



HAL
open science

Modèle membranaire pour les plaques fortement hétérogènes obéissant à une loi hyperélastique de type Ciarlet Geymonat avec prise en compte des effets de bord en utilisant la MAPDD (method of asymptotic partial decomposition of domain).

Erick Pruchnicki

► **To cite this version:**

Erick Pruchnicki. Modèle membranaire pour les plaques fortement hétérogènes obéissant à une loi hyperélastique de type Ciarlet Geymonat avec prise en compte des effets de bord en utilisant la MAPDD (method of asymptotic partial decomposition of domain).. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. <hal-03390805>

HAL Id: hal-03390805

<https://hal.science/hal-03390805v1>

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Modèle membranaire pour les plaques fortement hétérogènes obéissant à une loi hyperélastique de type Ciarlet Geymonat avec prise en compte des effets de bord en utilisant la MAPDD (method of asymptotic partial decomposition of domain).

E. Pruchnicki

EPUL Cité Scientifique, Avenue Paul Langevin, F 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex

Résumé :

Pour les plaques et les coques fortement hétérogènes de St Venant Kirchhoff, Pruchnicki [1], [2] a montré que le modèle d'ordre le plus élevé possible est de type membranaire. Je propose une généralisation lorsque les constituants obéissent à une loi plus réaliste de Ciarlet Geymonat. Je propose de montrer que l'on peut tenir compte des effets de bord en adaptant en non linéaire la méthode MAPDD (method of asymptotic partial decomposition of domain) de Panasenko [3]

Abstract :

For both the St Venant-Kirchhoff's strongly heterogeneous plaques and shells, Pruchnicki [1], [2] showed that the model of the highest possible order is of membrane type. I propose a generalization when constituents obey to a more realistic law of Ciarlet Geymonat. I suggest showing that we can take into account edge effects by adapting in nonlinear the method MAPDD (method of asymptotic partial decomposition of domain) of Panasenko [3].

Mots clefs: Analyse asymptotique, non linéaire, méthode variationnelle, effets de bord

1 Introduction

Une plaque est caractérisée par une dimension faible par rapport aux deux autres. Pour cette raison la méthode de développement asymptotique peut être utilisée avantageusement de façon à justifier en élasticité linéaire un ensemble de modèle à différents ordres pour les plaques homogènes Ciarlet [4] et hétérogènes Lewiński, Telega [5]. Pour les plaques fortement hétérogènes, la dimension de la microstructure suivant le plan moyen de la plaque introduit un autre petit paramètre. L'ordre de grandeur de la dimension de cette microstructure peut être comparable plus petit ou plus grand que l'épaisseur. Cependant Lewiński, Telega [5] ont montré que le cas le plus important est celui pour lequel ces deux ordres de grandeur sont comparables car les deux autres s'en déduisent.

Dans ce travail, j'étends les résultats de Pruchnicki [1] présentés pour des plaques dont les matériaux obéissent à la loi hyperélastique la plus simple c'est-à-dire celle de St Venant-Kirchhoff. Cependant l'énergie libre de cette loi de comportement n'est pas physiquement acceptable car elle n'interdit pas des déformations volumiques nulles c'est-à-dire que mathématiquement son énergie libre ne tend pas vers l'infini lorsque la déformation volumique tend vers zéro. C'est pourquoi pour éviter ce problème, une loi hyperélastique plus réaliste de Ciarlet Geymonat est considérée dans cet article. On utilise la méthode des développements asymptotiques et on démontre que le terme de plus bas ordre du champ de déplacement est nécessairement d'ordre zéro et qu'il satisfait à un problème de plaque membranaire.

En ce qui concerne la prise en compte des effets de bord, la méthode de Dumontet [6] est uniquement utilisable en élasticité linéaire. Celle de Sanchez-Palencia [7] peut être utilisée pour traiter le cas des structures hyperélastiques (Pruchnicki [8]). En tout cas, il n'existe pas de méthode pour traiter les effets de bord en élastoplasticité. La méthode MAPDD (method of asymptotic partial decomposition of domain) de Panasenko [3], présentée en élasticité linéaire unidimensionnel, n'utilise cependant pas l'hypothèse de linéarité, c'est pourquoi cette méthode peut être adaptée pour traiter les effets de bord en non linéaire. Pour le cas général tridimensionnel en non linéaire, il faudra imposer de façon systématique la continuité du champs

de déplacement au raccordement entre la zone de bord et la zone éloignée des bords ou le champ de déplacement est supposé pouvoir être écrit sous la forme d'un développement asymptotique.

2 Le problème aux limites non linéaire pour les plaques

On considère sur la figure1, une plaque fortement hétérogène d'épaisseur ε et de surface moyenne rectangulaire $\omega =]0,b[\times]0,c[$ occupant le domaine $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[$ ($\varepsilon > 0$). Sa frontière est décomposée en deux parties; la première est composée des faces supérieure et inférieure $\Gamma^\varepsilon = \omega \times (\{-\varepsilon/2\} \cup \{\varepsilon/2\})$; la seconde est sa partie latérale $\Gamma_{lat}^\varepsilon = \partial\omega \times]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[$. Cette plaque est hétérogène et la dimension des hétérogénéités, supposée être du même ordre que son épaisseur, est très petite vis-à-vis de l'échelle globale $x'=(x_1, x_2)$. On définit dans le plan moyen également l'échelle locale $y'=(y_1, y_2)$ ainsi que le ratio entre les échelles globale et locale $\varepsilon = x'^\alpha / y'^\alpha$. La microstructure de la plaque est périodique et elle est définie sur sa cellule de base $Y^\varepsilon = Y' \times]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[$ ($Y' =]0,1[\times]0,1[$). La frontière de la cellule de base est constituée de sa partie latérale $\partial Y_L^\varepsilon = \partial Y' \times]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[$ et de ses faces inférieures et supérieures

$$\partial Y_\pm^\varepsilon = \partial Y' \times (\{-\varepsilon/2\} \cup \{\varepsilon/2\}).$$

Afin de simplifier, on suppose que cette plaque est sollicitée par des charges mortes périodiques suivant l'échelle locale. Les vecteurs f^ε et h^ε représentent respectivement les charges de volume et de surface agissant sur les parties inférieure et supérieure de la plaque. On suppose que la plaque est encastree sur sa frontière latérale mais la théorie présentée peut être étendue à d'autres types de condition aux limites. Le champ de déplacement solution est représenté par le vecteur u^ε . Tous ces vecteurs dépendent de (x^ε, y') avec $x^\varepsilon = (x_1, x_2, x_3^\varepsilon)$. L'application linéaire tangente est définie par $F^\varepsilon(u^\varepsilon) = I + \text{grad } u^\varepsilon$ et les composantes du tenseur $\text{grad } u^\varepsilon$ sont données par :

$$(\text{grad } u^\varepsilon)_{i\alpha} = \partial_{x_\alpha} u_i^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_\alpha} u_i^\varepsilon, \quad (\text{grad } u^\varepsilon)_{i3} = \partial_{x_3^\varepsilon} u_i^\varepsilon.$$

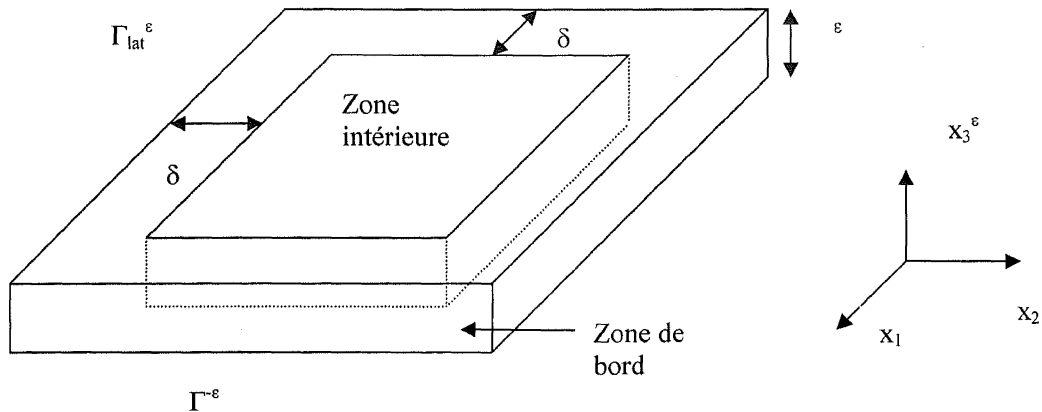


figure 1 : Schématisation de la plaque avec sa zone intérieure et sa zone de bord

On considère que la densité d'énergie des matériaux constitutifs de la plaque est définie par (Ciarlet et Geymonat[9])

$$W(\mathbf{F}^\varepsilon) = a^\varepsilon C_{ii}^\varepsilon(\mathbf{F}^\varepsilon) + b^\varepsilon (\text{Cof } \mathbf{C}^\varepsilon(\mathbf{F}^\varepsilon))_{ii} + \Gamma^\varepsilon(\det(\mathbf{C}^\varepsilon(\mathbf{F}^\varepsilon))) + e^\varepsilon,$$

avec $\mathbf{C}^\varepsilon(\mathbf{F}^\varepsilon) = \mathbf{F}^{\varepsilon T} \mathbf{F}^\varepsilon$

$$a^\varepsilon > 0, b^\varepsilon > 0, \Gamma^\varepsilon(\delta) = c^\varepsilon \delta - d^\varepsilon \ln(\delta), c^\varepsilon > 0, d^\varepsilon > 0, e^\varepsilon \in \mathbb{R}$$

3 Le problème de minimisation tridimensionnel à deux échelles

Afin de supprimer la difficulté associée à la dépendance en ε du domaine Ω^ε occupé, on considère le changement de variable suivant à toute fonction g^ε , on associe une fonction $g(\varepsilon)$ tel que $g^\varepsilon(x', y', x_3^\varepsilon) = g(\varepsilon)(x', y)$ avec $y=(y_1, y_2, y_3)$. Ainsi Y^ε , ∂Y_L^ε , $\partial Y_\pm^\varepsilon$, Γ_{lat}^ε et $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[$ deviennent respectivement $Y = Y' \times]-1/2, 1/2[$, $\partial Y_L = \partial Y' \times]-1/2, 1/2[$, $\partial Y_\pm = \partial Y' \times (\{-1/2\} \cup \{1/2\})$, $\Gamma_{lat} = \partial \omega \times]-1/2, 1/2[$ et $\Omega = \omega \times]-1/2, 1/2[$. Le problème $P(\varepsilon, \omega \times Y)$ de minimisation de l'énergie totale est donnée par :

$$\text{Trouver } \mathbf{v}(\varepsilon) \in \mathbf{V}(\varepsilon, \omega \times Y) \text{ telle que } J(\varepsilon)(\mathbf{v}(\varepsilon)) = \inf_{\mathbf{u}(\varepsilon) \in \mathbf{V}(\varepsilon, \omega \times Y)} J(\varepsilon)(\mathbf{u}(\varepsilon))$$

$$\mathbf{V}(\varepsilon, \omega \times Y) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{U}(\omega \times Y, \mathbb{R}^3) : \det(\mathbf{F}(\varepsilon)(\mathbf{u})) > 0 \text{ et } \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial \omega \times Y \},$$

Dans lequel $\mathbf{U}(\omega \times Y, \mathbb{R}^3)$ est un espace de fonction suffisamment régulière que l'on ne spécifie pas du fait que la formulation est formelle. L'énergie totale $J(\varepsilon)$ est donnée par

$$J(\varepsilon)(\mathbf{u}(\varepsilon)) = I(\varepsilon)(\mathbf{u}(\varepsilon)) - l(\varepsilon)(\mathbf{u}(\varepsilon))$$

$$I(\varepsilon)(\mathbf{u}(\varepsilon)) = \varepsilon \int_{\omega \times Y} W(\varepsilon)(\mathbf{F}(\varepsilon)) dx' dy,$$

$$l(\varepsilon)(\mathbf{u}(\varepsilon)) = \varepsilon \int_{\omega \times Y} f_i(\varepsilon) u_i(\varepsilon) dx' dy + \int_{\omega \times \partial Y_\pm} h_i(\varepsilon) u_i(\varepsilon) da.$$

4 Présentation de la méthode des développements asymptotiques

4.1 Hypothèse de la méthode des développements asymptotiques

La méthode formelle des développements asymptotiques à deux échelles est basé sur le fait que les vecteurs champs de déplacement $\mathbf{u}(\varepsilon)$ et de chargement $\mathbf{f}(\varepsilon)$ et $\mathbf{g}(\varepsilon)$ peuvent se mettre sous la forme

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}', \mathbf{y}^\varepsilon) = \mathbf{u}(\varepsilon)(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \dots,$$

$$\mathbf{f}^\varepsilon(\mathbf{x}', \mathbf{y}^\varepsilon) = \mathbf{f}(\varepsilon)(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \mathbf{f}^0(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{f}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{f}^2(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \dots,$$

$$\mathbf{h}^\varepsilon(\mathbf{x}', \mathbf{y}^\varepsilon) = \mathbf{h}(\varepsilon)(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \varepsilon \mathbf{h}^1(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{h}^2(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \dots.$$

En effet les éventuels termes en puissance négative de ε sont forcément nuls (Pruchnicki [1], [2]; Miara [10]). A partir de maintenant \mathbf{u} et \mathbf{v} représentent les suites $(\mathbf{u}^i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\mathbf{v}^i)_{i \in \mathbb{N}}$.

4.2 La procédure récursive

La solution $\mathbf{v}(\varepsilon)$ du problème $P(\varepsilon, \omega \times Y)$ peut être obtenue par résolution de la suite de problèmes variationnels. Cette procédure récursive a été introduite par Pantz [11]

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots) \in \prod_{n=-5}^{\infty} \mathbf{V}_n(\omega \times Y), \text{ avec}$$

$$\mathbf{V}_{n+1}(\omega \times Y) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{V}_n(\omega \times Y) : J^n(\mathbf{v}) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n(\omega \times Y)} J^n(\mathbf{u}) \right\}$$

$$\mathbf{V}_{-5}(\omega \times Y) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{U}(\omega \times Y, \mathbb{R}^3)^N : \sum_{n=-1}^{\infty} \mathbf{v}^n \varepsilon^n \in \mathbf{V}(\varepsilon, \omega \times Y) \right\}$$

Le problème $P_n(\omega \times Y)$ est donné par

$$\text{Trouver } \mathbf{v} \in \mathbf{V}_n(\omega \times Y) \text{ tel que } J^n(\mathbf{v}) = \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n(\omega \times Y)} J^n(\mathbf{u})$$

La résolution des problèmes $P_n(\omega \times Y)$ pour $n \leq 0$ montre que

$$\mathbf{V}_0(\omega \times Y) = \mathbf{V}_1(\omega \times Y) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{U}(\omega \times Y, \mathbb{R}^3)^{\mathbb{N}} : \det \mathbf{F}^0(\mathbf{v}) > 0, \exists \tilde{\mathbf{v}}^0 \in \mathbf{U}(\omega, \mathbb{R}^3) \right. \\ \left. \text{tel que } \mathbf{v}^0(\mathbf{x}', y) = \tilde{\mathbf{v}}^0(\mathbf{x}'), \text{ et } \mathbf{v}^0 = 0 \text{ sur } \partial\omega \times Y \right\}.$$

5 Le modèle membranaire non linéaire

Le problème de plaque membranaire non linéaire est obtenu à partir de la résolution du problème $P_1(\omega \times Y)$. En effet $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \dots)$ est une solution du problème $P_1(\omega \times Y)$ alors le premier terme \mathbf{v}^0 du développement asymptotique du champ de déplacement est solution du problème global de minimisation suivant :

$$J_m(\mathbf{v}^0) = \inf_{\mathbf{u}^0 \in \mathbf{U}^0(\omega, \mathbb{R}^3)} J_m(\mathbf{u}^0),$$

dans lequel $\mathbf{U}^0(\omega, \mathbb{R}^3) = \{ \mathbf{u}^0 \text{ tel que } \mathbf{u}^0 = 0 \text{ sur } \partial\omega \}$.

L'énergie membranaire est définie par

$$J_m(\mathbf{u}^0) = \int_{\omega} W_m(\mathbf{F}^{*0}(\mathbf{u}^0)) dx' - \int_{\omega} \left(\int_Y f_i^0 dy + \int_{\partial Y_{\pm}} h_i^1 dy' \right) u_i^0 dx',$$

Dans laquelle \mathbf{F}^{*0} est une matrice 3×2 formée par les première et deuxième de \mathbf{F}^0 et W_m est l'énergie élastique membranaire obtenu par calcul du problème local de minimisation suivant

$$W_m(\mathbf{F}^{*0}(\mathbf{u}^0)) = \inf_{\bar{\mathbf{u}}^1 \in \mathbf{U}^1(\omega \times Y, \mathbb{R}^3)} I_Y(\mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{u}}^1)$$

$$I_Y(\mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{u}}^1) = \int_Y W^0(\mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{u}}^1) dy \text{ et } \mathbf{U}^1(\omega \times Y, \mathbb{R}^3) \text{ est donnée par}$$

$$\mathbf{U}^1(\omega \times Y, \mathbb{R}^3) = \left\{ \bar{\mathbf{u}}^1 \in \mathbf{U}^{1*}(\omega \times Y, \mathbb{R}^3), \det \mathbf{F}^0(\mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{u}}^1) > 0, \int_Y \bar{\mathbf{u}}^1 dy = 0 \right\}$$

$\mathbf{U}^{1*}(\omega \times Y, \mathbb{R}^3)$ est un espace qui peut être fixé mathématiquement de tel sortes que le problème de minimisation permettant d'obtenir l'énergie membranaire ai mathématiquement une solution (Ciarlet [12], Ball [13]). L'énergie W^0 est donné par

$$W^0(\mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{u}}^1) = a C_{ii}^0(\mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{u}}^1) + b Cof_{ii}^0(\mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{u}}^1) + c D^0(\mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{u}}^1) - d L^0(\mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{u}}^1)$$

6 La formulation variationnelle des problèmes aux limites

Le problème variationnel bidimensionnel de membrane non linéaire consiste à trouver $\mathbf{v}^0 \in \mathbf{U}^0(\omega, \mathbb{R}^3)$ tel que pour tout $\mathbf{v}^{0*} \in \mathbf{U}^0(\omega, \mathbb{R}^3)$, on ai :

$$\int_{\omega} \left(\Pi_{i\alpha}^0(\text{grad}_{\mathbf{x}'} \mathbf{v}^0) \partial_{x_\alpha} v_i^{0*} + \left(\int_Y f_i^0 dy + \int_{\partial Y_{\pm}} h_i^1 dy' \right) v_i^{0*} \right) dx' = 0,$$

Le tenseur macroscopique Π^0 ($\Pi^0 = \int_Y \pi^0 dy$) est une fonction implicite de $\text{grad}_{\mathbf{x}'}(\mathbf{v}^0)$ obtenu par résolution du problème variationnel tridimensionnel non linéaire local : trouver

$$\bar{\mathbf{v}}^1 \in \mathbf{U}^1(\omega \times Y, \mathbb{R}^3) \text{ tel que}$$

$$\int_Y \pi_{ij}^0(\text{grad}_{\mathbf{x}'} \mathbf{v}^0, \text{grad}_y \bar{\mathbf{v}}^1) \partial_{y_j} \bar{u}_i^1 dy = 0, \quad \forall \bar{\mathbf{u}}^1 \in \mathbf{U}^{1*}(\omega \times Y, \mathbb{R}^3),$$

ou le premier tenseur de Piola-Kirchhoff d'ordre zéro est défini par

$$\pi_{ij}^0(\text{grad}_{\mathbf{x}'} \mathbf{v}^0, \text{grad}_y \bar{\mathbf{v}}^1) = \frac{\partial \widehat{W}^0(\mathbf{F}^0(\mathbf{v}^0, \bar{\mathbf{v}}^1))}{\partial F_{ij}^0}$$

$$\text{en posant } \widehat{W}^0(\mathbf{F}^0(\mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{u}}^1)) = W^0(\mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{u}}^1)$$

7 L'énergie membranaire non linéaire

Les propriétés d'indifférence matériel et d'isotropie de la densité d'énergie de Ciarlet-Geymonat induisent les mêmes propriétés pour l'énergie membranaire. La densité d'énergie de Ciarlet-Geymonat interdit les déformations volumiques négatives ou nulles car :

$$W(\mathbf{F}) \longrightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad \det(\text{grad}(\mathbf{F})) \longrightarrow 0^+.$$

Il est alors possible de montrer que la densité d'énergie membranaire satisfait la propriété suivante

$$W_m(\mathbf{F}^{*0}) \longrightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad \det(\mathbf{F}^{*0T} \mathbf{F}^{*0}) = |\mathbf{F}_1^{*0} \wedge \mathbf{F}_2^{*0}|^2 \longrightarrow 0^+$$

Ce qui signifie physiquement que tout pli de la surface moyenne est interdit.

8 Méthode de décomposition de domaine asymptotique pour la prise en compte des effets de bord

A proximité du bord latérale de la plaque, Γ_{lat} , l'hypothèse de périodicité dans la direction perpendiculaire au bord n'est plus respecté et il faudra considérer une zone frontière notée $\Omega_F = \omega_F \times [-1/2, 1/2]$ dont la largeur est δ (Figure 2).

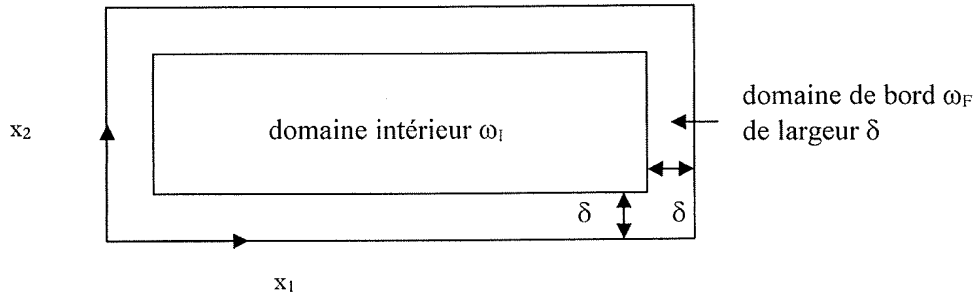


Figure 2 : Représentation de la zone de frontière et de la zone intérieure dans le plan moyen de la plaque

En élasticité linéaire et pour un matériau stratifié perpendiculairement au plan moyen de la plaque, il est démontré (Panasenko [3]) que la largeur δ de cette zone est de la forme $K \varepsilon |\ln(\varepsilon)|$ et il y a raccordement du champ de déplacement le long de la surface de séparation $\Gamma_S = \partial\omega_1 \times [-1/2, 1/2]$ entre la zone frontière Ω_F et la zone centrale de $\Omega_1 = \Omega - \Omega_F = \omega_1 \times [-1/2, 1/2]$ dans laquelle il est légitime d'approximer le champs de déplacement par un développement asymptotique. Cependant lorsque la microstructure locale est quelconque le champ de déplacement le long de cette surface de séparation Γ_S n'est pas a priori continu et il convient donc d'imposer cette condition supplémentaire. Le problème variationnel est par conséquent tridimensionnel sur la zone frontière Ω_F et bidimensionnel sur la zone centrale ω_1 et se formule de la façon suivante:

$$\mathbf{v}^0 \in U^0(\omega_1, \mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \mathbf{v} \in U(\Omega_F, \mathbb{R}^3) = \{ \mathbf{u} \in U^*(\Omega_F, \mathbb{R}^3), \det(\mathbf{I} + \text{grad}(\mathbf{u})) > 0 \} \quad \text{tel que}$$

$$\forall \mathbf{v}^{0*} \in U^0(\omega_1, \mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{v}^* \in U^*(\Omega_F, \mathbb{R}^3) = \{ \mathbf{v} \text{ régulière sur } \Omega_F, \text{ tel que } \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_{\text{lat}} \}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_F} \pi_{ij}(\mathbf{I} + (\text{grad } \mathbf{v})) (\text{grad } \mathbf{v}^*)_{ij} dx' dy_3 \\ & + \int_{\omega_1} \left(\Pi_{i\alpha}^0(\text{grad}_{\mathbf{x}'} \mathbf{v}^0) \partial_{x_\alpha} v_i^{0*} + \left(\int_Y f_i^0 dy + \int_{\partial Y_\pm} h_i^1 dy' \right) v_i^{0*} \right) dx' \\ & + \int_{\Gamma_F^\pm} h_i^1(\mathbf{x}', \frac{\mathbf{x}'}{\varepsilon}, \pm \frac{1}{2}) v_i^* \left(\mathbf{x}', \pm \frac{1}{2} \right) dx' + \int_{\Omega_F} f_i^0(\mathbf{x}', \frac{\mathbf{x}'}{\varepsilon}, y_3) v_i^*(\mathbf{x}', y_3) dx' dy_3 = 0 \end{aligned}$$

$\bar{\mathbf{v}}^1 \in \mathbf{U}^1(\omega_I \times Y, \mathbb{R}^3)$ est tel que

$$\int_Y \pi_{ij}^0(\text{grad}_{x'} \mathbf{v}^0, \text{grad}_y \bar{\mathbf{v}}^1) \partial_{y_j} \bar{u}_i^1 dy = 0, \quad \forall \bar{\mathbf{u}}^1 \in \mathbf{U}^{1*}(\omega_I \times Y, \mathbb{R}^3),$$

$$\mathbf{v}^0(x') + \varepsilon \bar{\mathbf{v}}^1(x', \frac{x'}{\varepsilon}, y_3) = \mathbf{v}(x', y_3) \quad \text{sur } \Gamma_s$$

en posant $\Gamma_F^\pm = \omega_F \times \{\pm 1/2\}$

La dernière condition exprime la condition de continuité du déplacement le long de la surface de séparation entre les deux zones intérieures et de frontière, elle peut être traitée numériquement de façon classique par la méthode de multiplicateur de Lagrange en rajoutant un terme dans la formulation variationnelle.

8 Conclusion

Cette méthode présentée dans le cas particulier du modèle membranaire de plaque est générale et peut être adaptée pour traiter, tous les problèmes d'effets de bord des structures périodiques lorsque la méthode des développements asymptotiques est utilisée comme approximation du déplacement loin des bords, notamment pour les structures tridimensionnelles en élastoplasticité. L'amélioration de la précision passe par la détermination de termes d'ordre supérieur du développement asymptotique du champ de déplacement.

References

- [1] Pruchnicki E., Nonlinearly elastic membrane model for heterogeneous plates : a formal asymptotic approach by using a new double scale variational formulation. 40, 2183-2202, Int.J.Engng.Sci(2002).
- [2] Pruchnicki E., Nonlinearly elastic membrane model for heterogeneous shells : a formal asymptotic approach by using a new double scale variational formulation, 84, 245-280, J Elasticity 2006.
- [3] Panasenko G. The partial homogenization: continuous and semi-discretized versions, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 17, 8, 1183-1209, 2007.
- [4] Ciarlet P.G., Theory of plates, Mathematical elasticity, vol II, North-Holland, 1997.
- [5] Lewiński T, Telega J.J., Plates, laminates and shells: Asymptotic analysis and homogenization. World Scientific. Singapore. New Jersey. London. Hong-Kong, 2000.
- [6] Dumontet H. (1986) Study of boundary layer problem in elastic composite materials, MAN Mathematical modelling and numerical analysis, vol 20, n°2, 265-286.
- [7] Sanchez-Palencia, E. (1985) Boundary layer and edge effects in composite. In: Homogenization techniques for composite media, pp 121-147. Lecture Notes in Physics, vol. 272. Berlin Heidelberg New-York: Springer.
- [8] Pruchnicki, E. (1998b) : Hyperelastic homogenized law for reinforced elastomer at finite strain with edge effects. Acta mechanica, 129, 139-162.
- [9] Ciarlet P.G., Geymonat G., Sur les lois de comportement en élasticité non linéaire compressible. 295, 423-426, C.R. Acad. Sc. Paris 1982.
- [10] Miara B., Nonlinearly elastic shell models: a formal asymptotic approach I. The membrane model. 142, 331-353, Arch. Rational. Mech. Anal. 1998.
- [11] Pantz O., Dérivation des modèles de plaques membranaires non linéaires à partir de l'élasticité tridimensionnelle. C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.I, 331: 171-74, 2000.
- [12] Ciarlet P.G., Mathematical elasticity, volume I : three-dimensional elasticity. Studies in mathematics and its applications. Vol 20, 1988.
- [13] Ball J.M., Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 63, 337-403.