



**HAL**  
open science

## Compétition entre transport et rétention de matière en milieux poreux

Marie-Christine Néel, Maminirina Joelson, Andrea Zoia, Alain Cartalade

### ► To cite this version:

Marie-Christine Néel, Maminirina Joelson, Andrea Zoia, Alain Cartalade. Compétition entre transport et rétention de matière en milieux poreux. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. <hal-03390888>

**HAL Id: hal-03390888**

**<https://hal.science/hal-03390888v1>**

Submitted on 21 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Compétition entre transport et rétention de matière en milieu poreux

M.C.NÉEL<sup>a</sup>, M.JOELSON<sup>a</sup>, A. ZOIA<sup>b</sup>, A. CARTALADE<sup>b</sup>

a. Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse, UMR 1114 EMMAH, F-84018 Avignon, FRANCE

b. DEN-DM2S-SFME-LSET, CEA/Saclay, bât. 454, 91191 Gif sur Yvette Cedex, FRANCE

## Résumé :

*De nombreuses courbes de percée, obtenues en particulier en milieu poreux insaturé avec des traceurs passifs, décroissent comme des puissances du temps. Ce comportement est incompatible avec les lois de Fourier et Fick, par contre il correspond aux solutions d'une vaste classe d'équations aux dérivées partielles, incluant des opérateurs non-locaux en temps. De plus, ces équations représentent la limite macroscopique d'un grand nombre de modèles à petite échelle. Ce résultat, qui a été démontré à l'aide d'une méthode probabiliste dans le cas de paramètres uniformes et constants, est illustré par des simulations numériques dépassant ce cadre.*

## Abstract :

*Many break-through curves, especially with passive tracers in unsaturated porous media, show power-law decrease. Such a behaviour is not compatible with Fick's and Fourier's laws. Nevertheless, it fits a wide class of partial differential equations involving time-non-local mappings. Moreover, that equations are the macroscopic limit of many small-scale models. The result was proved, on the basis of a probabilistic method, in the case where all parameters are constant : it is illustrated numerically by simulations in more general situations.*

**Mots clefs :** dispersion, adsorption, milieux poreux, modèles probabilistes, intégrales fractionnaires

## 1 Introduction

En général, les lois de Fourier et Fick représentent la dispersion, en particulier dans les milieux homogènes. Or des données recueillies dans certains milieux naturels avec certains traceurs, ainsi que dans des processus industriels de filtration, sont plus ou moins incompatibles avec ces modèles. Parmi des situations assez diverses, il y a des phénomènes particulièrement remarquables, qui se signalent par des densités de traceur, ou des flux (de traceur) évoluant comme des puissance (négatives) du temps, au lieu de la décroissance exponentielle attendue dans le cadre des lois de Fourier et Fick. Ces caractères ont en particulier été observés en milieux poreux, au moins dans trois situations. Il y a d'abord des milieux saturés mais très hétérogènes, dans lesquels ces comportements sont assez marqués mais disparaissent aux grands temps [10]. En milieu insaturé, pas forcément très hétérogène (sable) avec un traceur passif, ces comportements semblent au contraire persister [1]. Nous proposons de discuter un modèle qui semble approprié à cette situation. Des milieux saturés, avec des pores et des grains de géométrie complexe, produisent des résultats apparemment similaires avec certaines bactéries [16].

Des version modifiées des lois de Fourier et Fick, introduisant des opérateurs non-locaux en temps, permettent de décrire des densités de traceur évoluant suivant une puissance du temps, et conservant ce comportement aux très grands temps. De telles équations aux dérivées partielles [15] [17] sont des généralisations du modèle "MIM" pour "mobile/immobile medium" [4], dont la version originale a été construite sur l'idée qu'un traceur peut se trouver dans deux phases, mobile et immobile, échangeant de la matière selon une cinétique d'ordre un.

Pour ces équations aux dérivées partielles "fractionnelles", nous présentons des aspects qualitatifs importants de leurs solutions, en vue d'interpréter quelques données existantes mais surtout des données attendues. Un argument important en faveur de ces modèles est qu'il représentent la version macroscopique de nombreux scénarios à petite échelle. En effet, la loi de Fourier régit la densité d'un mouvement Brownien, et ce dernier représente la limite hydrodynamique d'une vaste classe de marches au hasard accumulant des sauts indépendants, de variance finie, séparés par des intervalles de temps pendant lesquels les marcheurs peuvent être advectés s'il y a un champ des vitesses moyen non-nul. Ces intervalles de temps peuvent être identiques, ou bien aléatoires mais indépendants, avec une moyenne finie. On obtient le modèle MIM original ou ses variantes fractionnaires, en introduisant dans ce scénario des temps d'immobilisation aléatoires. Si ces temps ont une moyenne finie, la densité de marcheurs à l'échelle macroscopique suit le modèle "MIM". Par contre s'ils

sont distribués par une loi de probabilité se comportant aux grands temps comme une puissance d'ordre  $-1-\gamma$ , avec  $\gamma < 1$ , la densité de marcheurs est mieux décrite par une version "fractale" de ce modèle [15]. Ceci a été démontré numériquement [17], ainsi que par un raisonnement [12] sous certaines hypothèses, comme des paramètres constants, ou une cinétique d'adsorption uniformément répartie. En fait, le résultat est valable sous des conditions plus larges, comme le montrent des comparaisons mettant en jeu des histogrammes de marches au hasard et des densités de marcheurs calculées en discrétisant les e.d.p incluant des termes non-locaux [12]. Après des précisions nécessaires sur ces modèles et ces marches au hasard, nous présentons ces comparaisons.

## 2 Le modèle MIM

En vue de ces comparaisons, nous utilisons la densité de probabilité  $P(x, t)$  de trouver un marcheur en un point donné  $x$  à un instant donné  $t$ . Dans un milieu poreux, ce n'est pas exactement la concentration, mais on peut relier ces deux grandeurs en utilisant la porosité et la teneur en eau. Le modèle MIM et ses variantes "fractales" permettent de décrire l'évolution de  $P$  en tenant éventuellement compte de phénomènes d'adsorption.

### 2.1 Le modèle MIM original

L'équation aux dérivées partielles [4]

$$\partial_t P(x, t) + \lambda \partial_t P(x, t) = \nabla \cdot (D \nabla P - vP)(x, t) \quad (1)$$

permet de tenir compte d'effets de retard dans l'arrivée d'un traceur en aval d'un puits d'injection. Ici,  $v$  représente la vitesse moyenne ressentie localement par les particules de traceur : c'est la vitesse de pore. Après avoir incorporé de nombreux aménagements, l'équation (1) a eu un grand succès en milieux poreux, mais une autre version semble capable de mieux tenir compte d'effets de mémoire très marqués [7].

### 2.2 Le modèle MIM fractal

Il s'agit de l'équation aux dérivées partielles

$$(Id + \lambda I_{0,+}^{1-\gamma}) \partial_t P(x, t) = \nabla \cdot (D \nabla P - vP)(x, t), \quad (2)$$

introduite par [7] [15]. Avec  $\gamma$  entre 0 and 1, elle contient l'opérateur  $I_{0,+}^{1-\gamma}$ , qui représente la convolution par  $\frac{t^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)}$ , selon la définition suivante [14].

**Definition** L'intégrale fractionnelle d'ordre  $\alpha$ , calculée sur  $[0, t]$ , est  $I_{0,+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-t')^{\alpha-1} f(t') dt'$ .

Le cas limite  $\gamma = 1$  n'est autre que le modèle MIM [4] original (1), et lorsque ce paramètre est plus petit, (2) est sa version "fractale". Ce paramètre a un effet visible sur le comportement asymptotique (aux grands temps) des solutions : quand  $t$  est grand,  $P(x, t)$  est proportionnel à  $t^{-\gamma}$ , comme l'indique la figure 1. C'est facile à démontrer dans un milieu infini à l'aide des transformations de Fourier et Laplace, c'est apparent aussi en domaine borné par simulation numérique. La figure 1 reproduit qualitativement les courbes de percée obtenues par [1] avec un traceur passif en sortie de colonnes remplies de sable insaturé.

Un tel comportement ne s'observe pas pour  $\gamma = 1$ , d'où l'intérêt de (2) pour les données de dispersion montrant des lois de puissance. Lorsque tous les paramètres sont uniformes et constants, (2) équivaut à

$$\partial_t P(x, t) = \nabla \cdot (D \nabla - v)(Id + \lambda h(x) I_{0,+}^{1-\gamma})^{-1} P(x, t), \quad (3)$$

avec  $h(x) = 1$ . On montre en effet que l'opérateur  $(Id + \lambda h(x) I_{0,+}^{1-\gamma})$  est inversible [12]. De plus, on montre à l'aide de la transformation de Laplace que son inverse équivaut en fait à la convolution par la fonction  $\mathcal{H}_{\lambda h(x), \gamma}$  définie ci-dessous, à partir de  $E_\alpha(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\Gamma(1+n\alpha)}$  qui est une fonction dy type de Mittag-Leffler [6].

**Notation :** Pour  $t$  et  $\lambda$  positifs, et avec  $\gamma$  entre 0 and 1, posons  $\mathcal{H}_{\lambda, \gamma}(t) = \frac{d}{dt} E_{1-\gamma}(-\lambda t^{1-\gamma})$ . On a  $\mathcal{H}_{\lambda, \gamma}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\lambda t^{1-\gamma}}{\Gamma(1+n(1-\gamma))}$  for  $t > 0$ . On obtient ainsi une loi de conservation, si le flux de traceur est

$$F(x, t) = (D \nabla - v)(Id + \lambda h(x) I_{0,+}^{1-\gamma})^{-1} P(x, t). \quad (4)$$

Lorsque les paramètres cessent d'être uniformes et constants, les équations (2) et (3) cessent d'être équivalentes. En fait la version la plus générale est (3), et ceci est dû au fait que si  $P$  représente la densité totale de traceur,  $(Id + \lambda h(x) I_{0,+}^{1-\gamma})^{-1} P$  représente celle de la fraction mobile. On peut étendre ce résultat [12] au cas où les paramètres  $D, v, h, \lambda$  dépendent du temps ou de la position, et aussi au cas où la fonction  $h$  n'est plus uniforme, mais prend ses valeurs entre 0 et 1. Elle représente alors la probabilité pour un marcheur d'être immobilisé.

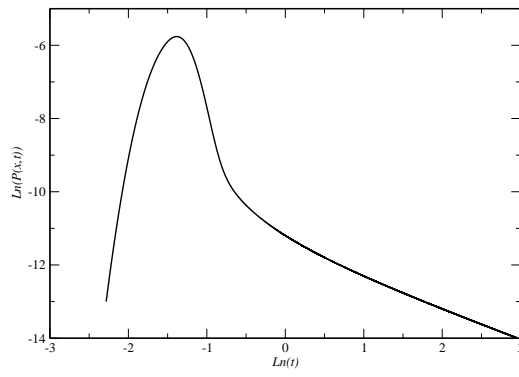


FIG. 1 – Evolution, en coordonnées logarithmiques, de la solution de (3) obtenue dans le domaine  $[0, 1]$  limité par des conditions imposant un flux de traceur nul en  $x = 0$  et  $P(1, t) = 0$ , à partir d’injection localisée dans le temps tout près de  $x = 0$ , les paramètres étant  $\gamma = 0.8$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $v = 5$ ,  $h = 1$ .

### 3 Marches au hasard approchant (3)

En fait, la loi de Fourier est un cas particulier de (3), qui s’obtient avec  $\lambda = 0$  ou  $\gamma = 1$ . Or, on peut la déduire de la loi de Fick quand cette dernière s’applique, et c’est la limite hydrodynamique d’un grand nombre de marches au hasard. De même (3), qui se déduit de (4) compte tenu du principe de conservation de la masse, est aussi la limite hydrodynamique d’un grand nombre de marches au hasard, incluant des périodes d’immobilisation pour les marcheurs.

#### 3.1 Le cas de la loi de Fourier

Pour  $\lambda = 0$ , on approche les solutions de (1) par la densité d’un nuage de marcheurs, effectuant des sauts successifs, indépendants, et qui sont eux-mêmes des variables aléatoires de variance  $\sigma^2$ , séparés par des intervalles de temps  $\tau$  (ou de moyenne  $\tau$ ). Si la vitesse moyenne  $v$  est différente de zéro, les sauts s’ajoutent à des translations effectuées pendant ces durées. Ces translations ont pour amplitude  $v\tau$  si  $v$  est constante. Quand  $\tau$  et  $\sigma$  tendent vers zéro en vérifiant  $D = \sigma^2/(2\tau)$ , la densité des marcheurs a une limite qui vérifie (1). Plusieurs démonstrations ont été présentées depuis [2], et les expériences rappelées dans [13] ont observé avec précision des mouvements à petite échelle correspondant à ce schéma.

Ce résultat peut être généralisé à l’aide des lois stables de Lévy.

#### 3.2 Lois stables de Lévy

Ces lois de probabilité, notées  $L_\theta^\alpha$  sont invariantes par addition, à des homothéties et des translations près, et cette propriété les caractérise [3]. Elles forment un ensemble indexé par deux paramètres : l’exposant de stabilité  $\alpha$  appartient à  $]0, 2]$ , et au voisinage de l’infini la densité de probabilité de  $L_\theta^\alpha$  est en  $t^{-1-\alpha}$ . L’indice de dissymétrie vérifie  $|\theta| < \min(\alpha, 2-\alpha)$ , il vaut 0 pour une loi paire. Comme la loi normale (qui correspond à  $\alpha = 2$ ) ces lois sont des attracteurs. C’est à dire que quand on ajoute des variables aléatoires  $V_i$  indépendantes, de densité  $\psi(t)$  proportionnelle à  $t^{-1-\alpha}$  au voisinage de l’infini (avec  $0 \leq \alpha \leq 2$ ), la loi de  $n^{-1/\alpha}(V_1 + \dots + V_n)$  tend vers une loi stable d’exposant  $\alpha$ . La loi normale attire toutes les lois de variance finie, ce qui fait un domaine d’attraction particulièrement important. Les autres lois stables servent à mieux tenir compte d’évènements “extrêmes” rares mais importants.

#### 3.3 Marches au hasard avec immobilisation

L’équation (3) est la limite hydrodynamique de marches au hasard comme ci-dessus, dans lesquelles à la fin de chaque saut les marcheurs peuvent rester immobilisés pour une durée aléatoire, représentée par une variable aléatoire comme les  $V_i$ , avec  $0 < \alpha = \gamma < 1$ . En plus, pour que ces  $V_i$  ne prennent que des valeurs positives, afin de pouvoir représenter des durées, il faut imposer  $\theta = -\gamma$  et  $0 < \gamma < 1$ .

Ce point a été démontré dans [12] sur la base du fait que dans ce cas le processus représentant la position d’un marcheur à l’instant  $t$ , dans la limite hydrodynamique, est un mouvement Brownien  $X(t)$  subordonné à un autre processus  $Z_t$ , strictement croissant. Ce dernier représente le temps que le marcheur a passé à bouger jusqu’à l’instant  $t$  [5] [11]. Alors, la position à l’instant  $t$  est  $X(Z_t)$ , les trajectoires sont les mêmes dans les deux cas, mais pas les équations horaires. Quant à la densité  $P(x, t)$  de marcheurs, elle s’obtient à partir d’une solution  $Q(x, t)$  vérifiant (1) pour  $\lambda = 0$  par  $P(x, t) = \int_0^\infty Q(x, \tau)g(\tau, t)d\tau$ , où  $g(\cdot, t)$  représente la densité de probabilité de  $Z_t$ . Cette fonction est entièrement déterminée par  $\psi$ .

Ce résultat s'étend, avec une démonstration différente trop longue à détailler ici, à des cas où des coefficients de (3), comme la vitesse  $v$ , dépendent du temps ou de la position, ainsi qu'à la situation où l'adsorption se traduisant par l'immobilisation des particules, a lieu seulement dans une partie du domaine étudié : alors,  $h$  est nul en dehors de cette région.

## 4 Simulation numérique de (3)

Pour vérifier numériquement que (3) représente la densité d'un nuage de particules effectuant la marche au hasard ci-dessus, on simule les trajectoires d'un grand nombre de marcheurs. On compare les histogrammes avec les solutions de (3).

### 4.1 Méthode

Chacune des particules indépendantes, effectue une succession de translations correspondant aux durées  $\tau$ , suivies de sauts instantanés Gaussiens, de variance  $\sigma$  avec  $D = \sigma^2/(2\tau)$ , suivis avec la probabilité  $h(x)$  d'une immobilisation dont la durée est  $\tau^{1/\gamma}V$ , la variable  $V$  ayant pour densité  $\psi$ . A cause du comportement asymptotique de cette dernière, la transformée de Laplace  $\tilde{\psi}(s)$  est équivalente à  $1 - \lambda s^\gamma$  au voisinage de zéro. Pour résoudre (3) on discrétise les dérivées spatiales avec des schémas centrés, dans le cadre d'une méthode implicite, afin d'éviter des pas de temps exagérément courts. En vue de l'opérateur  $(Id + \lambda h I_{0,+}^{1-\gamma})^{-1}$ , on discrétise d'abord  $I_{0,+}^{1-\gamma} f(n\Delta t)$  sur la base de la méthode des trapèzes, avant de l'inverser. Ceci donne  $\sum_{i=0}^n w_i f^{(n-i)} = \frac{\Delta t^{1-\gamma}}{2\Gamma(2-\gamma)} [f^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} f^{(n-j)}((j+1)^{1-\gamma} - (j-1)^{1-\gamma}) + f^{(0)}(n^{1-\gamma} - (n-1)^{1-\gamma})]$ .

On en déduit  $(Id + \lambda h I_{0,+}^{1-\gamma})^{-1}$  en remarquant que lorsque  $(Id + \lambda h I_{0,+}^{1-\gamma})^{-1} g = f$  dans  $[0, t]$  avec  $t = n\Delta t$ , on a  $g(t') = (Id + \lambda h I_{0,+}^{1-\gamma}) f(t')$  dans  $[0, t]$ . Les fonctions  $g$  et  $f$  sont représentées par les vecteurs  $\mathbf{G}^{(n)}$  et  $\mathbf{F}^{(n)}$ , de coordonnées  $g(j\Delta t)$  et  $f(j\Delta t)$ , notées  $g^{(j)}$  et  $f^{(j)}$  pour  $0 \leq j \leq n$ . Approcher  $I_{0,+}^{1-\gamma} f(t')$  (pour  $0 \leq t' \leq t$ ) par  $\sum_{i=0}^{n'} w_i f^{(n'-i)}$  avec  $0 \leq n' \leq n$ , donne  $\mathbf{W}^{(n)} \mathbf{F}^{(n)} = \mathbf{G}^{(n)}$ , où  $\mathbf{W}^{(n)} = (W_{i,j}^{(n)})$  est la matrice triangulaire inférieure de dimension  $(n+1) \times (n+1)$ , d'éléments  $W_{i,i}^{(n)} = 1 + \lambda h w_0$ ,  $W_{i,i-j}^{(n)} = \lambda h w_j$  pour  $0 < j$  et  $W_{i,i+j}^{(n)} = 0$ . Son inverse est une autre matrice triangulaire inférieure  $\mathbf{B}^{(n)} = (B_{i,j}^{(n)})$ , de la forme  $B_{i,i}^{(n)} = b_0^{(n)}$ ,  $B_{i,i-j}^{(n)} = b_j^{(n)}$  pour  $0 \leq j \leq i \leq n$  et  $B_{i,i+j}^{(n)} = 0$  pour  $0 < j$ , avec  $b_i^{(n)}$  à la ligne  $i$  sur la diagonale, et  $(Id + \lambda h I_{0,+}^{1-\gamma})^{-1} f(n\Delta t)$  est représenté par  $\sum_{i=0}^n b_i^{(n)} f^{(n-i)}$ .

### 4.2 Comparaisons

Les densités des marcheurs tendent vers les solutions de (3) lorsque  $\sigma$  et  $\tau$  deviennent petits. On a le choix entre plusieurs possibilités pour la loi de probabilité distribuant les durées des immobilisations. On peut prendre une loi de Lévy comme [12]. C'est ce qu'on a pris pour la figure 2, obtenue avec des paramètres  $D$  et  $v$  constants et uniformes, dans un domaine unidimensionnel représentant une colonne parcourue par un débit constant. On a pris aussi des conditions aux limites représentant un flux de traceur nul en  $x = 0$ , et une sortie absorbante (tous les marcheurs sont enlevés dès qu'ils arrivent) en  $x = 1$ . L'injection a été continue (en  $x = 0.5$ ) pendant une durée finie, avec un taux constant.

On peut utiliser d'autres lois de probabilité pour les durées d'immobilisation, pourvu que le comportement asymptotique de la densité de probabilité  $\psi$  soit conforme au paragraphe 3.2. Par exemple pour les figures 3 et 4 on a pris une loi de Pareto. La convergence est alors moins rapide, il faut des  $\sigma$  et  $\tau$  plus petits. Pour la figure 3, on a pris les mêmes conditions aux limites, avec une injection instantanée en  $x = 0.5$ , mais la vitesse était une fonction sinusoidale du temps. La figure 4 correspond à des conditions aux limites absorbantes en  $x = 0$  et  $x = 1$  ( $P = 0$ ), avec une injection instantanée au départ, une vitesse constante mais on a imposé  $h(x) = 0$  en dehors d'un intervalle dans lequel  $h(x) = 1$ , pour limiter l'adsorption à un sous-ensemble : il en résulte une discontinuité de la densité totale  $P$  de traceur. Dans tous les cas les deux méthodes concordent.

## 5 Conclusion

Pour représenter des phénomènes de transport montrant des courbes de percée avec une décroissance asymptotique en loi de puissance, on n'a guère de meilleur modèle que (3). De plus, cette équation est en étroite relation avec des modèles à petite échelle, à base de marches au hasard incluant pour un traceur la possibilité d'être immobilisé puis relâché. Des outils numériques permettent de discrétiser (3) en vue de traiter des données expérimentales [8]. Il reste à trouver aussi pour quelle raison des scénarios à petite échelle avec de longues périodes d'immobilisation semblent pertinents en milieu poreux insaturé, et pas saturé, pour représenter les mouvements des particules de traceur.

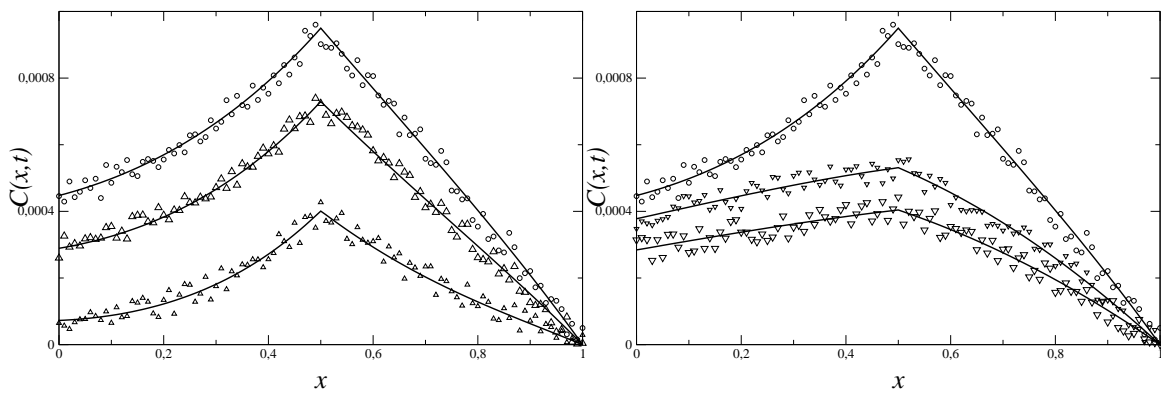


FIG. 2 – Les histogrammes d’un nuage de marcheurs effectuant la marche au hasard décrite en 3.3, comparés à la solution de (3), obtenue à partir d’une source de débit constant pendant  $0 \leq t \leq t_0 = 0.5$ . Les instantanés, représentés à gauche, correspondent à la période d’activité de la source : les triangles représentent les temps  $t = 0.1$  et  $t = 0.3$ , les cercles correspondent à  $t = t_0 = 0.5$  (la source cesse alors de débiter). Les instantanés obtenus après  $t_0$  sont représentés à droite, pour  $t = 0.7$  et  $t = 0.9$  (triangles). Les paramètres sont  $D = 1$ ,  $\gamma = 1/2$ ,  $\lambda = 1$  et  $v = 1$ .

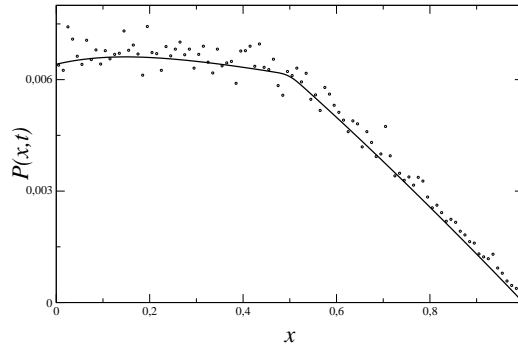


FIG. 3 – Histogrammes d’un nuage de marcheurs effectuant la marche au hasard décrite en 3.3, comparés à la solution de (3), obtenue après injection instantanée de traceur en  $x = 0.5$ , pour une vitesse en  $v = \sin 50t$  au temps  $t = 0.4$ . Les paramètres sont  $D = 1$ ,  $\gamma = 1/2$ ,  $\lambda = 1$ .

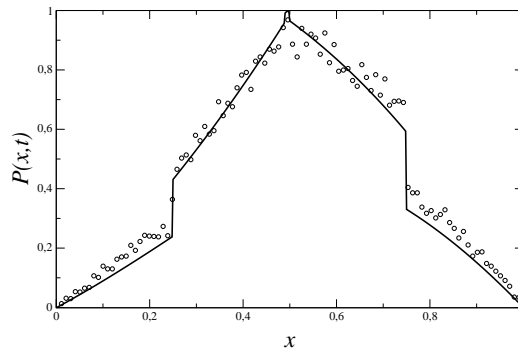


FIG. 4 – Histogrammes d’un nuage de marcheurs effectuant la marche au hasard décrite en 3.3, comparés à la solution de (3), obtenue après injection instantanée de traceur en  $x = 0.5$ , pour une vitesse constante au temps  $t = 1$ . Cependant la fonction  $h$  s’annule en dehors de l’intervalle  $[0.25, 0.75]$  dans lequel elle vaut 1. Les paramètres sont  $D = 0.3$ ,  $v = 1$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\lambda = 0.5$ .

## Références

- [1] Bromly M. et Hinz C. Non-Fickian transport in homogeneous unstaured repacked sand, Water Resour. Res. Vol. 40 W0740, 2004
- [2] Einstein E, Investigations on the Theory of Brownian Movement, Dover New York, 1956

- [3] Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. II Wiley series in probability and mathematical statistics, J. Wiley and sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1970
- [4] Van Genuchten M.T. et Wierenga P.J. Mass transfer studies in sorbing porous media, I Analytical solutions, Soil. Sci. Soc. Am. J. Vol. 33(7) 473, 1976
- [5] Gorenflo R. Mainardi F. et Vivoli A. continuous-time random walk and parametric subordination in fractional diffusion, Chaos Soliton fractal Vol 34(1) 87, 2007)
- [6] Gorenflo R. et Mainardi F. in Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, A. Carpinteri and F. Mainardi Eds, CISM courses and lectures 378, Springer Wien New-York, 1997
- [7] Haggerty R. et Gorelik S.M. Multiple-rate mass transfer for modeling diffusion and surface reactions in media with pore-scale heterogeneity, Water Resour. Res. Vol 31(10), 2383-23400, 1995
- [8] Latrille C. Pr sentation et caract ristiques techniques du Banc Exp rimental pour l'Etude du Transport InInsatur (BEETI). Rapport, NT DPC / SECR 07-024 indice A. pp.30, 2007
- [9] P. Lévy Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars Paris 1937
- [10] Levy M. et Berkowitz B. Measurement and analysis of non-Fickian dispersion in heterogeneous porous media, J. Contam. Hydrology Vol 64, 203-206, 2003
- [11] Magdziarz M. Weron A. et Weron K. Fractional Fokker-Planck dynamics : Stochastic representation and computer simulation, Phys. Rev E, Vol 75(2) 016708, 2007
- [12] B. Maryshev Joelson M. Lyubimov D. Lyubimova T. et . Néel M.C. Non Fickian flux for advection-dispersion with immobile periods, J. Phys. A : Math. And Theor. Vol. 42 115001, 2009
- [13] Metzler R. et Klafter J.T he Random walks guide to anomalous diffusion : a fractional dynamics approach, Physics Reports Vol 339, 1, 2000
- [14] Samko S.G. Kilbas A.A . et Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York, 1993
- [15] Schumer R. Benson D.A. Meerschaert M .M. et Bauemer B. Fractal mobile/immobile solute transport, Water Resour. Res. Vol. 39 (10) pp. 1296, 2003
- [16] Tufenkji N. et Elimelech M. Spatial distributions of Cryptosporidium oocysts in porous media : Evidence for dual mode deposition, Environ. sci. Technol. Vol 39, 3620-3629, 2005
- [17] Zhang Y. Benson D.A. et Bauemer B. Moment analysis for spatiotemporal fractional dispersion, Water Resour. Res. Vol. 445 W05404, 2008