



**HAL**  
open science

# Technique multiéchelle pour l'analyse du microflambage des composites

Saeid Nezamabadi, Hamid Zahrouni, Julien Yvonnet, Michel Potier-Ferry

► **To cite this version:**

Saeid Nezamabadi, Hamid Zahrouni, Julien Yvonnet, Michel Potier-Ferry. Technique multiéchelle pour l'analyse du microflambage des composites. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03390746

**HAL Id: hal-03390746**

**<https://hal.science/hal-03390746v1>**

Submitted on 21 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Technique multiéchelle pour l'analyse du microflambage des composites

S. NEZAMABADI<sup>a</sup>, H. ZAHROUNI<sup>a</sup>, J. YVONNET<sup>b</sup>, M. POTIER-FERRY<sup>a</sup>

a. Université Paul Verlaine de Metz, Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, UMR CNRS 7554 ISGMP, Ile de Saulcy 57045, Metz Cedex 01 France

b. Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, FRE CNRS 3160, 5 Bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 02, France

## Résumé :

Nous proposons dans cette étude une technique numérique qui combine la méthode des éléments finis multiéchelles et la méthode asymptotique numérique. Cette procédure permet de traiter les instabilités des matériaux hétérogènes à la fois au niveau microscopique et au niveau macroscopique. Une application aux matériaux composites à fibres longues sera détaillée. Le comportement élastoplastique de la matrice est considéré dans cette étude.

## Abstract :

We propose in this study a numerical technique which combines the multiscale finite element method and the asymptotic numerical method. This procedure allows dealing with the instabilities of heterogeneous materials at both microscopic and macroscopic scales. An application to long fiber composites will be detailed. The elastoplastic behaviour of the matrix is considered in this study.

**Mots clés :** Méthode asymptotique numérique, Méthode des éléments finis multiéchelles, Microflambage, Instabilités, Composite à fibres longues.

## 1 Introduction

Le microflambage des fibres est l'un des plus célèbres phénomènes d'instabilité dans le cadre des matériaux hétérogènes et l'un des mécanismes principaux de rupture des composites à fibres longues sous le mode de compression. Pour prédire correctement ce mécanisme, il est nécessaire de prendre en compte la présence des fibres avec la courbure initiale et le comportement non linéaire de la matrice [1]. Dans ce travail, nous proposons une technique numérique efficace, dans le cadre des matériaux hétérogènes, afin d'analyser le microflambage plastique des composites à fibres longues. La présente technique qui est en mesure de traiter les instabilités au niveau macro et micro, a été présentée dans [2]. Dans ce travail, on combine la méthode des éléments finis multiéchelles (EF<sup>2</sup>) [3] et la méthode asymptotique numérique (MAN) [4]-[5]. Dans la méthode EF<sup>2</sup>, on extrait à partir d'un problème microscopique associé à un volume élémentaire représentatif (VER), les contraintes macroscopiques à chaque point matériel de la structure macroscopique.

La MAN est basée sur le développement des problèmes non linéaires sous la forme de séries entières qui sont tronquées à des ordres élevés. Cela permet d'obtenir une série de problèmes linéaires qui sont résolus de façon récursive. En conséquence, dans le cadre de l'homogénéisation, on peut construire le tenseur de localisation en utilisant le principe de superposition. Ces tenseurs sont les mêmes pour tous les problèmes linéaires déduits de la procédure de perturbation. Donc, une relation explicite de comportement au niveau macroscopique est calculée pour chaque pas asymptotique. En outre, la longueur de pas est naturellement adaptative et estimée a posteriori en utilisant les termes de la série calculés précédemment. Ce n'est pas le cas pour les algorithmes classiques itératifs basés sur la procédure de Newton-Raphson. Cet avantage permet de suivre des courbes de réponse complexes.

## 2 Formulation du problème mécanique

On peut écrire la forme faible du problème macroscopique dans un domaine  $\Omega$  comme suit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \bar{\mathbf{P}} : \delta \bar{\mathbf{F}} d\Omega = \lambda \mathbf{T}_{ext}(\delta \bar{\mathbf{u}}) & \text{dans } \Omega, \\ \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}) = \hat{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}) & \text{sur } \partial\Omega_u, \end{cases} \quad (1)$$

où  $\bar{\mathbf{P}}$ ,  $\bar{\mathbf{F}}$ ,  $\lambda$  et  $\mathbf{T}_{ext}$  sont la première contrainte de Piola-Kirchhoff, le gradient de déformation, le paramètre de chargement et le travail des efforts extérieurs, respectivement. La barre sur les variables indique les quantités

macroscopiques. La relation de comportement macroscopique n'est pas connue explicitement, elle sera estimée à partir d'un modèle microscopique pour lequel on connaît les lois de comportement de ses constituants. Ainsi, la forme faible du problème microscopique est définie pour un volume élémentaire représentatif qui occupe un domaine  $\omega$ , comme suit :

$$\int_{\omega} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, d\omega = 0, \quad (2)$$

où  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{F}$  sont la première contrainte de Piola-Kirchhoff et le gradient de déformation au point  $\mathbf{X}$  au niveau microscopique. Différents types de conditions aux limites peuvent être considérés au niveau microscopique telles que déformations linéaires, tractions uniformes ou conditions de périodicité. On considère dans ce travail les conditions de périodicité sur les bords du VER :

$$\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = (\bar{\mathbf{F}} - \mathbf{I})(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \text{ sur } \partial\omega, \quad (3)$$

où  $\mathbf{u}$  est le déplacement aux bords du VER et les exposants + et - sont associés aux indices de noeud sur les bords opposés du VER.

Au niveau microscopique, on suppose que les lois de comportement sont connues en chaque phase du VER. Pour la fibre, nous considérons un modèle en grands déplacements avec une relation de comportement linéaire :

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbb{C}^{(r)} : \gamma(\mathbf{X}), \quad (4)$$

où  $\mathbf{S}$  est la seconde contrainte de Piola-Kirchhoff liée à  $\mathbf{P}$  via  $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ .  $\mathbb{C}^{(r)}$  est le tenseur d'ordre quatre des constantes élastiques associé à la phase  $r$  et  $\gamma$  est le tenseur de déformation de Green-Lagrange. Concernant la matrice, nous choisissons une loi de comportement non linéaire élastoplastique basée sur la relation Ramberg-Osgood [5]-[6] :

$$E \gamma = (1 + \nu) \mathbf{S}^d - (1 - 2\nu) P \mathbf{I} + \frac{3}{2} \alpha \left[ \frac{\mathbf{S}_{eq}}{\sigma_y} \right]^{n-1} \mathbf{S}^d \quad (5)$$

où  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $n$  et  $\sigma_y$  sont, respectivement, le module d'Young, le coefficient de Poisson, un coefficient scalaire, l'exposant réel d'écroûissage et la contrainte limite d'élasticité.  $P = -\frac{1}{3} \mathbf{S} : \mathbf{I}$  est la trace du tenseur des contraintes.  $\mathbf{S}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}^d : \mathbf{S}^d}$  est la contrainte équivalente de Mises, et  $\mathbf{S}^d = \mathbf{S} + P \mathbf{I}$  est le tenseur déviateur des contraintes.

Les deux problèmes aux niveaux micro et macro sont couplés via les relations suivantes, qui permettent de déterminer la contrainte effective et le gradient de déformation macroscopique, respectivement :

$$\bar{\mathbf{P}} = \langle \mathbf{P}(\mathbf{X}) \rangle = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{P}(\mathbf{X}) \, d\omega, \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \langle \mathbf{F}(\mathbf{X}) \rangle = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{F}(\mathbf{X}) \, d\omega. \quad (7)$$

Dans le cadre de la MAN, le développement en série est défini comme suit :

$$\begin{cases} \mathbb{U}(a) = \mathbb{U}_0 + \sum_{p=1}^N a^p \mathbb{U}_p, \\ \lambda(a) = \lambda_0 + \sum_{p=1}^N a^p \lambda_p. \end{cases} \quad (8)$$

où  $\mathbb{U}$  représente les variables microscopiques ou macroscopiques et  $N$  est l'ordre de troncature. On peut donc écrire ces problèmes sous forme de suites de problèmes linéaires comme suit ( $1 \leq p \leq N$ ) :

*Problème macroscopique*

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{P}}_p : \delta \bar{\mathbf{F}} \, d\Omega = \lambda_p \mathbf{T}_{ext}(\delta \bar{\mathbf{u}}) \text{ dans } \Omega, \quad (9)$$

*Problème microscopique*

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\mathbf{u}_p, \delta \mathbf{u}) = \mathcal{F}_p^{nl}(\delta \mathbf{u}) \text{ dans } \omega, \\ \mathbf{u}_p = \bar{\mathbf{F}}_p \mathbf{X} \text{ sur } \partial\omega. \end{cases} \quad (10)$$

*Relations de couplage*

$$\bar{\mathbf{P}}_p = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{P}_p(\mathbf{X}) \, d\omega, \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_p = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \mathbf{F}_p(\mathbf{X}) d\omega . \quad (12)$$

Les définitions de l'opérateur tangent  $\mathcal{L}$  et du terme  $\mathcal{F}_p^{nl}$  sont données dans [6].

En résolvant le problème (10), on peut obtenir la contrainte microscopique en fonction du gradient de déformation macroscopique à chaque ordre  $p$  :

$$\mathbf{P}_p = \mathbb{L} : \bar{\mathbf{F}}_p + \mathbf{P}_p^{nl} . \quad (13)$$

La contrainte effective peut donc être obtenue à chaque ordre  $p$  en faisant la moyenne de l'équation (13) :

$$\bar{\mathbf{P}}_p = \langle \mathbb{L} \rangle : \bar{\mathbf{F}}_p + \langle \mathbf{P}_p^{nl} \rangle , \quad (14)$$

où  $\langle \mathbb{L} \rangle$  est le tenseur de comportement macroscopique. En introduisant (14) dans l'équation (9), on peut écrire la forme finale du problème linéaire à l'ordre  $p$  au niveau macroscopique :

$$\int_{\Omega} \bar{\mathbf{F}}_p : \langle \mathbb{L} \rangle : \delta \bar{\mathbf{F}} d\Omega = \lambda_p \mathbf{T}_{ext}(\delta \bar{\mathbf{u}}) - \int_{\Omega} \langle \mathbf{P}_p^{nl} \rangle : \delta \bar{\mathbf{F}} d\Omega . \quad (15)$$

En résolvant le problème (15), on peut déterminer  $\bar{\mathbf{F}}_p$  qui permet de calculer toutes les quantités microscopiques et macroscopiques.

### 3 Application numérique

Nous avons étudié l'influence du microflambage des fibres sur le comportement de la macrostructure. Une représentation bidimensionnelle d'un stratifié est utilisée (voir la figure 1) pour la microstructure, où  $\mathbf{e}_2$  est la direction  $90^\circ$  correspondant à la direction de chargement. L'amplitude de l'imperfection ( $v_0$ ) est constante à travers l'épaisseur. Donc, nous considérons une microstructure avec une fibre utilisant les conditions aux limites de périodicité sous les conditions de contraintes planes et avec un comportement non linéaire de la matrice en choisissant une loi de comportement élastoplastique. La longueur d'onde et l'amplitude de l'imperfection sont  $200.\pi \mu m$  et  $3\mu m$ , respectivement. Le diamètre de fibre est  $10\mu m$  et la fraction volumique de fibre est 0,6. La microstructure est discrétisée à l'aide d'un élément fini à 9 noeuds avec 12 éléments suivant la largeur et 15 éléments suivant la longueur.

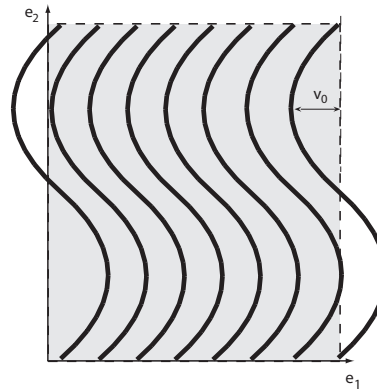


FIG. 1 – La microstructure du composite stratifié à fibres longues avec l'imperfection.

La macrostructure est montrée sur la figure 2. Elle représente une plaque rectangulaire encadrée sur trois bords et soumise à l'action d'une pression  $\lambda P$  sur le bord supérieur. Grâce à la symétrie, seule la moitié de la structure a été utilisée pour résoudre ce problème.

Dans la figure 4, le déplacement d'un point situé sur le bord supérieur de la macrostructure est présenté en fonction du paramètre de chargement  $\lambda$ . Cette figure montre l'influence de l'instabilité microscopique sur le flambage macroscopique : d'abord, dans la portion de courbe précédant le point A, le comportement macroscopique est essentiellement linéaire. Toutefois, nous pouvons observer un changement brutal dans la portion de courbe entre les points A et B. Notons également le même phénomène entre les points B, C, D et E. Il est principalement causé par l'apparition d'instabilités microscopiques aux différents points. Il est à noter que grâce à la prédiction d'ordre élevé de la MAN, nous pouvons détecter ces instabilités. Les états déformés de la microstructure dans les points A, B, C, D et E (voir figure 4) sont présentés sur la figure 5. Il y a une grande différence entre ces états déformés microscopiques, malgré la faible variation de la charge macroscopique qui

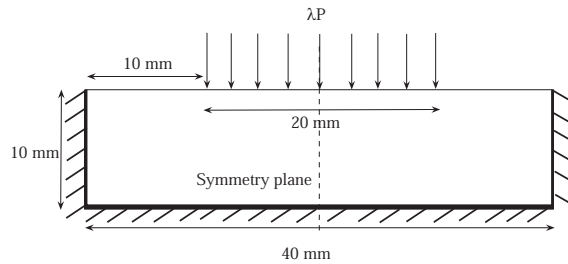
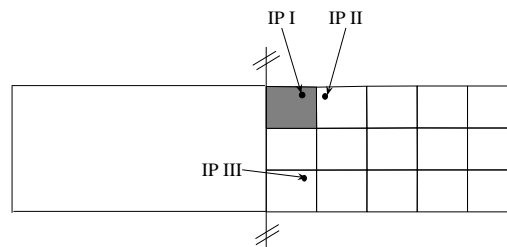
FIG. 2 – Géométrie et conditions aux limites du problème,  $P = 1 \text{ N/mm}$ 

FIG. 3 – Topologie du maillage pour la macrostructure

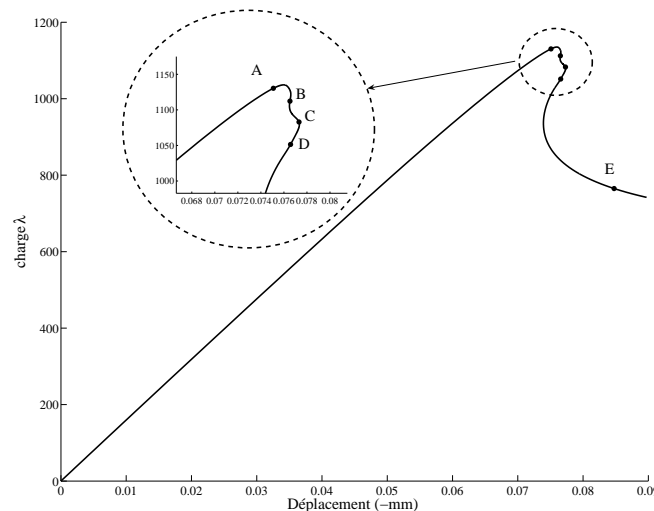


FIG. 4 – La réponse charge-déplacement pour le problème du microflambage plastique.

montre l'interaction entre les instabilités locales et globales. En outre, nous observons que les modes de flambage microscopique sont les mêmes pour tous les points après le flambage de la macrostructure (points B, C, D et E), ce qui montre que nous suivons la même branche de bifurcation.

En étudiant les diagrammes macroscopiques de contraintes-déformations pour les différents points d'intégration (I, II et III, voir figure 3) qui sont présentés sur la figure 6, nous constatons que, sous le mode de compression, les différents points d'intégration ne passent pas la contrainte maximale en même temps, ce qui explique la forme de la courbe charge-déplacement à proximité de la charge maximale. Par conséquent, ce phénomène induit une réduction de la longueur de pas asymptotique. De plus, à cause de l'apparition d'instabilités successives, les résultats sont sensibles au maillage macroscopique ; *c'est-à-dire*, lorsqu'on raffine le maillage, plusieurs instabilités sont détectées par la MAN induisant une réduction importante des longueurs de pas au voisinage des points limites en charge. En outre, nous observons la perte d'ellipticité à l'échelle macroscopique qui peut également causer l'accumulation des pas asymptotiques et la sensibilité au maillage macroscopique. Une théorie d'homogénéisation de second ordre pourrait être utilisée pour obtenir un problème bien-posé à

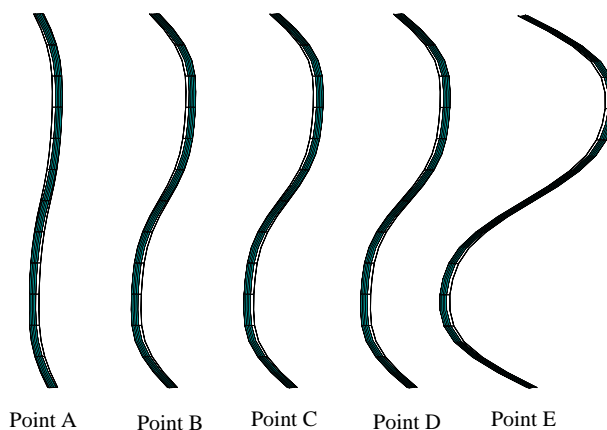


FIG. 5 – Les états déformés de la microstructure au point d'intégration *IPI* montré sur la figure 3 pour les différents points présentés sur la figure 4.

proximité de la charge maximale [7].

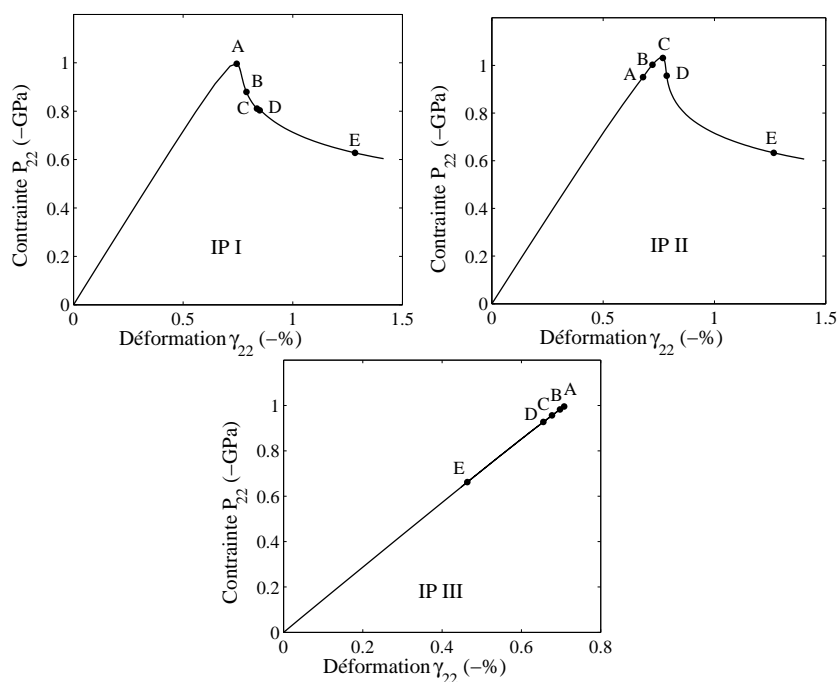


FIG. 6 – La réponse contrainte-déformation au niveau macroscopique pour les points d'intégration (I, II et III), montré sur la figure 3.

## 4 Conclusion

La technique proposée combinant la méthode des éléments finis multiéchelles et la méthode asymptotique numérique fournit un cadre efficace pour analyser le microflambage plastique des composites à fibres longues. À notre connaissance, c'est la première étude sur le microflambage plastique dans le cadre des méthodes multiéchelles. Dans ce travail, nous avons considéré une relation de comportement non linéaire élastoplastique de la matrice. Les grands déplacements sont également pris en compte aux deux échelles. De plus, la MAN permet d'obtenir ce type de courbes de réponse malgré l'apparition d'instabilités successives.

## Références

- [1] Drapier, S., Grandidier, J.C., Potier-Ferry, M. A structural approach of plastic microbuckling in long fibre composites : comparison with theoretical and experimental results. *International Journal of Solids and Structures*, 38, 3877-3904, 2001.
- [2] Nezamabadi, S., Yvonnet, J., Zahrouni, H., Potier-Ferry, M. A multilevel computational strategy for microscopic and macroscopic instabilities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, 2099-2110, 2009.
- [3] Feyel, F., Chaboche, J.L.  $FE^2$  multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behavior of long fiber SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183, 309-330, 2000.
- [4] Cochelin, B., Damil, N., Potier-Ferry, M. *Méthode asymptotique numérique*. Hermes Science Publications, 2007.
- [5] Zahrouni, H., Potier-Ferry, M., Elasmr, H., Damil, N. Asymptotic numerical method for nonlinear constitutive laws. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 7, 841-869, 1998.
- [6] Nezamabadi, S., Zahrouni, H., Yvonnet, J., Potier-Ferry, M. A multiscale finite element approach for buckling analysis of elastoplastic long fiber composites. *Soumis*.
- [7] Kouznetsova, V.G., Geers, M.G.D., Brekelmans, W.A.M. Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, 5525-5550, 2004.