HAL
open science

# Contrôle optimal par Simulation aux Grandes Echelles d'un écoulement de canal turbulent

Ali El Shrif, Laurent Cordier, Salaheddine Skali Lami

## To cite this version:

Ali El Shrif, Laurent Cordier, Salaheddine Skali Lami. Contrôle optimal par Simulation aux Grandes Echelles d'un écoulement de canal turbulent. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03390725

**HAL Id: hal-03390725**

**https://hal.science/hal-03390725v1**

Submitted on 21 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Contrôle optimal par Simulation aux Grandes Echelles d'un écoulement de canal turbulent

A. ELSHRIF[a], L. CORDIER[b], S. SKALI-LAMI[a]

a. LEMTA (UMR 7563), ENSEM, 2 avenue de la forêt de Haye, BP160 54504 Vandoeuvre lès Nancy
b. LEA (UMR 6609), CEAT, 43 rue de l'aérodrome, 86036 Poitiers cedex

## Résumé :

*Dans cette étude, la théorie du contrôle optimal est utilisée pour minimiser la traînée totale moyenne sur les parois supérieure et inférieure d'un écoulement de canal turbulent à $Re_\tau = 100$ et $Re_\tau = 180$. Le contrôle est réalisé par une procédure de soufflage/aspiration à débit nul. Une Simulation aux Grandes Echelles (LES) sert de modèle réduit des équations de Navier-Stokes. Pour $Re_\tau = 100$, le contrôle optimal parvient à relaminariser l'écoulement. Pour $Re_\tau = 180$, une réduction de la traînée totale moyenne de l'ordre de $50\%$ est obtenue mais il n'y a pas relaminarisation de l'écoulement. Dans tous les cas considérés, le maximum de réduction de traînée est atteint pour la fonctionnelle coût basée sur l'énergie cinétique terminale.*

## Abstract :

*In this study, the optimal control theory is used to minimize the total mean drag on the upper and lower walls of a turbulent plane channel flow at $Re_\tau = 100$ and $Re_\tau = 180$. Wall transpiration (unsteady blowing/suction) with zero net mass flux is performed as the control. Large Eddy Simulation (LES) is used as a reduced-order model of the Navier-Stokes equations. At $Re_\tau = 100$, optimal control succeeds to relaminarize the flow. At $Re_\tau = 180$, a reduction of the total mean drag of about $50\%$ is obtained but without relaminarization of the flow. In all the cases considered, the maximum of drag reduction is reached for the cost functional based on the terminal turbulent kinetic energy.*

**Mots clefs : Contrôle optimal, LES, canal turbulent, modèle réduit, optimisation**

## 1 Introduction

Formellement, le contrôle d'écoulement peut toujours se ramener à l'optimisation d'une fonctionnelle coût sous les contraintes des équations de Navier-Stokes *i.e.* à un problème de contrôle optimal [1]. Pour un écoulement turbulent tridimensionnel, la difficulté majeure vient du fait que le système optimal, associé au problème d'optimisation sous contraintes, ne peut être résolu que de manière itérative. Cette procédure nécessite donc des coûts de calcul importants (CPU et mémoire). Une stratégie consiste à remplacer dans certaines phases du processus d'optimisation, le modèle détaillé généralement utilisé pour décrire l'écoulement par un modèle approché qui représente uniquement les caractéristiques essentielles de sa dynamique. Récemment, dans le cas du sillage d'un cylindre circulaire [2], nous avons construit un modèle d'ordre réduit basé sur la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Dans cette étude axée sur le contrôle d'un écoulement de canal (voir Fig. 1), nous avons plutôt choisi comme modèle réduit une Simulation aux Grandes Echelles (LES). Il arrive cependant que la réduction des coûts de calcul ne soit pas suffisante pour que l'on puisse optimiser l'écoulement sur un intervalle de temps important. Dans ce cas, une méthode dite de contrôle instantané [3, 4] peut être utilisée (voir Fig. 2). Cette méthode consiste à diviser la période d'optimisation initiale $T_o$ en des sous-intervalles d'optimisation de durée $T$. Le système optimal est alors résolu sur chacun des sous-intervalles d'optimisation en utilisant comme conditions initiales les résultats du contrôle obtenus sur la période précédente. Notons cependant que, jusqu'à présent, il n'existe aucune preuve que les lois de contrôle obtenues en utilisant cette procédure de contrôle instantané correspondent à celles qui seraient obtenues si on pouvait appliquer la procédure itérative directement sur la durée totale de la période d'optimisation. Cette procédure de contrôle instantané a été utilisée dans [3] pour contrôler un écoulement de canal turbulent par DNS. Dans cette communication, nous reprenons cette étude en considérant une Simulation aux Grandes Echelles (LES) comme modèle réduit des équations de Navier-Stokes. A la section 2, nous commençons par décrire les méthodes numériques utilisées pour la résolution des équations LES. Ensuite, nous présentons le système optimal (équations d'état, équations adjointes, conditions d'optimalité) dans le cas où les équations de Navier-Stokes sont résolues par LES (section 3). L'objectif de la procédure de contrôle optimal est de déterminer les lois de soufflage/aspiration à débit nul à imposer aux parois supérieure et inférieure du canal pour minimiser la traînée turbulente moyenne. Les résultats de contrôle optimal sont ensuite présentés à la

TABLE 1 – Grandeurs caractéristiques des simulations de contrôle optimal par LES. Le coût du contrôle est $\ell = 1$. Pour $Re_\tau = 180$, les paramètres correspondent également au cas non contrôlé. Les grandeurs caractéristiques de MKM 99 sont données pour référence. $Re_c$ et $Re_b$ correspondent respectivement au nombre de Reynolds basé sur la vitesse au centre du canal et sur la vitesse débitante. $N_x$, $N_y$ et $N_z$ sont les nombres de points de maillage dans les directions $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ et $\boldsymbol{e}_z$. $\Delta_x^+$ et $\Delta_z^+$ sont les résolutions en unité de paroi dans les directions $\boldsymbol{e}_x$ et $\boldsymbol{e}_z$, et $\Delta_{y_w}^+$ la taille de la plus petite maille dans la direction $\boldsymbol{e}_y$.

| | $Re_\tau$ | $Re_c$ | $Re_m$ | $L_x$ | $L_y$ | $L_z$ | $N_x$ | $N_y$ | $N_z$ | $\Delta_x^+$ | $\Delta_{y_w}^+$ | $\Delta_z^+$ | $\Delta t^+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 100 | 1817 | 3030,3 | $4\,\pi$ | 2 | $\frac{4}{3}\pi$ | 48 | 49 | 48 | 26,2 | 0,19 | 8,7 | 0,3 |
| | 180 | 3214,1 | 5600,2 | $4\,\pi$ | 2 | $\frac{4}{3}\pi$ | 64 | 65 | 64 | 35,3 | 0,25 | 11,7 | $0,36$ |
| MKM 99 | 180 | – | 3300 | $4\,\pi$ | 2 | $\frac{4}{3}\pi$ | 128 | 129 | 128 | 17,5 | 0,05 | 5,8 | – |

section 4 pour deux nombres de Reynolds, l'un sous-critique ($Re_\tau = 100$), l'autre sur-critique ($Re_\tau = 180$). Enfin, nous concluons et indiquons les perspectives envisagées à moyen terme.

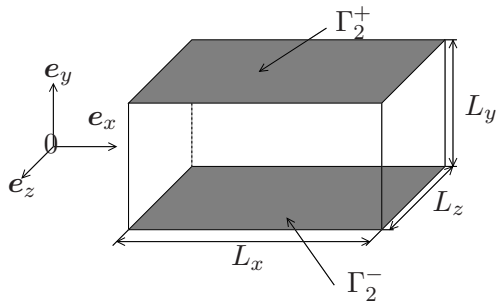



FIGURE 1 – Domaine de calcul et système de coordonnées.

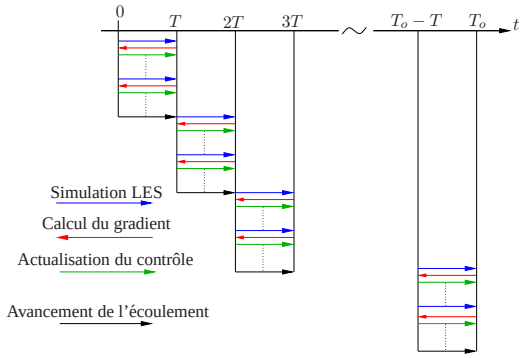



FIGURE 2 – Résolution du système optimal par contrôle instantané.

## 2 Méthodes numériques

Dans cette étude, un modèle de Smagorinsky avec une procédure dynamique proposée par [5] est utilisé pour les Simulations aux Grandes Echelles. Les équations de quantité de mouvement filtrées sont résolues sous forme adimensionnée avec des méthodes numériques classiques [6, 3]. L'écoulement est supposé périodique dans les directions longitudinale $\boldsymbol{e}_x$ et transversale $\boldsymbol{e}_z$. Le maillage est à pas constant dans ces directions, et à pas non constant dans la direction normale $\boldsymbol{e}_y$ (maillage en tangente hyperbolique). Une grille décalée est utilisée pour discrétiser en espace les variables d'état. Les dérivées spatiales sont évaluées par une méthode de différence finie d'ordre 2. Les équations de Navier-Stokes filtrées sont discrétisées en temps par un schéma mixte Runge-Kutta d'ordre 3 (termes explicites) / Crank-Nicholson (termes implicites). L'objectif étant d'utiliser ce code pour des applications liées au contrôle d'écoulement, tous les termes convectifs et diffusifs faisant intervenir des dérivées dans la direction normale à la paroi sont ici traités de manière implicite. La condition d'incompressibilité est imposée par une méthode à pas fractionnaire pour laquelle une équation de Poisson est résolue à chaque sous-pas de temps par méthode spectrale. Toutes les simulations numériques ont été réalisées à débit constant. Le code de calcul a d'abord été validé à $Re_\tau = 180$ dans le cas non contrôlé. Pour cela, les statistiques obtenues par LES ont été comparées à celles issues d'une simulation DNS de référence réalisée par [7]. Les moments statistiques ainsi que l'organisation structurelle sont en bon accord (voir [8] pour plus de détails). Par ailleurs, la simulation LES est réalisée en moins de 6% du temps CPU nécessaire pour la simulation DNS correspondante (voir tableau 1 pour les paramètres des simulations). Une telle différence de coûts de calcul est donc intéressante pour la résolution du problème de contrôle optimal.

## 3 Système optimal

L'idée de base du contrôle optimal [1, 8] consiste à minimiser sous les contraintes d'équations d'état une fonctionnelle coût ou fonctionnelle objectif qui représente la quantité physique à optimiser. Afin de rendre le contrôle intéressant d'un point de vue économique, la puissance dépensée pour sa mise en œuvre doit être inférieure au gain apporté par son application. D'un point de vue mathématique, cela se traduit par l'introduction dans le problème d'optimisation d'un terme de pénalisation qui prend en compte le coût du contrôle. Dans

le cas de l'écoulement de canal, l'énergie cinétique turbulente étant responsable de l'augmentation de la dynamique du transport depuis le centre du canal vers les régions de proches parois, celle-ci peut être considérée comme la "cause" de la turbulence et la traînée comme son "effet" [6, 3]. Il apparaît donc raisonnable de construire une fonctionnelle coût basée sur l'énergie cinétique turbulente plutôt que directement sur la traînée. Par conséquent, un premier objectif réaliste est de minimiser en moyenne sur l'intervalle d'optimisation de longueur $T_o$ l'énergie cinétique de l'écoulement, on parle alors de régularisation. Cependant, une stratégie intéressante, du point de vue de la recherche du minimum de la traînée, consiste à relâcher les contraintes du problème et à tolérer une augmentation temporaire de l'énergie cinétique turbulente au cours de l'intervalle d'optimisation. Pour cela, nous pouvons introduire une autre fonctionnelle qui traduit la minimisation de l'énergie cinétique turbulente à la fin de l'horizon d'optimisation. Au final, nous pouvons considérer une forme générale de fonctionnelle coût définie comme :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}\left(\overline{\boldsymbol{u}},\overline{\Phi}\right) = & \frac{\ell}{2}\int_{t_0}^{t_0+T_o}\int_{\Gamma_2^{\pm}} \overline{\Phi}^2\, d\boldsymbol{x}\, dt + \frac{\ell_{ter}}{2}\int_{\Omega}\left[\overline{u_i}\left(\overline{\Phi}\right)\overline{u_i}\left(\overline{\Phi}\right)\right]_{t=t_0+T_o} d\boldsymbol{x} \\ & + \frac{\ell_{reg}}{2}\int_{t_0}^{t_0+T_o}\int_{\Omega} \mid \overline{\boldsymbol{u}}\left(\overline{\Phi}\right)\mid^2\, d\boldsymbol{x}\, dt + \ell_{drag}\int_{t_0}^{t_0+T_o}\int_{\Gamma_2^{\pm}} \left(-\tau_{12}n_2\right)\, d\boldsymbol{x}\, dt\end{aligned} \tag{1}$$

où $\overline{\Phi}$ est le terme de contrôle imposé aux parois du canal. En pratique, le contrôle intervient par l'intermédiaire des conditions aux limites du problème, soit $\overline{u}_2|_{\Gamma_2^{\pm}} = -\overline{\Phi}\, n_2$ où $n_2$ est le vecteur unitaire orienté à l'extérieur du domaine. $\ell$ est un paramètre de régularisation qui est lié au coût du contrôle. Lorsque celui-ci est coûteux à mettre en œuvre, la valeur de $\ell$ est élevée. On est alors limité en terme de dépense énergétique et il sera généralement plus difficile de minimiser la fonctionnelle objectif. Le deuxième terme de $\mathcal{J}$ représente l'énergie cinétique terminale *i.e.* estimée à la fin de l'intervalle d'optimisation alors que le troisième terme correspond à la valeur moyenne en temps de l'énergie cinétique turbulente. Le dernier terme correspond directement à une mesure de la traînée à la paroi. Dans cette étude, les équations d'état gouvernant l'écoulement sont les équations de quantité de mouvement filtrées :

$$\mathcal{L}_i(\overline{\boldsymbol{u}},\overline{P}) = \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_i\,\overline{u}_j\right) - 2\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\overline{S}_{ij}\right) + \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} = 0, \tag{2}$$

où $\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i})$ représente le tenseur des vitesses de déformation résolues. Ici, $\nu$ est la viscosité totale adimensionnée définie par $\nu = 1/Re_\tau + C\overline{\Delta}^2|S|$ où $C$ est la constante de Smagorinsky dynamique, $\overline{\Delta}$ la longueur de coupure du filtre de maille et $|S| = \left(2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}\right)^{1/2}$ la norme du tenseur du taux des vitesses de déformation de l'écoulement résolu. Par ailleurs, ces équations d'état sont munis de conditions initiales et aux limites appropriées.

Après introduction des variables adjointes $\overline{u}_i^*$ et $\overline{P}^*$, la technique des multiplicateurs de Lagrange permet de transformer le problème d'optimisation sous contraintes initial en un problème d'optimisation sans contrainte. La variation de la fonctionnelle coût (1) par rapport aux variables d'état donne les équations adjointes :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_i^*(\overline{\boldsymbol{u}}^*,\overline{P}^*) = & -\frac{\partial\,\overline{u}_i^*}{\partial\,t} - 2\,\overline{u}_j\,\overline{S}_{ij}^* - \kappa\frac{\partial\,\overline{P}^*}{\partial\,x_i} - 2\,\nu\,\frac{\partial \overline{S}_{ij}^*}{\partial\,x_j} \\ & - \frac{\partial}{\partial\,x_j}\left(\frac{4\,C\,\overline{\Delta}^2}{\mid\overline{S}\mid}\,\overline{S}_{kl}\,\overline{S}_{kl}^*\,\overline{S}_{ij}\right) - \frac{\partial\,E_{ij}}{\partial\,x_j} - B_i - \ell_{reg}\overline{u}_i = 0\end{aligned} \tag{3}$$

où $\kappa = \pm 1$ selon le signe donné aux équations de continuité filtrées. Les équations adjointes sont munies des conditions aux limites (CL) et terminales (CT) suivantes :

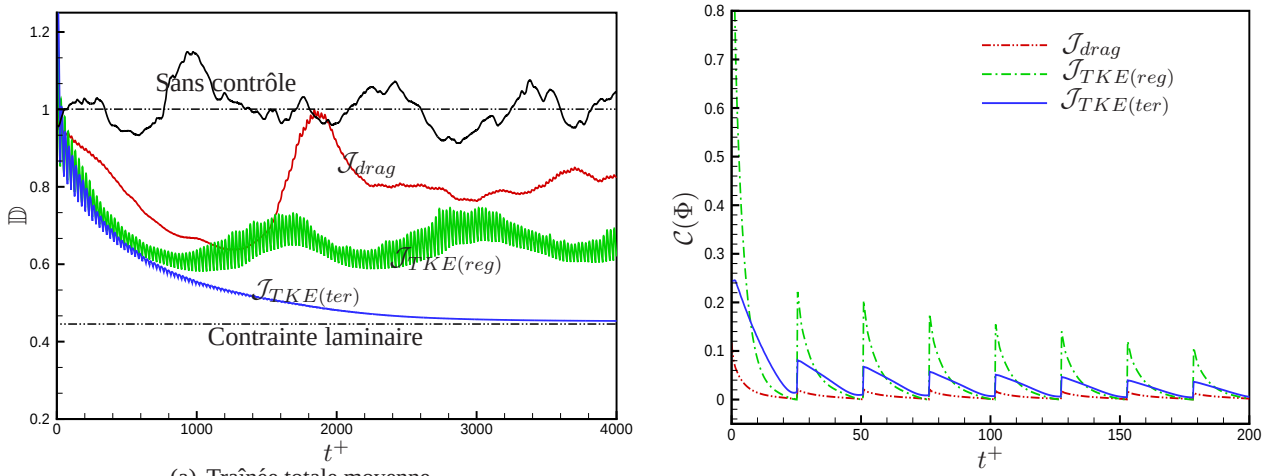
$$\overline{u}_i^*|_{\Gamma_{2\pm}} = \ell_{drag}\delta_{i1} \qquad \text{(CL)} \qquad \text{et} \qquad \overline{u}_i^*(t_0+T_o) = \ell_{ter}\overline{u}_i(t_0+T_o) \qquad \text{(CT)} \qquad i = 1,2,3.$$

Le tenseur $E_{ij}$ et le vecteur $B_i$ proviennent de la prise en compte de la variation de la constante de Smagorinsky dynamique $C$ lorsque le contrôle agit. Ces quantités sont données en fonction des champs d'état et adjoint résolus du système. Leurs expressions sont complexes et ne sont pas reportées ici faute de place (voir [8]).

Finalement, le gradient de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$ par rapport aux variables de contrôle (la condition d'optimalité) est donné par :

$$\frac{D\,\mathcal{J}}{D\,\overline{\Phi}} = \ell\,\overline{\Phi} + E_{22} + \kappa\overline{P}^*. \tag{4}$$

Les équations (1), (2) et (3) forment le système optimal. Ce système couplé d'équations aux dérivées partielles peut être résolu de manière itérative pour trouver les paramètres de contrôle qui minimisent (1) sous les contraintes de (2). A chaque itération, le contrôle est actualisé par un algorithme de gradient conjugué




(a) Traînée totale moyenne.

(b) Coût du contrôle.

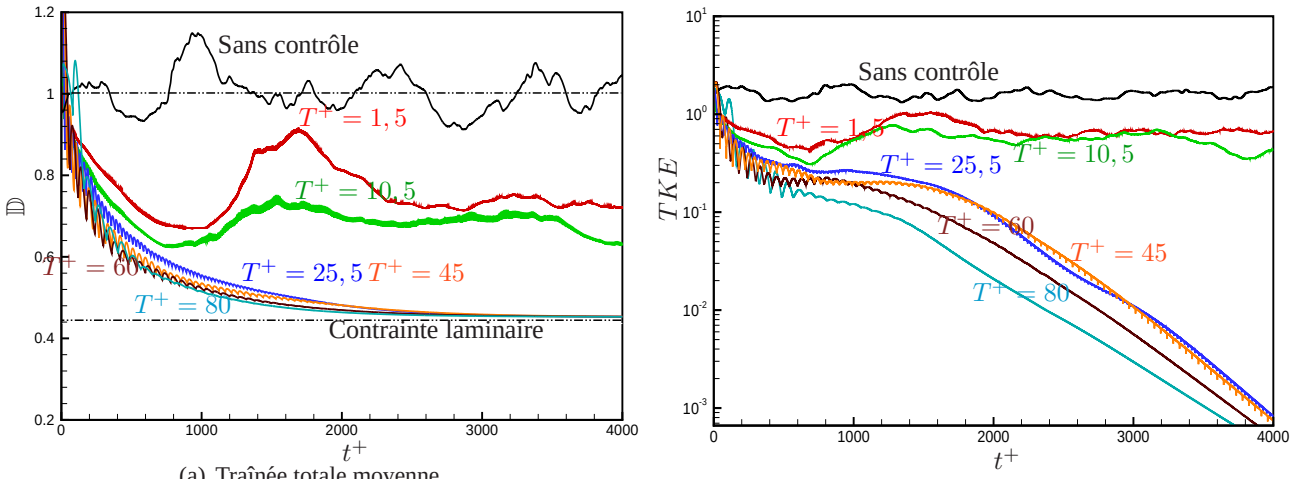
FIGURE 3 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $T^+ = 25,5$ des évolutions temporelles de la traînée totale moyenne et du coût du contrôle pour différentes fonctionnelles coût.

en utilisant le gradient de la fonctionnelle coût déterminé par (4). Dans nos applications, la méthode de Hestenes-Stiefel s'est montrée la plus performante [8]. Afin de limiter le coût de la recherche linéaire, nous n'avons pas utilisé une méthode de recherche exacte mais plutôt la méthode d'Armijo à rebroussement. La résolution itérative est arrêtée lorsque la différence entre deux valeurs successives de la fonctionnelle coût $\Delta\mathcal{J} =\mid \mathcal{J}^{(n+1)} - \mathcal{J}^{(n)} \mid$ est inférieure à $0,005$. Lorsqu'une période d'optimisation très longue ($T_o^+ > 2000$) est considérée, la solution des équations adjointes a tendance à devenir sensible aux erreurs numériques et il y a alors croissance exponentielle des variables adjointes. Ce phénomène est dû à la non-linéarité des équations de Navier-Stokes et au fait que les équations adjointes sont posées en temps rétrograde. Par ailleurs, les équations (3) dépendent des variables d'état. Il est donc nécessaire de sauvegarder l'évolution de ces variables sur la longueur de l'intervalle d'optimisation $T_o$ et dans tout le domaine spatial pour être en mesure d'intégrer en temps les équations adjointes. Cette contrainte nécessite rapidement un espace mémoire important. Pour surmonter ces difficultés, la procédure de contrôle instantané présentée à la section 1 est utilisée par la suite.

## 4 Résultats de contrôle optimal

Dans cette section, nous allons présenter les résultats de contrôle optimal obtenus par LES pour $Re_\tau = 100$ et $Re_\tau = 180$. Les paramètres des simulations réalisées pour le contrôle sont rappelés dans le tableau 1. Pour $Re_\tau = 100$, la valeur du nombre de Reynolds est suffisamment petite pour que l'on puisse réaliser pour des coûts numériques raisonnables un grand nombre de simulations et ainsi analyser l'effet de certains paramètres sur la solution. La figure 3(a) représente l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne associée aux contrôles optimaux obtenus pour différents types de fonctionnelles coût. Cette figure montre clairement que le problème d'optimisation dépend fortement du choix de la fonctionnelle coût. La fonctionnelle objectif la plus efficace en terme de réduction de traînée correspond à l'énergie cinétique terminale. Pour cette fonctionnelle coût, la réduction de traînée est de l'ordre de $57\%$ et l'écoulement se relaminarise. Ce comportement peut s'expliquer par la physique de la turbulence. L'énergie cinétique turbulente peut être considérée comme le "moteur" des phénomènes présents dans l'écoulement et en particulier de la traînée. Dans ce sens, minimiser l'énergie cinétique turbulente a un effet direct sur la réduction de traînée. Par ailleurs, il semble que l'énergie cinétique soit plus sensible à l'action du contrôle que la traînée. En effet, [3] a montré qu'en stoppant brutalement le contrôle dans un canal turbulent à $Re_\tau = 180$, l'énergie cinétique turbulente avait tendance à croître en temps beaucoup plus rapidement que la traînée. Ce phénomène se retrouve dans nos simulations. En consultant la figure 3(b) qui représente l'évolution temporelle du coût du contrôle pour les différentes fonctionnelles, on constate en effet que systématiquement le coût du contrôle associé à la minimisation de la traînée est inférieur aux autres cas.

Les figures 4(a) et 4(b) représentent, pour différentes valeurs de périodes d'optimisation $T^+$, respectivement l'évolution temporelle de la traînée totale moyenne et de l'énergie cinétique totale obtenues par contrôle optimal pour l'énergie cinétique terminale. Ces figures montrent que pour $T^+ \geq 25,5$, l'écoulement se relaminarise : la traînée totale moyenne tend vers la valeur en régime laminaire pour $t^+ \simeq 2000$, l'énergie cinétique totale décroît fortement en tendant vers zéro. On constate également que plus la longueur du sous-intervalle d'optimisation est grande, et plus les réductions de traînée et d'énergie cinétique totale sont importantes et rapides. Pour résumer, les évolutions temporelles de la traînée et de l'énergie cinétique turbulente peuvent être




(a) Traînée totale moyenne.

(b) Energie cinétique totale.

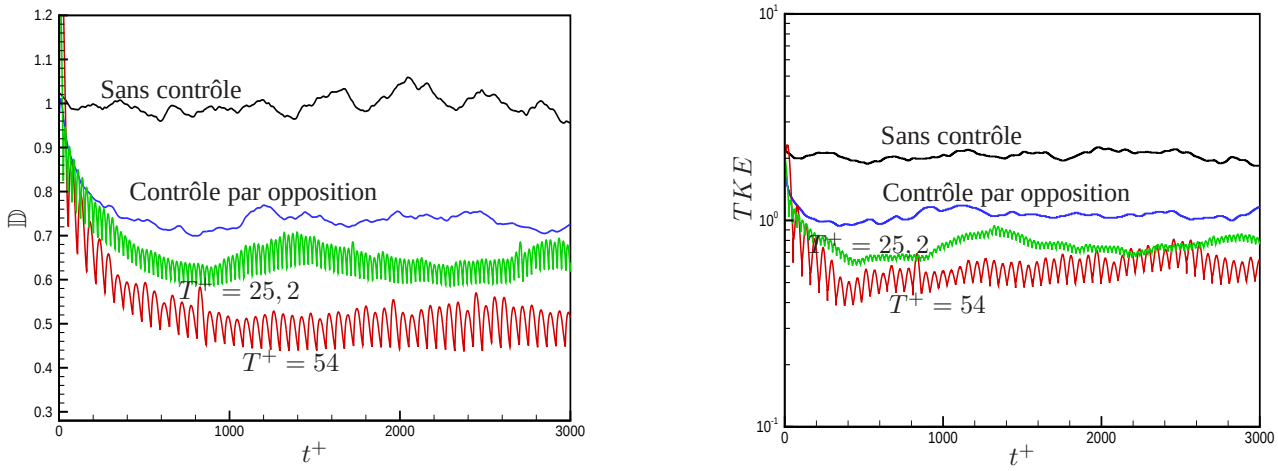
FIGURE 4 – Comparaison pour $Re_\tau = 100$ et $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{TKE(ter)}$ des évolutions temporelles de la traînée totale moyenne et de l'énergie cinétique totale pour différentes valeurs de périodes d'optimisation $T^+$.

décomposées en trois zones distinctes. Dans la première zone qui s'étend de $t^+ = 0$ à $t^+ = 700$, la traînée totale moyenne et l'énergie cinétique totale décroissent rapidement et cela même pour des sous-intervalles d'optimisation de dimension faible ($T^+ \leq 10,5$). Dans la seconde zone allant de $t^+ = 700$ à $t^+ = 1200$, le contrôle essaie d'équilibrer les mécanismes de production de la turbulence en zone de proche paroi. Dans le cas des périodes d'optimisation courtes ($T^+ = 1,5$ ou $T^+ = 10,5$), le contrôle ne parvient pas à équilibrer la production turbulente en zone de proche paroi. Il y a alors augmentation brusque de l'énergie cinétique turbulente puis saturation de celle-ci pour $t^+ \simeq 1300$. Ce comportement s'explique essentiellement par la dimension du sous-intervalle d'optimisation qui est trop petite pour contenir toutes les échelles caractéristiques des phénomènes turbulents de proche paroi. Dans ces conditions, il manque des informations essentielles d'un point de vue physique pour évaluer de manière efficace le gradient de la fonctionnelle coût. Lorsque la longueur des sous-intervalles d'optimisation augmente ($T^+ \geq 25,5$), on observe d'abord une très légère augmentation de l'énergie cinétique turbulente puis, de manière soudaine, une forte décroissance. L'écoulement étant sous-critique à $Re_\tau = 100$, cette décroissance ne fait que s'accélérer au cours du temps sous l'action du contrôle. La troisième zone, qui commence vers $t^+ = 1200$, détermine le comportement au temps long de l'écoulement. Si le contrôle n'est pas parvenu à s'opposer aux mécanismes de production de la turbulence, alors l'énergie cinétique turbulente et la traînée saturent à des niveaux supérieurs à la limite laminaire. Dans le cas contraire, il y a non seulement minimisation de la traînée totale moyenne ou de l'énergie cinétique turbulente totale selon le choix de la fonctionnelle coût mais en plus relaminarisation de l'écoulement.

Pour $Re_\tau = 180$, on retrouve la même tendance que pour $Re_\tau = 100$ en terme d'influence du choix de la fonctionnelle coût sur les résultats de contrôle optimal. En effet, c'est encore en choisissant l'énergie cinétique au temps terminal comme fonctionnelle objectif que l'on obtient la plus importante réduction de traînée. Cependant, contrairement au cas précédent, la procédure de contrôle optimal ne parvient pas à la laminarisation de l'écoulement (voir Fig. 5(a)). Pour $Re_\tau = 180$, la réduction maximale de traînée obtenue pour $T^+ = 54$ est égale à 50% (à comparer avec 27% pour la limite laminaire). La figure 5(a) représente pour la fonctionnelle coût basée sur l'énergie cinétique terminale, les évolutions temporelles de la traînée totale moyenne obtenues pour le contrôle par opposition [9] et par contrôle optimal. On observe que la réduction de traînée obtenue par contrôle optimal est systématiquement supérieure à celle obtenue par le contrôle par opposition. D'une certaine manière, ces résultats sont moraux car la quantité d'information nécessaire à la mise en œuvre du contrôle par opposition est très inférieure à celle que nécessite le contrôle optimal. Et encore, on ne prend pas en compte dans ce bilan les efforts de développement analytique du système optimal et la lourdeur de la programmation liés à la mise en place du contrôle optimal. En outre, par définition, le contrôle optimal correspond au meilleur résultat susceptible d'être obtenu en absence de perturbations subies par le système. Des conclusions semblables peuvent être tirées des évolutions temporelles de l'énergie cinétique totale reportées sur la figure 5(b).

## 5 Conclusion

Cette étude a mis en évidence l'intérêt d'un modèle LES comme équation d'état dans une procédure de contrôle optimal pour obtenir à un coût numérique limité des lois de contrôle efficaces en terme de réduction de traînée.




(a) Traînée totale moyenne.

(b) Energie cinétique totale.

FIGURE 5 – Comparaisons pour $Re_\tau = 180$ des évolutions temporelles de la traînée totale moyenne et de l'énergie cinétique totale obtenues pour le contrôle par opposition et par contrôle optimal. Le contrôle par opposition correspond à la position optimale du plan de détection ; le contrôle optimal à la minimisation de $\mathcal{J}_{TKE(ter)}$ avec pour $Re_\tau = 180$ : $T^+ = 25,2$ et $T^+ = 54$.

Nos résultats viennent confirmer qu'il est plus efficace d'un point de vue énergétique de prendre pour cible le "moteur" de la turbulence (l'énergie cinétique) plutôt que ses conséquences (la traînée aux parois). Notons par ailleurs que dans nos simulations, la traînée minimale que nous avons pu obtenir correspond précisément à celle associée au régime laminaire. Nos résultats ne viennent donc pas infirmer la conjecture avancée par [10] qui prétend que la contrainte minimale susceptible d'être atteinte par contrôle d'un écoulement de canal turbulent via une procédure de soufflage/aspiration à débit nul aux parois est celle associée à l'écoulement laminaire. Enfin, une perspective à moyen terme, consiste à utiliser l'approche POD pour développer un modèle réduit de dynamique et réduire encore les coûts de calcul liés à l'optimisation.

## Références

[1] Gunzburger M. D. Introduction into mathematical aspects of flow control and optimization. In Lecture series 1997-05 on inverse design and optimization methods. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 1997.

[2] Bergmann M. and Cordier L. Optimal control of the cylinder wake in the laminar regime by Trust-Region methods and POD Reduced Order Models. J. Comp. Phys., 227, 7813–7840, 2008.

[3] Bewley T. R., Moin P., and Temam R. DNS-based predictive control of turbulence : an optimal benchmark for feedback algorithms. J. Fluid Mech., 447, 179–225, 2001.

[4] Protas B. and Styczek A. Optimal rotary control of the cylinder wake in the laminar regime. Phys. Fluids, 14(7), 2073–2087, 2002.

[5] Lilly D. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. Phys. Fluids A, 4, 633–635, 1992.

[6] Chang Y. Approximate models for optimal control of turbulent channel flow. Phd thesis, Rice university, 2000.

[7] Moser R. D., Kim J., and Mansour N. N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. Phys. Fluids, 11(4), 943–945, 1999.

[8] El Shrif A. Contrôle optimal d'un écoulement de canal turbulent. Phd thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2008.

[9] Choi H., Moin P., and Kim J. Active turbulence control for drag reduction in wall-bounded flows. J. Fluid Mech., 262, 75–110, 1994.

[10] Bewley T. R. and Aamo O. M. A "winwin" mechanism for low-drag transients in controlled two-dimensional channel flow and its implications for sustained drag reduction. J. Fluid Mech., 499, 183–196, 2004.