



**HAL**  
open science

## Transferts thermiques sur parois rugueuses: modèles de surface effective pour des écoulements laminaires

Clément Introïni, Michel Quintard, Fabien Duval

► **To cite this version:**

Clément Introïni, Michel Quintard, Fabien Duval. Transferts thermiques sur parois rugueuses: modèles de surface effective pour des écoulements laminaires. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03390890

**HAL Id: hal-03390890**

**<https://hal.science/hal-03390890>**

Submitted on 21 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Transferts thermiques sur parois rugueuses : modèles de surface effective pour des écoulements laminaires

CLÉMENT INTROÏNI<sup>a,b</sup>, MICHEL QUINTARD<sup>b,c</sup> & FABIEN DUVAL<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN), BP3-13115 Saint-Paul-lez-Durance Cedex

<sup>b</sup>Université de Toulouse ; INPT, UPS ; IMFT, Toulouse, 1 Allée du Pr C. Soula, 31400 Toulouse, France

<sup>c</sup>CNRS ; IMFT -F31400

## Résumé :

Nous proposons des lois de parois s'appliquant sur une surface effective lisse pour des écoulements laminaires anisothermes sur parois rugueuses. Ces lois sont développées dans le cadre d'une méthode de décomposition de domaine à deux échelles et d'une approximation de l'opérateur Dirichlet-Neumann. Les lois proposées sont testées numériquement en comparant les résultats à des simulations tenant compte des rugosités et une discussion est proposée sur le positionnement de la surface effective.

## Abstract :

We propose wall laws prescribed on an homogeneous effective surface describing non-isothermal laminar flows on rough surfaces. These laws are developed in the frame of a domain decomposition method and an approximation of the Dirichlet-Neumann operator. Our wall laws are validated numerically comparing effective results with those of simulations taking roughnesses into account. In addition, we discuss the height of the effective surface.

**Mots clefs :** décomposition de domaine, lois de paroi, surfaces rugueuses, écoulements laminaires

## 1 Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons à des écoulements laminaires avec transferts de chaleur sur parois rugueuses  $\Gamma_w$  décrits, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, par le système suivant :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \beta(T - T_r) \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1b)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_w \quad (1c)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T \quad \text{dans } \Omega \quad (1d)$$

$$(BC1) \quad T = T_w \quad \text{sur } \Gamma_w \quad (1e)$$

$$(BC2) \quad \mathbf{n} \cdot \nabla T = 0 \quad \text{sur } \Gamma_w \quad (1f)$$

où  $\nu$  est la viscosité,  $\beta$  le coefficient d'expansion thermique,  $T_r$  une température de référence et  $\kappa$  la diffusivité thermique. En pratique, la résolution d'un tel système s'avère très coûteuse du fait de la présence des hétérogénéités sur  $\Gamma_w$ . On propose ici de construire des conditions aux limites effectives, ou lois de paroi, imposées sur une surface lisse homogène appelée surface effective modélisant le comportement moyen de la surface hétérogène lorsqu'elle est placée dans les mêmes conditions.

## 2 Construction de lois de paroi par décomposition de domaine

### 2.1 Principe de la méthode

La présence d'hétérogénéités conduit naturellement à considérer deux échelles caractéristiques de longueur distinctes,  $L$  et  $\ell$  associées respectivement au domaine  $\Omega$  et aux rugosités. Du fait de cette séparation d'échelles, on peut décomposer le domaine initial  $\Omega$  en deux sous-domaines comme le montre la figure FIG.1. D'une part un sous-domaine  $\Omega_2$  où les grandeurs varient significativement suivant l'échelle caractéristique  $\ell$  et au sein duquel les rugosités sont contenues. D'autre part, un sous-domaine  $\Omega_1$  au sein duquel les perturbations liées aux hétérogénéités sont entièrement amorties et où les grandeurs varient significativement suivant  $L$ . Nous notons  $\Gamma_0$  la surface fictive de séparation des sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Les parois latérales et supérieures sont

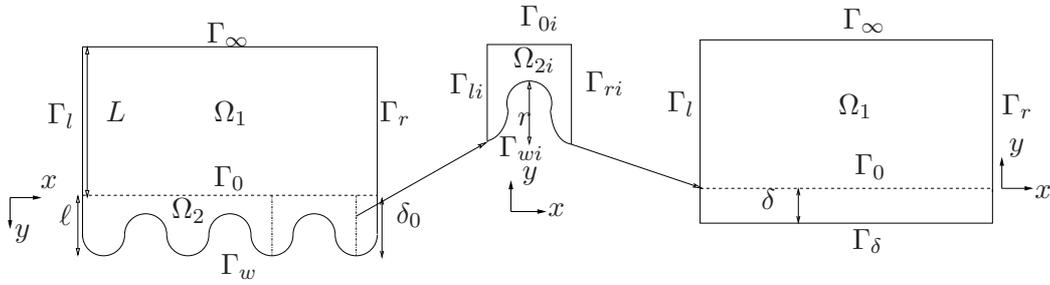


FIG. 1 – Décomposition de domaine

notées respectivement  $\Gamma_l$ ,  $\Gamma_r$  et  $\Gamma_\infty$ . Avec ces notations (cf. FIG.1), le système d'EDPs initial (1) s'écrit dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sous la forme :

– **Problème dans  $\Omega_1$**

$$\mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \nabla p_1 = \nu \nabla^2 \mathbf{u}_1 - \beta(T_1 - T_r) \mathbf{g} \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (2b)$$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \nabla T_1 = \kappa \nabla^2 T_1 \quad \text{dans } \Omega_1 \quad (2c)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (2d)$$

$$T_1 = T_2 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (2e)$$

– **Problème dans  $\Omega_2$**

$$\nabla p_2 = \nu \nabla^2 \mathbf{u}_2 \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (3b)$$

$$\mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_w \quad (3c)$$

$$\mathbf{u}_2 \cdot \nabla T_2 = \kappa \nabla^2 T_2 \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (3d)$$

$$\mathbf{n} \cdot (-p_2 \mathbf{I} + \nu \nabla \mathbf{u}_2) = \mathbf{n} \cdot (-p_1 \mathbf{I} + \nu \nabla \mathbf{u}_1) \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (3e)$$

$$\mathbf{n} \cdot (-\kappa \nabla T_2) = \mathbf{n} \cdot (-\kappa \nabla T_1) \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (3f)$$

$$\text{(BC1)} \quad T_2 = T_w \quad \text{sur } \Gamma_w \quad (3g)$$

$$\text{(BC2)} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla T_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_w \quad (3h)$$

où,  $\mathbf{u}_i$ ,  $p_i$  et  $T_i$  désignent respectivement la vitesse, la pression et la température dans  $\Omega_i$ . Nous avons supposé que l'écoulement dans  $\Omega_2$  pouvait être correctement décrit par les équations de Stokes. La relation  $\text{Re}_\ell \sim \epsilon \text{Re}_L$  mettant en jeu le rapport des échelles de longueur  $\epsilon = \ell/L$  ainsi que le nombre de Reynolds local  $\text{Re}_\ell$  et global  $\text{Re}_L$  justifient cette approximation qui, en pratique, permet de couvrir une large gamme d'écoulements laminaires dans  $\Omega_1$  [1]. De la même manière, on suppose ici que l'on peut négliger le terme de couplage  $\beta(T_2 - T_r) \mathbf{g}$  dans  $\Omega_2$  à partir de la relation  $\text{Ra}_\ell \sim \epsilon^3 \text{Ra}_L$  mettant en jeu le nombre de Rayleigh local  $\text{Ra}_\ell$  et global  $\text{Ra}_L$ . Contrairement à certaines méthodes de décomposition de domaines, notre objectif n'est pas de résoudre le problème couplé (2)-(3) mais de construire une approximation de l'opérateur Dirichlet-Neumann sur la base d'estimateurs des champs de vitesse, de pression et de température dans  $\Omega_2$  afin d'obtenir un système d'EDPs fermé pour  $\mathbf{u}_1$ ,  $p_1$  et  $T_1$  dans  $\Omega_1$ .

La première étape consiste à décomposer chacun des champs en la somme d'un terme 'macroscopique' et d'une déviation :

$$p_2 = p_1 + \tilde{p}_2 \quad (4a)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + \tilde{\mathbf{u}}_2 \quad (4b)$$

$$T_2 = T_1 + \tilde{T}_2 \quad (4c)$$

Les décompositions (4) peuvent être assimilées à une décomposition des échelles dans le sens où les termes macroscopiques varient significativement suivant l'échelle caractéristique de longueur  $L$  et les termes de déviations suivant  $\ell$  [2]. A ce niveau, il reste à définir les termes  $\mathbf{u}_1$ ,  $p_1$  et  $T_1$  dans le sous-domaine  $\Omega_2$ .

## 2.2 Loi de paroi pour le problème de l'écoulement

Les champs de vitesse  $\mathbf{u}_1$  et de pression  $p_1$  de la décomposition (4) sont estimés dans  $\Omega_2$  à partir d'un développement de Taylor dans la direction normale à la surface fictive  $\Gamma_0$  :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} + y\partial_y\mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} + \frac{y^2}{2}\partial_{yy}^2\mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} + \dots \quad (5a)$$

$$p_1 = p_1|_{\Gamma_0} + y\partial_y p_1|_{\Gamma_0} + \frac{y^2}{2}\partial_{yy}^2 p_1|_{\Gamma_0} + \dots \quad (5b)$$

Les développements (5) peuvent être vus comme des développements asymptotiques [1] où le rapport des échelles de longueur  $\epsilon = \ell/L$  joue le rôle de petit paramètre. A partir de la décomposition de domaine à deux échelles précédemment introduite et, de manière analogue aux méthodes de changement d'échelle pour les milieux hétérogènes [2], les termes macroscopiques varient significativement suivant l'échelle de longueur  $L$  tandis que les termes de déviation varient significativement suivant  $\ell$ . Désormais, il est légitime d'associer la notion d'ordre pour les lois de paroi à l'exposant du petit paramètre  $\epsilon$ . Dans ce contexte et dans le cadre du développement d'une loi de paroi d'ordre  $n$ , nous considérons uniquement les termes dont l'ordre de grandeur est au plus  $n$ . Nous exposons ici les développements conduisant à une loi de paroi d'ordre un.

En tenant compte du fait que dans  $\Omega_2$  et en particulier sur  $\Gamma_0$ , l'écoulement est gouverné par les équations de Stokes, la substitution des développements (5) dans le système d'EDPs (3) pour l'écoulement et l'utilisation des décompositions (4) conduisent au problème suivant :

$$y\partial_x\partial_y p_1|_{\Gamma_0} \mathbf{e}_1 + \nabla\tilde{p}_2 = \nu \left( \nabla^2\tilde{\mathbf{u}}_2 + \partial_{yy}^2\mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} + y\partial_{xx}^2\partial_y\mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} \right) \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (6a)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_2 = -y\partial_x\partial_y\mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (6b)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_2 = -\mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} - y\partial_y\mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} \quad \text{sur } \Gamma_w \quad (6c)$$

$$(-\tilde{p}_2\mathbf{I} + \nu\nabla\tilde{\mathbf{u}}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (6d)$$

Chaque terme du système (6) peut être estimé par une analyse des ordres de grandeurs. La condition d'adhérence (3c) et la relation (4b) conduisent à la relation  $\mathcal{O}(\tilde{\mathbf{u}}_2) \sim \mathcal{O}(\mathbf{u}_1)$ . Ainsi la relation (6d) donne  $\mathcal{O}(\tilde{p}_2) \sim \mathcal{O}(\nu\mathbf{u}_1/\ell)$ . Dans le cadre du développement d'une loi de paroi d'ordre un, les termes dont l'ordre de grandeur est au plus  $\mathcal{O}(\epsilon)$  sont conservés. Dans ces conditions, le problème aux limites devient :

$$\nabla\tilde{p}_2 = \nu\nabla^2\tilde{\mathbf{u}}_2 \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (7a)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (7b)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_2 = -\mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} - y\partial_y\mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} \quad \text{sur } \Gamma_w \quad (7c)$$

$$(-\tilde{p}_2\mathbf{I} + \nu\nabla\tilde{\mathbf{u}}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (7d)$$

Le problème aux limites mixte (7) met en jeu des termes de déviation et des termes sources macroscopiques et sa résolution reste encore très coûteuse. En nous inspirant des techniques de changement d'échelle en milieux hétérogènes [2], les déviations peuvent être représentées par des combinaisons linéaires des termes sources à l'origine des déviations à l'échelle locale. Le problème mixte (7) conduit à rechercher des approximations de la forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} + \mathbf{B} \cdot \partial_y\mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} \quad (8a)$$

$$\tilde{p}_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} + \mathbf{b} \cdot \partial_y\mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} \quad (8b)$$

où  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont appelées variables de fermeture. En substituant les approximations (8) dans le problème mixte (7) et en notant  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ ,  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T$ , les variables de fermeture sont solutions de quatre problèmes aux limites locaux suivants, appelés problèmes de fermeture :

- **Problem Ia** ( $\mathbf{u}_1|_{\Gamma_0}$ ) :

$$\nabla a_1 = \nu\nabla\mathbf{a}_1 \quad \text{dans } \Omega_{2_i} \quad (9a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a}_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_{2_i} \quad (9b)$$

$$\mathbf{a}_1|_{\Gamma_{l_i}} = \mathbf{a}_1|_{\Gamma_{r_i}} \quad (9c)$$

$$a_1|_{\Gamma_{l_i}} = a_1|_{\Gamma_{r_i}} \quad (9d)$$

$$\mathbf{a}_1 = -\mathbf{e}_1 \quad \text{sur } \Gamma_{w_i} \quad (9e)$$

$$(-a_1 + \nu\nabla\mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{0_i} \quad (9f)$$

- **Problème Ib** ( $\mathbf{u}_1|_{\Gamma_0}$ ) :

$$\nabla a_2 = \nu\nabla\mathbf{a}_2 \quad \text{dans } \Omega_{2_i} \quad (10a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a}_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_{2_i} \quad (10b)$$

$$\mathbf{a}_2|_{\Gamma_{l_i}} = \mathbf{a}_2|_{\Gamma_{r_i}} \quad (10c)$$

$$a_2|_{\Gamma_{l_i}} = a_2|_{\Gamma_{r_i}} \quad (10d)$$

$$\mathbf{a}_2 = -\mathbf{e}_2 \quad \text{sur } \Gamma_{w_i} \quad (10e)$$

$$(-a_2 + \nu\nabla\mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{0_i} \quad (10f)$$

- **Problem IIa** ( $\partial_y \mathbf{u}_1|_{\Gamma_0}$ ) :

$$\nabla b_1 = \nu \nabla^2 \mathbf{b}_1 \quad \text{dans } \Omega_{2_i} \quad (11a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b}_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega_{2_i} \quad (11b)$$

$$\mathbf{b}_1|_{\Gamma_{l_i}} = \mathbf{b}_1|_{\Gamma_{r_i}} \quad (11c)$$

$$b_1|_{\Gamma_{l_i}} = b_1|_{\Gamma_{r_i}} \quad (11d)$$

$$\mathbf{b}_1 = -y \mathbf{e}_1 \quad \text{sur } \Gamma_{w_i} \quad (11e)$$

$$(-b_1 + \nu \nabla b_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{0_i} \quad (11f)$$

- **Problème IIb** ( $\partial_y \mathbf{u}_1|_{\Gamma_0}$ ) :

$$\nabla b_2 = \nu \nabla^2 \mathbf{b}_2 \quad \text{dans } \Omega_{2_i} \quad (12a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b}_2 = 0 \quad \text{dans } \Omega_{2_i} \quad (12b)$$

$$\mathbf{b}_2|_{\Gamma_{l_i}} = \mathbf{b}_2|_{\Gamma_{r_i}} \quad (12c)$$

$$b_2|_{\Gamma_{l_i}} = b_2|_{\Gamma_{r_i}} \quad (12d)$$

$$\mathbf{b}_2 = -y \mathbf{e}_2 \quad \text{sur } \Gamma_{w_i} \quad (12e)$$

$$(-b_2 + \nu \nabla b_2) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{0_i} \quad (12f)$$

On remarque que le domaine d'étude a été restreint à des cellules  $\Omega_{2_i}$  que nous supposons périodiques. En effet, en pratique la structure quasi-périodique de la surface hétérogène nous amène à supposer que les termes de déviations sont périodiques ce qui n'est à priori pas le cas des termes macroscopiques. De ce fait, nous avons imposé des conditions de périodicité sur les parois latérales des cellules  $\Omega_{2_i}$ . Les problèmes de fermeture **Ia** et **Ib** ayant pour couple de solutions triviales  $(-\mathbf{e}_1, 0)$  et  $(-\mathbf{e}_2, 0)$  nous en déduisons  $(\mathbf{A}, \mathbf{a}) = (-\mathbf{I}, 0)$ . Par ailleurs, dans le cas lisse homogène le problème **II** a pour solution triviale  $\mathbf{B} = \delta_0 \mathbf{I}$  où  $\delta_0$  est la hauteur de la cellule  $\Omega_{2_i}$ .

A ce niveau, sur la base des estimateurs de vitesse et de pression dans  $\Omega_2$ , il est possible de construire un problème fermé pour  $u_1$  et  $p_1$  dans  $\Omega_1$  à partir de la condition de raccord (2d). A partir des représentations proposées pour les déviations, la condition de raccord (2d) conduit à la loi de paroi d'ordre un suivante :

$$-\nu \mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} = -\nu \mathbf{B} \cdot \partial_y \mathbf{u}_1|_{\Gamma_0} \quad (13)$$

Dans le cadre d'une loi de paroi d'ordre un, nous pouvons montrer que la moyenne de la projection sur  $\Gamma_{0_i}$  du vecteur  $\mathbf{b}_1$  est nulle et que la composante normale du gradient de vitesse sur  $\Gamma_0$  peut être négligé [1]. Par ailleurs, on peut constater que la surface fictive  $\Gamma_0$  n'influe pas sur l'expression des lois de paroi mais sur le calcul des coefficients effectifs en raison de leur variabilité. Nous choisissons ici de positionner  $\Gamma_0$  de telle sorte que les perturbations liées aux rugosités soient entièrement amorties. En d'autres termes, la hauteur fictive notée  $\delta_0$  est le lieu des points où les variations des variables de fermetures sont négligeables. Dans ces conditions, la loi de paroi se réécrit sous la forme :

$$-\nu u_1|_{\Gamma_0} = -\nu b_{11} \partial_y u_1|_{\Gamma_0} \quad (14a)$$

$$-\nu v_1|_{\Gamma_0} = 0 \quad (14b)$$

Nous proposons ici de définir une surface effective  $\Gamma_\delta$  sur laquelle nous prolongeons par un développement de Taylor la loi de paroi définie sur  $\Gamma_0$ . La loi de paroi sur la surface effective  $\Gamma_\delta$  s'écrit :

$$-\nu u_1|_{\Gamma_\delta} = -\nu (b_{11} - \delta) \partial_y u_1|_{\Gamma_\delta} \quad (15a)$$

$$-\nu v_1|_{\Gamma_\delta} = 0 \quad (15b)$$

où  $b_{11} \geq \delta$  pour que le problème aux limites (2) pour l'écoulement muni de la loi de paroi (15) soit bien posé. Ainsi, la surface effective  $\Gamma_\delta$  doit être placée à une distance  $\delta \in [0, b_{11}]$  de  $\Gamma_0$ . Dans le cas où  $\Gamma_\delta$  est positionnée en  $\delta = b_{11}$ , la loi de paroi (15) se réduit ainsi à une simple condition d'adhérence. En revanche, ce choix ne permet pas dans certains cas de s'affranchir totalement de l'échelle locale. Par exemple, pour une surface mettant en jeu une partie lisse homogène et une zone rugueuse, cette approche conduit à la prise en compte d'une "marche" de longueur caractéristique  $\ell$  dans la zone de transition lisse-rugueux [3].

### 2.3 Loi de paroi pour le problème de thermique

Comme pour le problème de l'écoulement, le champ de température  $T_1$  de la décomposition (4) est estimé dans  $\Omega_2$  à partir d'un développement de Taylor dans la direction normale à la surface fictive  $\Gamma_0$  :

$$T_1 = T_1|_{\Gamma_0} + y \partial_y T_1|_{\Gamma_0} + y^2 \partial_{yy}^2 T_1|_{\Gamma_0} + \dots \quad (16)$$

La substitution de la décomposition (4c) et de la relation (16) dans le système d'EDPs (3) pour la température conduit au système suivant :

$$\mathbf{u} \cdot \left( \nabla \tilde{T}_2 + \nabla T_1|_{\Gamma_0} \right) + y \partial_x \partial_y T_1|_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1 = \kappa \nabla^2 \tilde{T}_2 + \kappa \partial_{xx}^2 T_1|_{\Gamma_0} + y \partial_{xx}^2 \partial_y T_1|_{\Gamma_0} \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (17a)$$

$$(BC1) \quad \tilde{T}_2 + T_1|_{\Gamma_0} + y \partial_y T_1|_{\Gamma_0} = T_w \quad \text{sur } \Gamma_w \quad (17b)$$

$$(BC2) \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{T}_2 + \mathbf{n} \cdot \nabla T_1|_{\Gamma_0} + y \partial_x \partial_y T_1|_{\Gamma_0} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_w \quad (17c)$$

$$-\mathbf{n} \cdot \kappa \nabla \tilde{T}_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (17d)$$

Le problème d'advection-diffusion de température est vérifié dans  $\Omega_2$  et en particulier sur  $\Gamma_0$ . De fait, à partir de l'estimation standard  $\mathcal{O}(\tilde{T}_2) \sim \mathcal{O}((T_1 - T_w)/\ell)$  de l'ordre de grandeur des déviations de température dans  $\Omega_2$ , on peut montrer que le système (17) se simplifie à l'ordre un sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}_2 \cdot \nabla \tilde{T}_2 = \kappa \nabla^2 \tilde{T}_2 \quad \text{dans } \Omega_2 \quad (18a)$$

$$(BC1) \quad \tilde{T}_2 + T_1|_{\Gamma_0} + y \partial_y T_1|_{\Gamma_0} = T_w \quad \text{sur } \Gamma_w \quad (18b)$$

$$(BC2) \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \tilde{T}_2 + \mathbf{n} \cdot \nabla T_1|_{\Gamma_0} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_w \quad (18c)$$

$$-\mathbf{n} \cdot \kappa \nabla \tilde{T}_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (18d)$$

Ici encore, le problème mixte (18) conduit à rechercher une approximation du terme de déviation de température sous la forme :

$$\tilde{T}_2 = d \left( T_1|_{\Gamma_0} - T_w \right) + e \partial_y T_1|_{\Gamma_0} \quad (19)$$

La substitution de (19) dans (18) conduit aux problèmes aux limites locaux suivants pour les variables de fermeture  $d$  et  $e$  :

- **Problem III** ( $T_1|_{\Gamma_0} - T_w$ ) :

$$\mathbf{u}_2 \cdot \nabla d = \kappa \nabla^2 d \quad \text{dans } \Omega_{2i} \quad (20a)$$

$$d|_{\Gamma_{l_i}} = d|_{\Gamma_{r_i}} \quad (20b)$$

$$(BC1) \quad d = -1 \quad \text{sur } \Gamma_{wi} \quad (20c)$$

$$(BC2) \quad \mathbf{n} \cdot \nabla d = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{wi} \quad (20d)$$

$$-\mathbf{n} \cdot \kappa \nabla d = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{0i} \quad (20e)$$

- **Problem IV** ( $\partial_y T_1|_{\Gamma_0}$ ) :

$$\mathbf{u}_2 \cdot \nabla e = \kappa \nabla^2 e \quad \text{dans } \Omega_{2i} \quad (21a)$$

$$e|_{\Gamma_{l_i}} = e|_{\Gamma_{r_i}} \quad (21b)$$

$$(BC1) \quad e = -y \quad \text{sur } \Gamma_{wi} \quad (21c)$$

$$(BC2) \quad \mathbf{n} \cdot \nabla e = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 \quad \text{sur } \Gamma_{wi} \quad (21d)$$

$$-\mathbf{n} \cdot \kappa \nabla e = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{0i} \quad (21e)$$

Notons que le domaine d'étude a également été restreint à des cellules pseudo-périodiques  $\Omega_{2i}$ . On remarque que  $d = -1$  et  $d = 0$  sont respectivement les solutions triviales du problème de fermeture **III** dans les cas (BC1) et (BC2). Par ailleurs la solution triviale du problème **IV** dans le cas lisse homogène est  $e = \delta_0$  où  $\delta_0$  est la hauteur de la cellule  $\Omega_{2i}$ .

A ce niveau, sur la base des estimateurs du champ de température dans  $\Omega_2$ , il est possible de construire un problème aux limites fermé à partir de la condition de transmission (2e). D'après les représentations proposées pour les déviations, la condition de raccord (2e) conduit à une loi de paroi d'ordre un de type Robin définie sur  $\Gamma_0$ . On définit ici aussi une surface effective  $\Gamma_\delta$  sur laquelle nous prolongeons par un développement de Taylor la loi de paroi définie sur  $\Gamma_0$ . Ainsi, la condition effective définie sur  $\Gamma_\delta$  s'écrit :

$$(BC1) \quad -\kappa \mathbf{n} \cdot \nabla T_1|_{\Gamma_\delta} = h_\delta \left( T_1|_{\Gamma_\delta} - T_w \right) \quad (22a)$$

$$(BC2) \quad -\kappa \mathbf{n} \cdot \nabla T_1|_{\Gamma_\delta} = 0 \quad (22b)$$

où  $h_\delta = \kappa/(e - \delta)$ . Remarquons à nouveau que la surface effective  $\Gamma_\delta$  doit être positionnée à une distance  $\delta \in [0, e]$  de la surface fictive  $\Gamma_0$  pour que le problème (2) pour la température muni de la loi de paroi (22) soit bien posé. On constate également que la condition aux limites effective (22) tend vers une condition de type Dirichlet  $T_1|_{\Gamma_\delta} = T_w$  lorsque  $\delta$  tend vers  $e$ .

### 3 Expérience numérique

Nous testons ici numériquement les lois de paroi d'ordre un pour un problème de convection naturelle. Les calculs sont effectués sur la base d'une application éléments finis de la plate-forme de composants logiciel PELICANS développée à l'IRSN et mise en open-source [4]. Nous reprenons ici le problème de convection naturelle dans une cavité différentiellement chauffée de rapport d'aspect 1 mais en considérant des parois rugueuses. La structure des hétérogénéités est sinusoïdale d'amplitude  $\mathcal{A} = 0.03\text{m}$  et de période  $\mathcal{P} = 2/29\text{m}$ . Nous considérons ici le cas  $\text{Ra} = 10^6$  avec

$$\text{Ra} = \text{Pr} \frac{g\beta(T_h - T_c)H^3}{\nu^2} \quad (23)$$

où  $\text{Pr} = 0.71$  est le nombre de Prandtl,  $\beta = 1/T_r$ ,  $\nu = 5.10^{-4}\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ ,  $g = 9.81\text{m}.\text{s}^{-2}$ ,  $H = 1.06\text{m}$  la hauteur de la cavité et  $T_h - T_c$  le différentiel de température entre les parois latérales. La température de référence est donnée par  $T_r = (T_h + T_c)/2 = 600\text{K}$  et la différence de température est calculée à partir du Rayleigh. Les conditions aux limites pour le calcul de 'DNS' appliquées sur les bords gauche et droit de la cavité correspondent respectivement à des conditions de Dirichlet avec  $T = T_h$  à gauche et  $T = T_c$  à droite

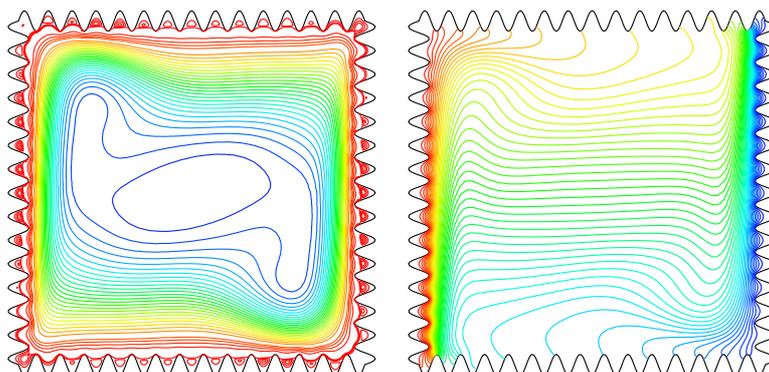
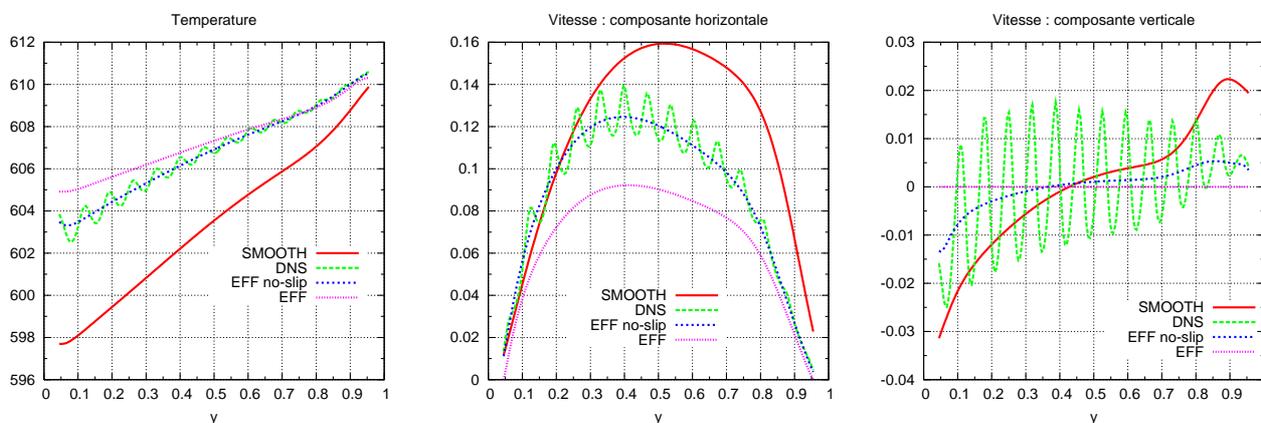


FIG. 2 – Isovaleurs de la fonction de courant (gauche) et de la température (droite) pour le calcul DNS

du domaine. Sur les parois supérieure et inférieure des conditions aux limites de Neumann sont appliquées. Pour la vitesse, on applique une condition d'adhérence sur la totalité des bords. La figure FIG.2, regroupant les isovaleurs de la fonction de courant (gauche) et de la température (droite), illustre l'impact des rugosités sur l'écoulement et sur le champ de température. Contrairement au cas lisse 'SMOOTH', les champs de vitesse et de température dans le cas rugueux 'DNS' sont fortement perturbés comme le montre la figure FIG.3. Les calculs effectifs associés mettent en œuvre l'ensemble des lois de parois d'ordre un précédemment développées. La surface fictive  $\Gamma_0$  est placée en  $\delta_0 = 4A$ . A cette hauteur, les variables de fermeture sont constantes et sont données par  $b_{11} \approx 0.095224686$  et  $d \approx 0.10005342$ . Nous présentons ici deux calculs effectifs avec une surface effective  $\Gamma_\delta$  positionnée en  $\delta_0 - b_{11}$  'EFF no-slip' et  $3A/2$  'EFF'. La figure FIG.3 présente une comparaison des résultats des calculs effectifs avec ceux obtenus dans le cas rugueux et lisse. L'évolution du champ de vitesse et de température à une distance  $x = 3A/2$  de la paroi latérale droite permet de conclure que les conditions aux limites effectives (15) et (22), lorsque la surface effective  $\Gamma_\delta$  est positionnée en  $\delta = \delta_0 - b_{11}$  'EFF no-slip', approchent correctement le comportement moyen du calcul 'DNS'. Ces résultats préliminaires semblent indiquer que, pour ce problème, ce positionnement est optimal. Une étude est en cours sur le positionnement de la surface effective  $\Gamma_\delta$  pour d'autres problèmes et dans le cas de lois de parois d'ordre deux.

FIG. 3 – Comparaison des calculs effectifs (EFF no-slip, EFF) avec les calculs lisse (SMOOTH) et rugueux (DNS) : évolution de la température (gauche) et des composantes horizontale (centre) et verticale (droite) de la vitesse en  $x = 3A/2$  (droite)

## Références

- [1] Achdou Y., Pironneau O., and Valentin F. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *Journal of Computational Physics*, 147, 187–218, 1998.
- [2] Quintard M. and Whitaker S. Transport in ordered and disordered porous media : Volume-averaged equations, closure problems, and comparison with experiment. *Chemical Engineering Science*, 48(14), 2537–2564, 1993. Review Article Number 40.
- [3] Veran S., Aspa Y., and Quintard M. Effective boundary conditions for rough reactive walls in laminar boundary layers. In *International Journal of Heat and Mass Transfer*. accepted, 2008.
- [4] <https://gforge.irsn.fr/gf/project/pelicans/>.