



HAL
open science

Détermination des propriétés effectives des milieux du second gradient : une approche par homogénéisation

Vincent Monchiet, Guy Bonnet

► **To cite this version:**

Vincent Monchiet, Guy Bonnet. Détermination des propriétés effectives des milieux du second gradient : une approche par homogénéisation. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03390823

HAL Id: hal-03390823

<https://hal.science/hal-03390823>

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Détermination des propriétés effectives des milieux du second gradient : une approche par homogénéisation

V. Monchiet, G. Bonnet

Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle,
LMSME FRE3160 CNRS,
5 boulevard Descartes, 77454 Marne la Vallée, France

Résumé :

On se propose de déterminer les propriétés macroscopiques d'un composite élastique linéaire incluant les effets du gradient de la déformation en s'appuyant sur une démarche d'homogénéisation. Pour cela, les conditions classiques de déformation homogènes au contour du Volume élémentaire représentatif (VER) sont remplacées par des conditions non linéaires. Le VER est constitué d'une matrice et d'inclusions de forme ellipsoïdales aléatoirement distribuées. La matrice et les inclusions ont un comportement élastique, linéaire et isotrope et obéissent aux équations de Cauchy à l'échelle microscopique. Les conditions non linéaires au bord du VER sont prises sous la forme d'un polynôme du second degré et fait explicitement intervenir la déformation macroscopique et le gradient de la déformation macroscopique. La généralisation de l'approche par homogénéisation dans ce contexte consiste alors à remplacer le VER par un matériau du second gradient équivalent. Le modèle macroscopique obtenu prend alors en compte les effets du gradient de la déformation et d'une taille caractéristique liée à la taille du VER.

Abstract :

We propose to provide the macroscopic elastic properties of a gradient elastic composite material from a homogenization framework. To reach this objective, the classical conditions at the boundary of the representative volume element (RVE) are replaced by nonlinear boundary conditions. The RVE is constituted of an elastic matrix containing ellipsoidal inclusions randomly distributed within the RVE. The elastic matrix and the heterogenities contain elastic materials which comply to Cauchy equations at the microscopic scale. Nonlinear boundary conditions are taken under the form of a polynomial function which depends explicitly of the strain gradient. The generalization of the homogenization approach in this context consists in replacing the RVE by an equivalent gradient elastic medium at the macroscopic scale. The macroscopic model which is thus obtained takes into account the effect of the strain gradient and a characteristic length which corresponds to the size of the RVE.

Mots clefs : Milieux poreux, homogénéisation, propriétés effectives, perméabilité, fluide visqueux

1 Introduction

Le cadre classique de la mécanique des milieux continus ne permet pas de décrire un certains de phénomènes liés à des effets microstructuraux. Dans de nombreux problèmes, caractérisés par des concentrations ou des singularités des champs mécaniques tel que les phénomènes de localisation des déformations ou de rupture, les modèles standards ne permettent pas de rendre comptes correctement les effets.

La théorie des milieux continus généralisés (milieux de Cosserat, du second gradient, micromorphes...) sont reconnus pour rendre compte de manière plus adéquate les effet de la microstructure sur le comportement macroscopique. Dans ce contexte, de nombreux modèles on été proposés depuis le début des années 60, notamment [8, 9], Mindlin et al. [4, 5], parmi tant d'autres.

La théorie de l'élasticité à gradient d'ordre supérieur généralise la théorie classique de l'élasticité en raffinant la description cinématique du milieu continuant en incorporant les gradients du déplacement d'ordre supérieurs. Ce type de modèles sont notamment utilisés pour la description des phénomènes de localisation des déformation ou de rupture. La prise en compte du second gradient du déplacement dans l'expression de l'énergie élastique nécessite également d'introduire une longueur caractéristique liée à la microstructure du matériau considéré. Toutefois, cette taille caractéristique est généralement introduite dans la modélisation de manière empirique et non dans un cadre micromécanique.

L'objet de ce travail est d'incorporer les effets du second gradient sur le comportement macroscopique des matériaux composites en s'appuyant sur une démarche d'homogénéisation. Le composite est constitué d'une matrice et des inclusions ellipsoïdales aléatoirement distribuées, chacune phase est élastique linéaire et régie par les équations de Cauchy. La prise en compte des effets des gradients d'ordre supérieurs est alors effectué en remplaçant les conditions classiques de déformation homogènes au contour par des conditions non linéaires. Ces conditions prennent une forme polynomiale et fait intervenir explicitement la déformation macroscopique, le gradient de la déformation macroscopique, le second gradient... Pour des raisons de simplicité on ne considère ici que les effets du gradient de la déformation bien que le cadre proposé ici permette d'introduire les effets des gradients d'ordre supérieurs.

2 Principe Général de l'approche

On considère un Volume élémentaire représentatif (VER) constitué d'une matrice élastique de tenseur d'élasticité noté $C_{ijkl}^M = \lambda_M \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_M (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ et d'inclusions, aléatoires distribuées dans ce VER, de tenseur élastique $C^I = \lambda_I \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_I (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$. Chaque phase est régie par les équations de Cauchy. On introduit le système de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) défini tel que :

$$\int_V x_i dV = 0 \quad (1)$$

On suppose que ce VER est soumis aux conditions non linéaires suivantes :

$$u_i(x) = u_i^d(x) = \frac{1}{2} D_{ipq} x_p x_q \quad \forall x \in \partial V \quad (2)$$

où D_{ijk} sont les composantes du second gradient du champ de déplacement macroscopique $D_{ijk} = \nabla_i \nabla_j U_k$ (D_{ijk} étant symétrique par rapport aux indices i et j). La considération de conditions non linéaires au contour a été initialement introduit par Gologanu et Leblond [3] dans un contexte d'analyse limite. La généralisation du lemme de Hill-Mandel pour des conditions de type polynomiales au bord du VER a été par la suite formalisée par Rodin [7]. Pour des conditions de la forme (2) la densité d'énergie élastique s'écrit :

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle_V = \langle t_i u_i \rangle_{\partial V} = \frac{1}{2} D_{ijk} \langle t_k x_i x_j \rangle_{\partial V} \quad (3)$$

Le dernier terme dans (3) définit la variable duale associée à D_{ijk} , notée T_{ijk} , que l'on désignera par la suite hypercontrainte :

$$T_{ijk} = \frac{1}{2} \langle t_k x_i x_j \rangle_{\partial V} \quad (4)$$

Le principe d'homogénéisation adapté ici pour la détermination des propriétés effectives d'un milieu du second gradient est alors illustré sur la figure 1. Similairement au cadre de l'homogénéisation classique, on va rechercher la relation liant T_{ijk} à D_{ijk} , pour cela il est nécessaire de déterminer les champs de déformation locaux ε_{ij} et σ_{ij} pour des conditions de la forme (2). On peut également substituer au jeu de variable (D_{ijk}, T_{ijk}) les variables (E_{ijk}, Σ_{ijk}) , E_{ijk} étant le gradient de la déformation macroscopique, $E_{ijk} = \nabla_k (\nabla_j U_i + \nabla_i U_j) / 2$. E_{ijk} est lié à D_{ijk} par :

$$E_{ijk} = \frac{1}{2} (D_{ikj} + D_{jki}) \quad \Leftrightarrow \quad D_{ijk} = E_{ikj} + E_{jki} - E_{ijk} \quad (5)$$

Σ_{ijk} est la variable duale associée à E_{ijk} liée à T_{ijk} par :

$$\Sigma_{ijk} = T_{ikj} + T_{jki} - T_{ijk} \quad \Leftrightarrow \quad T_{ijk} = \frac{1}{2} (\Sigma_{ikj} + \Sigma_{jki}) \quad (6)$$

3 Décomposition du problème

Le champs de déplacement local, u_i , la déformation ε_{ij} et la contrainte microscopique σ_{ij} , sont solutions d'un problème d'inhomogénéité à l'échelle locale :

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{cases} \quad \text{with : } C_{ijkl}(x) = \begin{cases} C_{ijkl}^M & \forall x \in V_M \\ C_{ijkl}^I & \forall x \in V_I \end{cases} \quad (7)$$

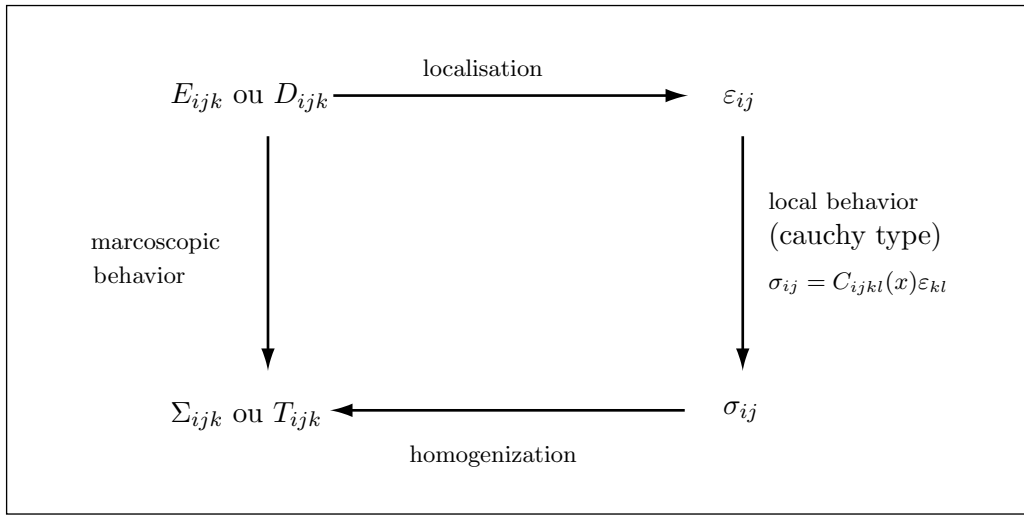


FIGURE 1 – Principe de l’homogénéisation pour la détermination des propriétés effectives d’un milieu du second gradient.

auquel on adjoint les conditions classiques de continuité du champ de déplacement et du vecteur contrainte sur les interfaces inclusions/matrice. De manière classique, la solution élastique peut se décomposer en la somme de sous problèmes :

P1 : la solution d’un problème que l’on qualifiera par la suite ”d’homogène”, c’est à dire consistant en un volume de module élastique C_{ijkl}^M et soumis au champ de déplacement $u_i^d(x)$.

P2 : la solution d’un problème d’inclusion consistant en un volume de module C_{ijkl}^M soumis à un champ de déformation libre ϵ_{ij}^* dans le sous-domaine V_I caractérisant le volume des inclusions.

- *Considérons tout d’abord le problème P1* :

Lorsque l’on considère pour le problème homogène des conditions aux limites de la forme (2) le champ de déplacement ne peut prendre la même forme dans le volume. En effet le champ de contrainte associé à ce champ de déplacement s’écrit $\sigma_{ij} = C_{ijpq}^M E_{pqr} x_r$ et ne vérifie pas l’équilibre local, car $\sigma_{ij,j} = C_{ijpq}^M E_{pqj} \neq 0$.

En conséquence le champ de déplacement doit contenir un champ supplémentaire, qui s’annule sur le bord du VER et permettant de vérifier l’équilibre local. On écrira donc :

$$u_i = \frac{1}{2} D_{pqi} x_p x_q + V_i(x) \quad \text{avec : } V_i(x) = 0 \quad \forall x \in \partial V \quad (8)$$

Le champ de contrainte associé s’écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijpq}^M (E_{pqr} x_r + V_{p,q}) \quad \text{avec : } C_{ijpq}^M V_{p,qj} = -C_{ijpq}^M E_{pqj} \quad \forall x \in V \quad (9)$$

Le moment des contraintes associé à ce champ de contrainte s’écrit alors :

$$\langle \sigma_{ij} x_k \rangle_V = C_{ijpq}^M E_{pqr} \langle x_r x_k \rangle_V - C_{ijkl}^M \langle V_l(x) \rangle_{\partial V} \quad (10)$$

Dans laquelle $V_i(x)$ reste toutefois indéterminé. L’équilibre local montre que le champ V_i dépend linéairement de E_{ijk} on posera donc $V_i = \mathcal{A}_{ipqr}(x) E_{pqr}$. Il est clair que le tenseur $\mathcal{A}_{ipqr}(x)$ fait intervenir la forme du VER et par conséquent une expressions explicite ne pourra être obtenue qu’en considérant une géométrie ”simple” pour le contour du VER. On introduit :

$$C_{ijkpqr}^M = C_{ijpq}^M \langle x_r x_k \rangle_V - C_{ijkl}^M \langle \mathcal{A}_{lpqr}(x) \rangle_{\partial V} \quad (11)$$

si bien que la relation (12) puisse se récrire sous la forme compacte :

$$\langle \sigma_{ij} x_k \rangle_V = C_{ijkpqr}^M E_{pqr} \quad (12)$$

- Considérons maintenant le problème P2 :

Le problème d'inclusion, posé sur le VER, s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0 \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl}^M (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned} \right\} \quad \forall x \in V \quad (13)$$

$$u_i = 0 \quad \forall x \in \partial V$$

où ε_{ij}^* sont les composantes du champ de déformation libre, définies par :

$$\varepsilon_{ij}^* = \begin{cases} \Pi_{ijpq} \varepsilon_{pq} & \text{dans les inclusions} \\ 0 & \text{en dehors des inclusions} \end{cases} \quad (14)$$

avec : $\Pi_{ijkl} = I_{ijkl} - (C^M)_{ijpq}^{-1} C_{pqkl}^I$.

Le moment des contraintes $\langle \sigma_{ij} x_k \rangle_V$ est donné par :

$$\langle \sigma_{ij} x_k \rangle_V = C_{ijpq}^M \langle \varepsilon_{pq} x_k \rangle_V - C_{ijpq}^M \langle \varepsilon_{pq}^* x_k \rangle_V \quad (15)$$

Concernant le terme $\langle \varepsilon_{pq} x_k \rangle_V$, l'utilisation du théorème de la divergence et de la condition de nullité du champ de déplacement sur le contour du VER pour le problème P2 donne :

$$\langle \sigma_{ij} x_k \rangle_V = -C_{ijkl}^M \langle u_l \rangle_V - C_{ijpq}^M \langle \varepsilon_{pq}^* x_k \rangle_V \quad (16)$$

L'hypercontrainte Σ_{ijk} alors obtenue à partir de (12) et (16).

4 Cas d'une distribution isotrope d'inclusions

On se propose de décrire la démarche permettant d'obtenir les propriétés effectives d'un composite constitué d'inclusions ellipsoïdales distribuées de manière isotrope et en faible concentration. Le schéma proposé se base sur une généralisation du problème d'inhomogénéité d'Eshelby. Avant tout, on effectue les hypothèses suivantes :

\mathcal{HYP} : On considère une distribution isotrope d'inclusions, on choisit alors un VER de forme sphérique et on note par b son rayon.

Réexaminons maintenant les problèmes P1 et P2 pour l'hypothèse d'un VER sphérique.

- Solution du problème homogène, P1 :

Lorsque le VER est de forme sphérique, le champ de déplacement au sein du volume du VER conserve une forme quadratique il est alors aisé de déterminer le champ $V_i(x)$ qui intervient dans l'expression du champ de déplacement (8). Celui-ci s'écrit :

$$V_i(x) = \frac{1}{2(\lambda_M + 4\mu_M)} (b^2 - r^2) C_{irpq}^M E_{pqr} \quad (17)$$

ou l'on a posé $r^2 = x_i x_i$. Le champ de déformation s'écrit donc :

$$\varepsilon_{ij} = L_{ijk} x_k, \quad \text{avec : } L_{ijk} = E_{ijk} - \frac{1}{2(\lambda_M + 4\mu_M)} (\delta_{ik} C_{jr pq}^M + \delta_{jk} C_{ir pq}^M) E_{pqr} \quad (18)$$

Finalement, le tenseur de composantes C_{ijkpqr}^M s'écrit :

$$C_{ijkpqr}^M = \frac{2b^2 \mu_M}{5} [\mathcal{J}_{ijkpqr}^1 + \mathcal{J}_{ijkpqr}^2] + \frac{36b^2 \mu_M k_M}{5(3k_M + 10\mu_M)} \left[\mathcal{J}_{ijkpqr}^3 - \frac{1}{2} \mathcal{J}_{ijkpqr}^5 \right] \quad (19)$$

où les \mathcal{J}^n pour $n = 1..6$ est une base pour les tenseurs d'ordre six isotropes donnés en annexe.

- Estimation de la déformation libre pour le problème P2 :

Dans le cas d'un VER sphérique l'équation (16) peut être simplifié, plus précisément le terme $\langle u_i \rangle_V$ peut s'exprimer à partir de la déformation libre ε_{ij}^* . Pour cela partons de l'égalité :

$$\langle \sigma_{ij} x_j \rangle_V = \frac{1}{2} \langle \sigma_{ip} n_p \rangle_{\partial V} = 0 \quad (20)$$

L'utilisation de cette dernière relation dans (10) donne :

$$\langle u_i \rangle_V = -\frac{1}{\lambda_M + 4\mu_M} C_{irpq}^M \langle \varepsilon_{pq}^* x_r \rangle_V \quad (21)$$

Ainsi on a :

$$\langle \sigma_{ij} x_k \rangle_V = -\frac{5}{b^2} C_{ijkpqr}^M \langle \varepsilon_{pq}^* x_r \rangle_V \quad (22)$$

Finalement l'hypercontrainte est définie en sommant les solutions pour les problèmes $P1$ et $P2$, on a alors :

$$\Sigma_{ijk} = C_{ijkpqr}^M \left[E_{pqr} - \frac{5}{b^2} \langle \varepsilon_{pq}^* x_r \rangle_V \right] \quad (23)$$

Il reste donc à déterminer l'expression de la déformation libre ε_{ij}^* dans les inclusions. Pour cela on se propose d'appliquer un schéma dilué en s'appuyant sur une généralisation du problème d'inhomogénéité d'Eshelby. Considérons une inhomogénéité de forme ellipsoïdale localisée en $x_i = 0$ et soumise à

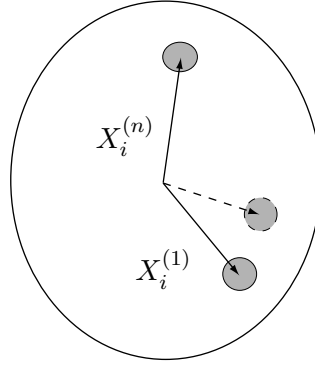


FIGURE 2 – VER contenant N inclusions ellipsoïdales localisées en $X_i^{(n)}$ pour $n = 1..N$

l'infini à un champ de déformation de la forme $\varepsilon_{ij}^\infty = e^\infty + e_{ijk}^\infty x_k$ alors le champ de déformation libre pour le problème d'inclusion équivalent s'écrit (voire [6, 1]) :

$$\varepsilon_{ij}^* = B_{ijpq} e_{pq}^\infty + B_{ijkpqr} e_{pqr}^\infty x_k \quad (24)$$

où B_{ijpq} et B_{ijkpqr} sont donnés dans [6]. Dans le problème qui nous intéresse ici on considère une inclusion localisée au sein du VER en $x_i = X_i^{(n)}$ et soumise à un champ de déformation de la forme $L_{ijk} x_k$. Le champ de déformation libre s'écrit alors dans cette inclusion :

$$\varepsilon_{ij}^* = B_{ijpq} L_{pqr} X_r^{(n)} + B_{ijkpqr} L_{pqr} (x_k - X_k^{(n)}) \quad \forall x \in V_i \quad (25)$$

L'hypercontrainte Σ_{ijk} est alors obtenue en injectant (25) dans (23).

Références

- [1] **R. J. Asaro, D. M. Barnett.**
The non-uniform transformation strain problem for an anisotropic ellipsoidal inclusion. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. Vol. 23, Issue 1, pp. 77-83, 1975.
- [2] **S. Forest.**
Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes. Presses de l'Ecole des Mines, 2006.

- [3] **M. Gologanu, J.B. Leblond, G. Perrin and J. Devaux.**
Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals. Continuum Micromechanics, ed. P. Suquet, Springer Verlag, 1997.
- [4] **R.D. Mindlin, H.F. Tiersten.**
Effect of couple stresses in linear elasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis. Vol. 11, pp. 415-448, 1962.
- [5] **R.D. Mindlin.**
Micro-structure in linear elasticity. Archive for Rational Mechanics and Analysis. Vol. 16, pp. 51-78, 1964.
- [6] **T. Mura.**
Micromechanics of Defects in Solids. Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1987.
- [7] **G.J. Rodin.**
Higher-order macroscopic measures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. Vol. 55, pp. 1103-1119, 2007.
- [8] **R. Toupin.**
Elastic materials with couple-stresses. Archive for Rational Mechanics and Analysis. Vol. 11, Issue 1, pp. 385-414, 1962.
- [9] **R. Toupin.**
Theories of elasticity with couple-stress. Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 17, Issue 2, pp. 85-112, 1964.

Annexe :

Les \mathcal{J}^n pour $n = 1..6$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}^1 &= \frac{1}{15}(5\mathcal{I}^2 + 10\mathcal{I}^5 - 2\mathcal{I}^3 - 2\mathcal{I}^4 - \mathcal{I}^1 - 4\mathcal{I}^6) \\
 \mathcal{J}^2 &= \frac{1}{3}(2\mathcal{I}^2 - 2\mathcal{I}^5 + \mathcal{I}^3 + \mathcal{I}^4 - \mathcal{I}^1 - \mathcal{I}^6) \\
 \mathcal{J}^3 &= \frac{1}{5}(2\mathcal{I}^1 - \mathcal{I}^4), \quad \mathcal{J}^4 = \frac{1}{5}(3\mathcal{I}^6 - \mathcal{I}^3) \\
 \mathcal{J}^5 &= \frac{1}{5}(2\mathcal{I}^3 - \mathcal{I}^6), \quad \mathcal{J}^6 = \frac{1}{5}(3\mathcal{I}^4 - \mathcal{I}^1)
 \end{aligned} \tag{26}$$

où les \mathcal{I}^n pour $n = 1..6$ sont définis par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{ijkpqr}^1 &= \delta_{ij}\delta_{pq}\delta_{kr}, \quad \mathcal{I}_{ijkpqr}^2 = I_{ijpq}\delta_{kr} \\
 \mathcal{I}_{ijkpqr}^3 &= I_{ijkr}\delta_{pq}, \quad \mathcal{I}_{ijkpqr}^4 = I_{pqkr}\delta_{ij} \\
 \mathcal{I}_{ijkpqr}^5 &= \frac{1}{2}(I_{ijpr}\delta_{kq} + I_{ijqr}\delta_{kp}), \quad \mathcal{I}_{ijkpqr}^6 = \frac{1}{2}(I_{pqir}\delta_{jk} + I_{pqjr}\delta_{ik})
 \end{aligned} \tag{27}$$

et $I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$.