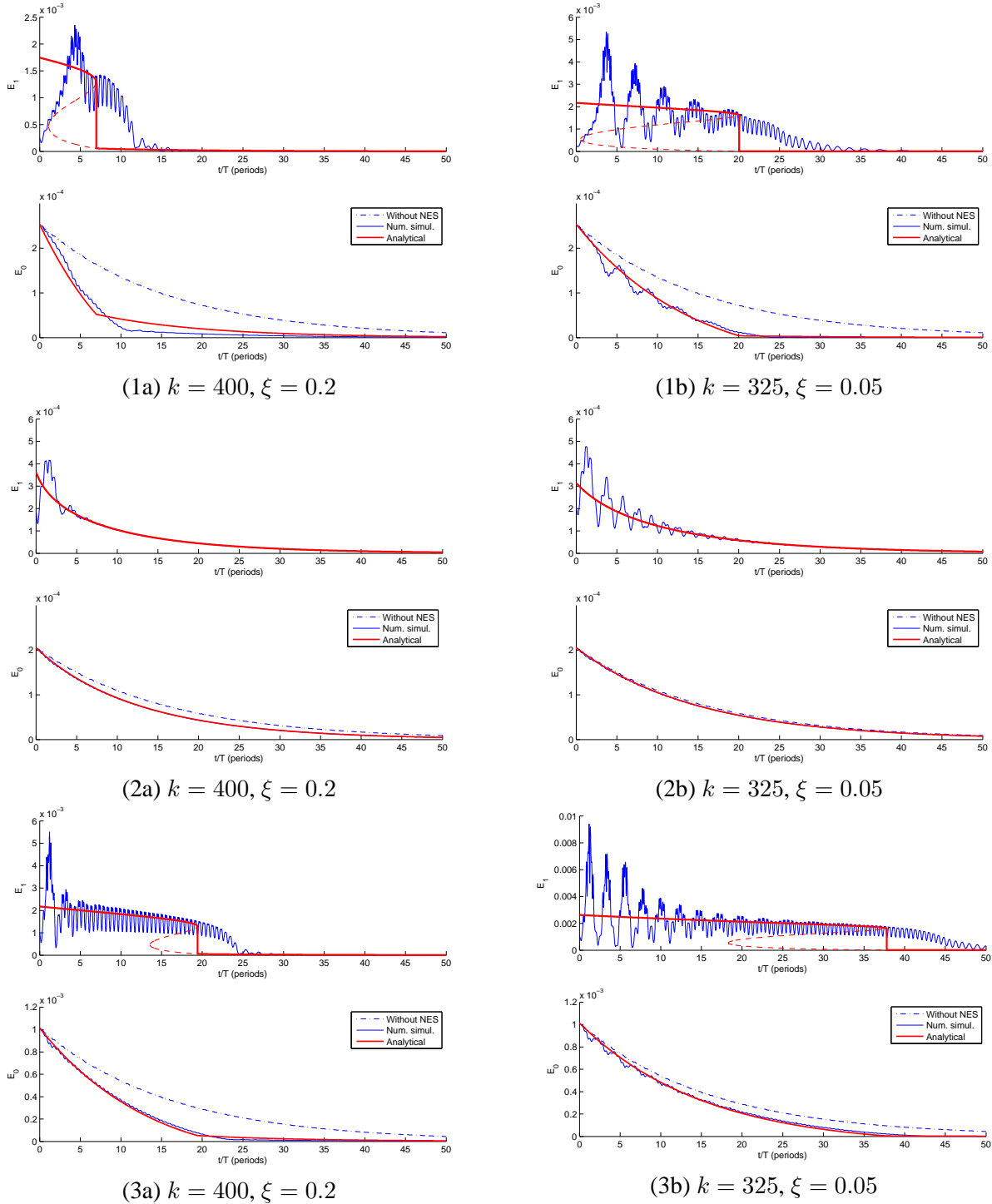


FIGURE 6 – Chutes énergétiques comparées entre résultats numériques (lignes minces) et prédictions analytiques (lignes épaisses) pour différentes conditions initiales : $x_0 = 0$; (1) $\dot{x}_0 = 0.1$; (2) $\dot{x}_0 = 0.09$ et (3) $\dot{x}_0 = 0.2$.

La nette différence entre les figures Figs. 6.1 et 6.2 met en évidence un seuil d'énergie d'activation du pompage énergétique : Pour une énergie initiale inférieure à ce seuil ($\dot{x}_0 = 0.09$) la courbe énergétique du système est presque identique à celle du système sans NES. Quand l'énergie dépasse le seuil d'activation ($\dot{x}_0 = 0.1$), le NES est activé et la chute d'énergie est beaucoup plus rapide que dans le cas libre.

La comparaison des chutes d'énergie pour les valeurs $\xi = 0.2$ (a) et $\xi = 0.05$ (b) met en exergue l'importante influence de l'amortissement sur l'efficacité du pompage énergétique : Ce pompage est plus efficace en aspect de chute d'énergie quand l'amortissement est plus petit ($\xi = 0.05$) et en revanche, il est plus efficace en temps (plus rapide) quand l'amortissement est plus élevé ($\xi = 0.2$).

Le comportement de chute énergétique pour une énergie initiale importante ($\dot{x}_0 = 0.2$) présenté sur la Figure 6.3 souligne aussi l'influence de l'énergie initiale : Le temps de chute est plus long dans ce cas mais le taux de chute est plus efficace quand l'énergie est proche du seuil d'énergie d'activation.

D'autres informations concernant la relation énergétique entre des modes d'ensemble et interne sont aussi obtenues pour ces simulations (voir Fig. 7). Après le régime transitoire, l'évolution de l'énergie est attirée par la relation cubique pilotée par ξ . Il est important de noter l'existence d'un phénomène de relaxation en temps qui empêche l'apparition instantanée d'une bifurcation de la solution associée à un saut de la branche supérieure à la branche inférieure prédite par la solution analytique. Cette relaxation induit des erreurs de prédiction après le saut de Z_1 .

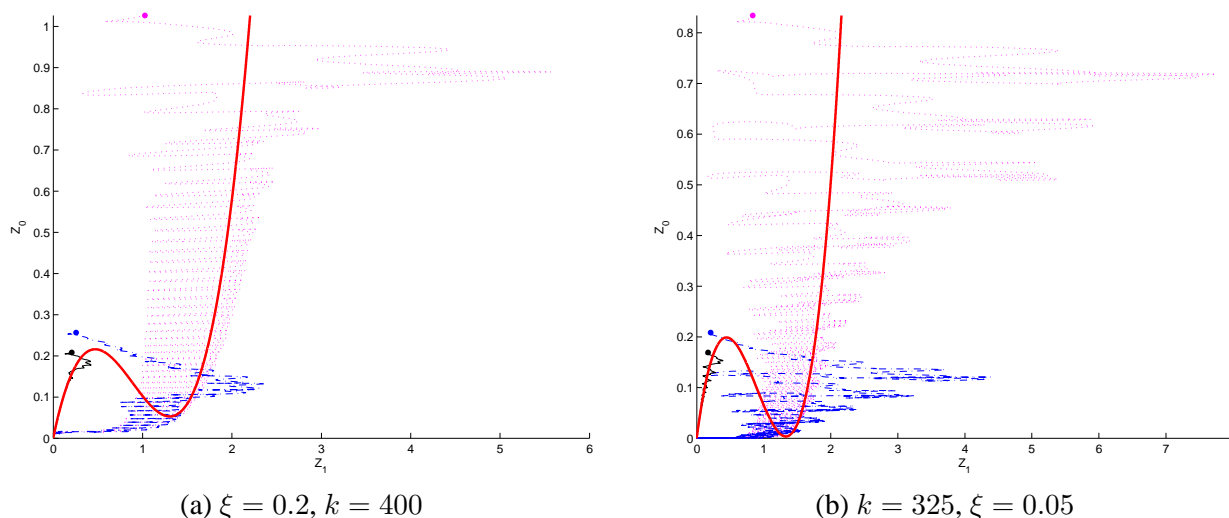


FIGURE 7 – Simulation de la relation énergétique $Z_0 \leftrightarrow Z_1$ pour différentes valeurs de vitesse initiale : $\dot{x}_0 = 0.09$ (ligne solide mince), $\dot{x}_0 = 0.1$ (ligne à tiret), $\dot{x}_0 = 0.2$ (ligne pointillés) en comparaison avec les prédictions analytiques (ligne solide épaisse).

5 Conclusions

Une méthode analytique est proposée pour le design optimal de la raideur d'un absorbeur essentiellement non-linéaire dont le rôle est d'atténuer les vibrations d'un système maître. Le dimensionnement et les simulations numériques attestent de la robustesse du critère proposé et mettent en exergue l'influence crucial du choix de l'amortissement du NES (à optimiser) et de l'énergie initiale en régime libre.

Références

- [1] Gendelman O. Bifurcations of nonlinear normal modes of linear oscillator with strongly nonlinear damped attachment. *Nonlinear Dynamics*, 37(2), 115–128, 2004.
- [2] Gourdon E., Lamarque C., and Pernot S. Contribution to efficiency of irreversible passive energy pumping with a strong nonlinear attachment. *Nonlinear Dynamics*, DOI : 10.107/s11071-007-9229-y, 2004.
- [3] Manevitch L. Complex representation of dynamics of coupled non-linear oscillators. *Dynamics, and Control in Condensed Systems and other media*, Kluwer Academic Press, Plenum Publishers, NY 269-300, 1999.