



**HAL**  
open science

**Solutions analytiques du panache massique rond turbulent formé par le rejet continu d'un fluide de faible masse volumique en champ libre, dans un fluide ambiant au repos et non stratifié**

Ghislain Michaux, Olivier Vauquelin

► **To cite this version:**

Ghislain Michaux, Olivier Vauquelin. Solutions analytiques du panache massique rond turbulent formé par le rejet continu d'un fluide de faible masse volumique en champ libre, dans un fluide ambiant au repos et non stratifié. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03390877

**HAL Id: hal-03390877**

**<https://hal.science/hal-03390877>**

Submitted on 21 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Solutions analytiques du panache massique rond turbulent en champ libre

G. MICHAUX<sup>a</sup>, O. VAUQUELIN<sup>b</sup>

*a. LEPTIAB, Université de La Rochelle, Avenue Michel Crépeau, 17 042 La Rochelle*

*b. IUSTI, Aix-Marseille Université, Technopôle de Château-Gombert, 60 rue Joliot Curie, 13 453 Marseille*

## Résumé :

*Un modèle théorique de type intégral est ici développé en vue de décrire la dynamique d'un panache massique se développant en champ libre, dans un fluide ambiant au repos et non stratifié. Ce développement théorique permet d'exprimer chacune des variables principales du panache (rayon, vitesse verticale et masse volumique) en fonction d'un seul paramètre  $\Gamma$ , appelé "fonction panache". Par conséquent, la détermination de cette fonction conduit aux lois d'évolution des variables du panache avec l'altitude au-dessus de la source de flottabilité.*

## Abstract :

*An integral model is developed here in order to describe the behaviour of a buoyant plume rising in a quiescent unconfined and unstratified environment. This theoretical development allows to express each plume variable (radius, velocity and density) in term of a single quantity  $\Gamma$ , called "plume function". Therefore, the determination of this function leads to variation laws with the height above the buoyancy source for all plume variables.*

**Mots clefs :** Panache massique turbulent, modélisation intégrale, solutions analytiques

## 1 Mise en équations du panache massique turbulent

### 1.1 Position du problème

Comme illustré schématiquement par la figure 1, le problème ici considéré est défini par le rejet vertical en champ libre à la vitesse  $w_0$  d'un fluide de faible masse volumique  $\rho_0$  par une buse circulaire de rayon  $b_0$ . Le régime d'écoulement du panache massique ainsi formé est considéré comme étant turbulent, permanent et non vrillé tandis que le fluide ambiant est supposé être au repos et non stratifié, de masse volumique uniforme  $\rho_\infty$ . L'objectif est de déterminer les lois de variation du rayon du panache  $b$ , de la vitesse verticale  $w$  et du déficit de masse volumique  $\Delta\rho = \rho_\infty - \rho$  en fonction de l'altitude  $z$  et des conditions de source ( $\rho_0$ ,  $w_0$  et  $b_0$ ).

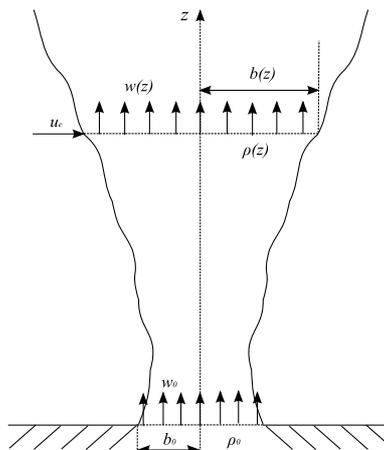


FIG. 1 – Représentation schématique du panache massique rond turbulent se développant en champ libre au-dessus d'une source de rejet circulaire

## 1.2 Modélisation intégrale du panache

Le développement théorique proposé s'inscrit dans la continuité des travaux initiés par Morton *et al.* [1] et récemment repris par Delichatsios [2] et Rooney & Linden [3]. Ces travaux proposent une mise en équation monodimensionnelle du problème obtenue par intégration des équations de conservation (masse, quantité de mouvement et flottabilité) sur une tranche perpendiculaire à l'axe du panache massique. La modélisation intégrale faisant perdre le détail des profils de vitesse et de déficit de masse volumique, il est alors nécessaire de faire une hypothèse sur la forme de ces profils à une hauteur  $z$  donnée. L'expérience montre que les profils de vitesse et de déficit de masse volumique dans le panache sont de forme quasiment gaussienne au-delà d'une certaine altitude. Néanmoins, pour des raisons de simplicité, ces variables seront ici supposées être uniformes à toute altitude en adoptant l'hypothèse de profils plats "top-hat" (voir figure 1). Notons que des relations entre variables top-hat et variables gaussiennes plus réalistes existent [4], ce qui permet au développement théorique présenté ici de garder un caractère général. Avec ces hypothèses, les équations de conservation des flux de masse, de quantité de mouvement et de déficit de masse volumique s'écrivent :

$$\frac{d}{dz} (\rho w b^2) = 2\rho_\infty u_e b, \quad (1a)$$

$$\frac{d}{dz} (\rho w^2 b^2) = g \Delta \rho b^2, \quad (1b)$$

$$\frac{d}{dz} (\Delta \rho w b^2) = 0, \quad (1c)$$

où  $g$  désigne la gravité. Le membre de droite de l'équation de conservation du flux de masse (1a) représente, à une altitude donnée, le débit de fluide ambiant de masse volumique  $\rho_\infty$  qui est entraîné par unité de hauteur à la frontière  $b$  du panache avec une vitesse radiale  $u_e$ , appelée vitesse d'entraînement.

## 1.3 Hypothèse d'entraînement et affinité des panaches

Morton *et al.* [1] ont proposé de modéliser très simplement le processus d'entraînement en supposant que, pour toute altitude  $z$ , cette vitesse  $u_e(z)$  est proportionnelle à la vitesse verticale dans le panache  $w(z)$ . Cette approximation, dite hypothèse d'entraînement, s'écrit :

$$u_e = \alpha w. \quad (2)$$

Le coefficient d'entraînement, noté  $\alpha$ , est constant pour les panaches turbulents, évalué expérimentalement de l'ordre de 0.1 dans l'hypothèse de profils top-hat [5]. Dans leur développement théorique, Morton *et al.* [1] se basent sur l'approximation de Boussinesq qui limite les effets de la variation de masse volumique aux seules forces de flottabilité. Dans le cas général non-Boussinesq où les variations de masse volumique influent sur la dynamique complète du problème, Delichatsios [2] puis Rooney & Linden [3] ont proposé une hypothèse d'entraînement modifiée qui consiste à supposer que la vitesse d'entraînement dépend aussi de la masse volumique du panache. Elle s'écrit :

$$u_e = \alpha \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{1/2} w. \quad (3)$$

Cette hypothèse s'appuie sur les résultats expérimentaux de Ricou & Spalding [6] qui ont réalisé des mesures d'entraînement d'air ambiant dans des jets de gaz lourds et légers. Les résultats ainsi obtenus indiquent que le taux d'entraînement d'air est proportionnel à la racine carrée du rapport entre la masse volumique locale du fluide injecté et celle du fluide ambiant. Il doit être noté que ces hypothèses d'entraînement sont étroitement liées à la recherche de solutions affines qui seront rappelées au §2.1. En effet, Morton *et al.* [1] ont démontré que des solutions affines peuvent être construites pour un panache Boussinesq (faibles écarts de masse volumique) à condition d'adopter l'hypothèse d'entraînement (2). De même, Delichatsios [2] et Rooney & Linden [3] ont mis en évidence que, dans le cas général d'un panache non-Boussinesq, la construction de solutions affines nécessite d'adopter l'hypothèse d'entraînement modifiée (3).

## 2 Solutions du panache massique turbulent

En adoptant les hypothèses d'entraînement (2) et (3), les équations de conservation (1) peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dz} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^j w b^2 \right] = 2\alpha \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{j/2} w b, \quad (4a)$$

$$\frac{d}{dz} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^j w^2 b^2 \right] = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} g b^2, \quad (4b)$$

$$\frac{d}{dz} (\Delta \rho w b^2) = 0. \quad (4c)$$

L'écriture retenue permet, via l'introduction de l'exposant "j", de traiter le cas général du panache non-Boussinesq ( $j = 1$ ) [3] ainsi que le cas particulier du panache Boussinesq ( $j = 0$ ) [1] pour lequel les variations de masse volumique sont négligées ( $\rho \approx \rho_\infty$ ) mais la différence de masse volumique est conservée dans le terme de flottabilité ( $\Delta \rho = \rho_\infty - \rho \neq 0$ ). Notons que l'équation (4c) traduit la conservation avec l'altitude du flux de déficit de masse volumique  $F$  qui correspond, dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, au flux de gravité  $B$  (ou débit de flottabilité). Elle peut être réécrite sous la forme suivante :

$$F = \pi g \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} w b^2 = \pi g \frac{\rho_\infty - \rho_0}{\rho_\infty} w_0 b_0^2 \quad \text{et} \quad B = \frac{\rho_\infty}{\rho} F. \quad (5)$$

A ce stade du développement théorique, nous introduisons deux nouvelles variables  $\beta$  et  $\eta$  définies par :

$$\beta = \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{j/2} b \quad \text{et} \quad \eta = \frac{\Delta \rho}{\rho_\infty} \left( \frac{\rho_\infty}{\rho} \right)^j. \quad (6)$$

Avec le nouveau jeu de variables  $\beta$ ,  $w$ ,  $\eta$ , le système (4) peut être réécrit sous la forme généralisée suivante, que l'on adopte ou non l'approximation de Boussinesq :

$$\frac{d}{dz} (w \beta^2) = 2 \alpha \beta w, \quad (7a)$$

$$\frac{d}{dz} (w^2 \beta^2) = \eta g \beta^2, \quad (7b)$$

$$\frac{d}{dz} (\eta w \beta^2) = 0, \quad (7c)$$

et le flux de déficit de masse volumique exprimé en unité de flottabilité  $F$  s'écrit :

$$F = \pi g \eta w \beta^2 = \pi g \eta_0 w_0 \beta_0^2. \quad (8)$$

## 2.1 Solutions affines et origine virtuelle

Les solutions affines du panache sont obtenues en recherchant à partir des équations du mouvement des lois d'évolution en puissance de  $z$  pour chacune des variables du problème  $\beta$ ,  $w$  et  $\eta$ . Ces solutions doivent être interprétées comme les solutions exactes du problème lorsque  $z$  tend vers l'infini. Elles ne constituent donc qu'un modèle approché valable en champ lointain, dans la région affine du panache. De plus, les solutions affines étant mathématiquement associées à un modèle de source de flottabilité ponctuelle, elles doivent ensuite être corrigées afin de tenir compte des conditions réelles de rejet du fluide de faible masse volumique. Cette correction consiste à décaler le point source vers une origine virtuelle  $z_v$  dont la position dépend des caractéristiques de la source [7, 8, 9, 10]. Les solutions affines ainsi obtenues s'écrivent :

$$\beta(z) = \frac{6\alpha}{5} (z - z_v), \quad (9a)$$

$$w(z) = \left( \frac{3}{4} \right)^{1/3} \left( \frac{6\alpha}{5} \right)^{-2/3} \left( \frac{F}{\pi} \right)^{1/3} (z - z_v)^{-1/3}, \quad (9b)$$

$$\eta(z) = \frac{1}{g} \left( \frac{3}{4} \right)^{-1/3} \left( \frac{6\alpha}{5} \right)^{-4/3} \left( \frac{F}{\pi} \right)^{2/3} (z - z_v)^{-5/3}. \quad (9c)$$

Néanmoins, les solutions affines, même réajustées par la correction d'origine virtuelle, ne permettent d'approcher le comportement du panache qu'au-delà d'une certaine distance de la source et doivent donc être interprétées comme des solutions asymptotiques.

## 2.2 Fonction panache $\Gamma$ et paramètre de source $\Gamma_0$

A ce stade du développement, nous introduisons le nombre sans dimension  $\mathcal{R}$  que l'on construit comme un nombre de Richardson à partir des variables du problème :

$$\mathcal{R} = \frac{\eta g^2 \beta}{w^2}. \quad (10)$$

En remplaçant  $\beta$ ,  $w$  et  $\eta$  par les solutions affines du système (9), nous obtenons que  $\mathcal{R}$  est constant :  $\mathcal{R} = 16\alpha/5 = 0.32$  (pour  $\alpha=0.1$ ). Ce résultat indique que le nombre sans dimension  $\mathcal{R}$  va toujours tendre avec l'altitude (en champ lointain, dans la région affine du panache) vers une valeur fixe et, quelles que soient les conditions de source. Ce résultat théorique a été mis en évidence par les expériences de Fisher *et al.* [11] et Papanicolaou & List [12] pour des rejets à faibles écarts de masse volumique sur maquettes hydrauliques. Nous proposons alors de définir la "fonction panache" comme le rapport entre le nombre  $\mathcal{R}$  et sa valeur asymptotique :

$$\Gamma(z) = \frac{5}{16\alpha} \mathcal{R}(z) = \frac{5g}{8\alpha} \frac{\eta\beta}{w^2}. \quad (11)$$

Par construction, cette fonction a donc la propriété de tendre vers 1 avec l'altitude quelles que soient les caractéristiques de la source. La fonction panache a déjà été explicitée par Hunt & Kaye [13] mais comme une combinaison des flux de masse, de quantité de mouvement et de flottabilité et non à partir des variables locales du panache. En revanche, définie à la source, la fonction panache correspond au paramètre de source  $\Gamma_0 = \Gamma(z=0)$  qui est connu pour définir le régime du panache [8]. Celui-ci est dit "forcé" lorsque  $\Gamma_0 < 1$ , "paresseux" lorsque  $\Gamma_0 > 1$  et enfin "pur" dans le cas particulier  $\Gamma_0 = 1$ .

## 2.3 Solutions analytiques

Les solutions affines avec correction d'origine virtuelle établies au §2.1 sont, par définition, inadaptées à l'étude du champ proche d'un panache se développant au-dessus d'une source de rejet d'un fluide de faible masse volumique. En particulier, comme l'indiquent Fannelöp & Webber [14], ces solutions approchées ne permettent pas de décrire l'apparition, sous certaines conditions, de phénomènes singuliers tels qu'un rayon minimum du panache (col) et une vitesse verticale maximale (pic de vitesse). Nous proposons donc de rechercher les solutions analytiques exactes du problème considéré.

En utilisant la définition de la fonction panache (11), le système d'équations (7) peut être reformulé de façon à expliciter les dérivées premières, par rapport à l'altitude  $z$ , de chaque variable du problème :

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{4\alpha}{5} \left( \frac{5}{2} - \Gamma \right), \quad (12a)$$

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{8\alpha}{5} \frac{w}{\beta} \left( \frac{5}{4} - \Gamma \right), \quad (12b)$$

$$\frac{d\eta}{dz} = -\frac{16\alpha^2}{5g} \left( \frac{w}{\beta} \right)^2 \Gamma. \quad (12c)$$

À partir de ces expressions, nous retrouvons deux résultats connus dans le cadre de l'approximation de Boussinesq : le panache présente un col ( $db/dz = d\beta/dz = 0$ ) pour  $\Gamma = 5/2$  [8] et un pic de vitesse vertical ( $dw/dz = 0$ ) pour  $\Gamma = 5/4$  [13]. Ce dernier résultat demeure valable dans le cas général d'un panache non-Boussinesq. De plus, en combinant les relations du système (12) à la définition de la fonction panache (11), nous obtenons une équation différentielle relative à cette dernière :

$$\frac{d\Gamma}{dz} = 4\alpha \frac{\Gamma}{\beta} (1 - \Gamma). \quad (13)$$

Cette équation met en évidence que dans le cas particulier du panache pur la fonction panache reste constante et égale à 1 avec l'altitude  $z$  au-dessus de la source. Dans le cas d'un panache forcé,  $\Gamma$  croît de façon monotone avec l'altitude et tend asymptotiquement vers 1 tandis que, pour un panache paresseux, celle-ci décroît de façon monotone mais tend aussi asymptotiquement vers 1.

### 2.3.1 Cas particulier du panache pur, $\Gamma_0 = 1$

Avec la condition supplémentaire  $\Gamma(z) = \Gamma_0 = 1$ , les équations du système (12) peuvent être intégrées et nous obtenons que les solutions exactes du panache pur correspondent aux solutions affines (9) avec une correction d'origine virtuelle purement géométrique ( $z_v = -5\beta_0/6\alpha$ ) :

$$\frac{\beta(z)}{\beta_0} = \frac{6\alpha}{5\beta_0} \left( z + \frac{5\beta_0}{6\alpha} \right), \quad (14a)$$

$$\frac{w(z)}{w_0} = \left( \frac{6\alpha}{5\beta_0} \right)^{-1/3} \left( z + \frac{5\beta_0}{6\alpha} \right)^{-1/3}, \quad (14b)$$

$$\frac{\eta(z)}{\eta_0} = \left( \frac{6\alpha}{5\beta_0} \right)^{-5/3} \left( z + \frac{5\beta_0}{6\alpha} \right)^{-5/3}. \quad (14c)$$

### 2.3.2 Cas général des panaches forcé et paresseux, $\Gamma_0 \neq 1$

La démarche consiste ici à exprimer chaque variable du problème considéré ( $\beta$ ,  $w$  et  $\eta$ ) en fonction de  $\Gamma$  uniquement, puis à intégrer l'équation différentielle (13) afin de relier la fonction panache à l'altitude au-dessus de la source  $z$ .

◇ Relation entre  $\beta$  et  $\Gamma$  :

En combinant les équations (12a) et (13), nous obtenons :

$$\frac{d\beta}{d\Gamma} = \frac{\beta}{5} \frac{5/2 - \Gamma}{\Gamma(1 - \Gamma)} \Rightarrow \frac{d\beta}{\beta} = \frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{\Gamma} + \frac{3}{10} \frac{d\Gamma}{1 - \Gamma}, \quad (15)$$

puis, après intégration :

$$\frac{\beta}{\beta_0} = \left( \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)^{1/2} \left( \frac{1 - \Gamma_0}{1 - \Gamma} \right)^{3/10}. \quad (16)$$

◇ Relation entre  $w$  et  $\Gamma$  :

De même, en combinant les équations (12b) et (13) et en utilisant la relation (16), nous obtenons :

$$\frac{dw}{d\Gamma} = -\frac{2w}{5} \frac{5/4 - \Gamma}{\Gamma(1 - \Gamma)} \Rightarrow \frac{dw}{w} = -\frac{1}{2} \frac{d\Gamma}{\Gamma} - \frac{1}{10} \frac{d\Gamma}{1 - \Gamma}, \quad (17)$$

puis, après intégration :

$$\frac{w}{w_0} = \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{1/2} \left( \frac{1 - \Gamma}{1 - \Gamma_0} \right)^{1/10}. \quad (18)$$

◇ Relation entre  $\eta$  et  $\Gamma$  :

Finalement, nous déduisons de la définition de  $\Gamma$  (11) et des solutions obtenues pour  $\beta$  (16) et  $w$  (18), la relation suivante pour le déficit de masse volumique adimensionnel :

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{1/2} \left( \frac{1 - \Gamma}{1 - \Gamma_0} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

◇ Relation entre  $\Gamma$  et  $z$  :

En substituant dans l'équation différentielle (13)  $\beta$  par sa solution (16), il vient :

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \frac{1}{\Lambda} \begin{cases} \Gamma^{1/2} (1 - \Gamma)^{13/10} & \text{pour } \Gamma_0 < 1, \\ -\Gamma^{1/2} (\Gamma - 1)^{13/10} & \text{pour } \Gamma_0 > 1, \end{cases} \quad (20)$$

où  $\Lambda$  est une échelle de longueur définie à partir des conditions de source :

$$\Lambda = \frac{\beta_0}{4\alpha} \frac{|1 - \Gamma_0|^{3/10}}{\Gamma_0^{1/2}}. \quad (21)$$

Après intégration des équations (20), nous obtenons les relations suivantes entre la fonction panache et l'altitude au-dessus de la source :

$$\frac{z}{\Lambda} = \begin{cases} \mathcal{F}(\Gamma) - \mathcal{F}(\Gamma_0) & \text{pour } \Gamma_0 < 1, \\ \mathcal{L}(\Gamma) - \mathcal{L}(\Gamma_0) & \text{pour } \Gamma_0 > 1, \end{cases} \quad (22)$$

où  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{L}$  sont deux fonctions intégrales respectivement définies pour les panaches forcés et paresseux par :

$$\mathcal{F}(X) = \int_0^X \gamma^{-1/2} (1 - \gamma)^{-13/10} d\gamma, \quad \mathcal{L}(X) = \int_X^\infty \gamma^{-1/2} (\gamma - 1)^{-13/10} d\gamma. \quad (23a,b)$$

### 3 Conclusion

Le développement théorique présenté ici a permis de décrire la dynamique d'un panache massique formé par le rejet vertical d'un fluide de faible masse volumique en champ libre, dans un fluide ambiant plus lourd, au repos et non stratifié. Ce développement constitue une contribution significative à la résolution du problème de panache initialement défini par Morton *et al.* [1]. En effet, nous obtenons des relations explicites donnant l'évolution avec l'altitude des variables principales du panache (rayon, vitesse verticale et masse volumique) valables quelle que soit l'altitude et, notamment, en champ proche où peuvent apparaître des phénomènes singuliers (col du panache et pic de vitesse). De plus, la reformulation des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de la flottabilité nous a permis d'établir des solutions valables que l'on adopte ou non l'approximation de Boussinesq.

L'originalité du modèle présenté ici réside dans le fait que nous avons exprimé les trois variables du panache en fonction d'un seul paramètre  $\Gamma$ , appelé "fonction panache", dont la valeur à la source permet de caractériser le régime du panache ("forcé", "pur" ou "paresseux"). Par la suite, cette fonction a été reliée à l'altitude au-dessus de la source de rejet via des fonctions intégrales qui peuvent, pour des applications pratiques, être tabulées [15].

### Références

- [1] Morton B., Taylor G., and Turner J. Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources. Proc. Royal Society, London, 1956.
- [2] Delichatsios M. Strong turbulent buoyant plumes. i. similarity. Comb. Sc. Tech., 24, 191–195, 1981.
- [3] Rooney G. and Linden P. Similarity considerations for non-boussinesq plumes in an unstratified environment. J. Fluid Mech., 318, 237–250, 1996.
- [4] Michaux G. Etudes sur la dynamique d'un panache massique en champ libre et en milieu confiné ventilé. Application à la simulation sur maquette des feux en tunnels. PhD thesis, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II, 2007.
- [5] Turner J. Turbulent entrainment: the development of the entrainment assumption, and its application to geophysical flows. J. Fluid Mech., 173, 431–471, 1986.
- [6] Ricou F. and Spalding D. Measurements of entrainment by axisymmetrical turbulent jets. J. Fluid Mech., 8, 21–32, 1961.
- [7] Morton B. Forced plumes. J. Fluid Mech., 5, 151–163, 1959.
- [8] Morton B. and Middleton J. Scale diagrams for forced plumes. J. Fluid Mech., 58, 165–176, 1973.
- [9] Hunt G. and Kaye N. Virtual origin correction for lazy turbulent plumes. J. Fluid Mech., 435, 377–396, 2001.
- [10] Carlotti P. and Hunt G. Analytical solutions for turbulent non-boussinesq plumes. J. Fluid Mech., 538, 343–359, 2005.
- [11] Fischer H., List E., Koh R., Imberger J., and Brooks N. Mixing in inland and coastal waters. Academic, 1979.
- [12] Papanicolaou P. and List E. Investigations of round vertical turbulent buoyant jet. J. Fluid Mech., 195, 341–391, 1988.
- [13] Hunt G. and Kaye N. Lazy plumes. J. Fluid Mech., 533, 329–338, 2005.
- [14] Fannelop T. and Webber D. On buoyant plumes rising from area sources in a calm environment. J. Fluid Mech., 497, 319–334, 2003.
- [15] Michaux G. and Vauquelin O. Solutions for turbulent buoyant plumes rising from area sources. Physics of Fluids, 20, 2008.