HAL
open science

Une Fonctionnelle Modale Condensée pour Identifier les Propriétés Constitutives d'un Rotor à Cage d'Ecureuil

Guillaume Mogenier, Thouraya Baranger, Nicolas Barras, Lionel Durantay, Régis Dufour

To cite this version:

Guillaume Mogenier, Thouraya Baranger, Nicolas Barras, Lionel Durantay, Régis Dufour. Une Fonctionnelle Modale Condensée pour Identifier les Propriétés Constitutives d'un Rotor à Cage d'Ecureuil. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03390701

HAL Id: hal-03390701

https://hal.science/hal-03390701v1

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une Fonctionnelle Modale Condensée pour Identifier les Propriétés Constitutives d'un Rotor à Cage d'Ecureuil

G. MOGENIER[a], T. N. BARANGER[a,b], R. DUFOUR[a], L. DURANTAY[c], N. BARRAS[c]

a. Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259, F-69621, France
b. Université de Lyon 1, F-69622, France
c. Converteam SAS, Motors Division, 442 Rue de la Rompure, 54250 Champigneulles, France

Résumé :

Pour prévoir le comportement dynamique en flexion des rotors à cage d'écureuil, une procédure d'optimisation est proposée pour identifier la rigidité flexionnelle de la partie feuilletée. Les quantités modales calculées et mesurées sur un rotor feuilleté sont incluses dans une fonctionnelle basée sur un quotient de Rayleigh hybride et combinée à la méthode de condensation de Guyan. Les degrés de liberté de contour sont alors associés aux points de mesure. Une minimisation de Levenberg-Marquardt permet d'extraire la rigidité de la partie feuilletée.

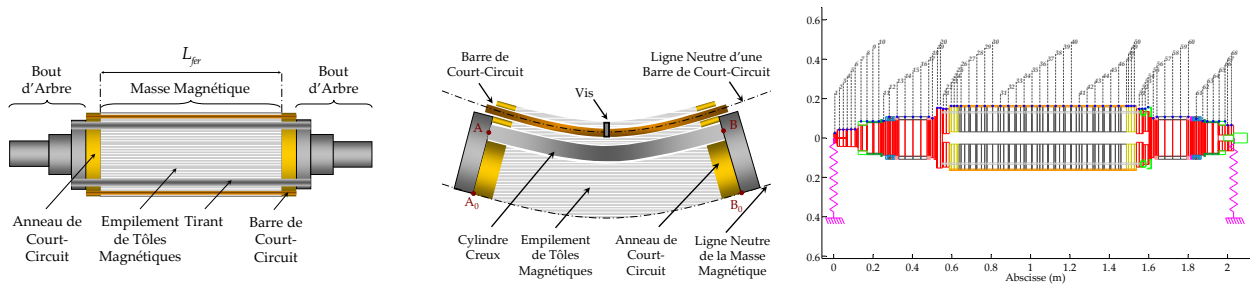
Abstract :

In order to predict the lateral rotordynamics of squirrel cage rotors, an optimization procedure is proposed for identifying the bending rigidity of the laminated core. Modal parameters predicted and measured on a laminated rotor are included in a functional based on a hybrid Rayleigh quotient and combined with the Guyan method. The master degrees of freedom correspond to the measurement points. The laminated core rigidity is extracted thanks to a Levenberg-Marquardt minimization.

Mots clefs : Identification, optimisation, quotient de Rayleigh, rotor feuilleté, cage d'écureuil

1 Introduction

Cet article concerne les moteurs à induction appelés *MGV*, *Moteur Grande Vitesse*, utilisés dans des applications de l'industrie gazière. Ceux-ci sont composés de deux bouts d'arbre et d'un empilement de tôles (ET) maintenu par des tirants précontraints distribués à la périphérie de la masse magnétique (MM) présentée figure 1(a). La cage d'écureuil est formée par des barres de court-circuit (CC) situées en périphérie de la section droite (SD) de la MM et connectées à deux anneaux de CC situés aux extrémités de l'ET. Celui-ci rend délicat la modélisation de la dynamique de tels rotors, sujet peu abordé dans les articles scientifiques [1]-[2], et dont le plus grand nombre traite principalement des rotors constitués d'ET frettés. Dans [3], il est évalué l'influence de la longueur de l'ET sur les pulsations propres d'un modèle éléments-finis (EF) d'une machine à aimant permanent. Dans [4], un modèle ramifié est obtenu en modélisant la MM par un ensemble d'anneaux élastiquement connectés entre eux et à l'arbre. Dans [5], la MM est modélisée par un modèle ramifié de poutres et un module d'Young équivalent alors que [4] utilise un matériau orthotrope dont la loi de comportement dépend des propriétés des tôles et des flexibilités d'interfaces. Dans [6], les auteurs montrent que la précontrainte de l'ET a une influence significative sur les pulsations propres du rotor et modélisent la MM par un diamètre équivalent et des masses discrètes. Dans les méthodes d'identification modales, des fonctionnelles sont définies pour quantifier l'écart entre les pulsations propres [7] ou les formes propres [8] calculées et mesurées. Une fonctionnelle multicritère basée sur les pulsations propres et les termes de la matrice de corrélation modale est proposée dans [9]. Une telle méthode a l'inconvénient de nécessiter l'usage de coefficients de pondération pour chaque composante de la fonctionnelle.
Nous présentons une procédure d'identification basée sur une fonctionnelle énergétique, inspirée de [10], couplée à une condensation de Guyan [11] pour que les dimensions des modèles numérique et expérimental soient identiques. Celle-ci permet d'obtenir des termes homogènes, entre chaque mode, issus de la combinaison d'une pulsation et de sa forme propre associée, qui ne nécessitent pas de coefficients de pondération. Cette procédure permet d'identifier les propriétés constitutives de l'ET en minimisant l'écart entre les quantités modales calculées à partir d'un modèle EF de poutres contenant peu de degrés de liberté (ddl), et mesurées lors d'une analyse modale. Un algorithme de Levenberg-Marquardt a été implémenté pour minimiser cette fonctionnelle et nécessite la connaissance des dérivées des valeurs propres [12] et formes propres qui peuvent être obtenues par des méthodes approchées [13] ou exactes [14].



(a) Description d'un rotor MGV. (b) Hypothèse cinématique. (c) Modèle éléments-finis.

FIGURE 1 – Modélisation d'un rotor à cage d'écureuil.

2 Modèle éléments-finis

Le modèle EF du rotor est basé sur la théorie des poutres de Timoshenko [15] et l'expression des matrices de raideur globales est la suivante :

$$K = K_f + K_P, \tag{1}$$

où K_f et K_P sont respectivement les matrices de raideur élastique et géométrique due à une force axiale [16]. Un coefficient de correction de SD est utilisé [17]. La matrice de masse globale peut se décomposée ainsi :

$$M = M_T + M_R, \tag{2}$$

où M_T et M_R sont respectivement dues aux translation et rotation de SD. Pour identifier seulement les propriétés constitutives de l'ET, des hypothèses doivent être émises pour modéliser l'ensemble des tirants et des barres de CC. Celles-ci peuvent être modélisées comme des poutres dont les lignes neutres coïncident avec la ligne neutre de l'ET car elles sont vissées sur l'ET en leurs milieux (Fig. 1(b)) ; leurs extrémités peuvent donc glisser dans les anneaux de CC. Les tirants sont modélisés comme un seul EF de cylindre équivalent connecté aux noeuds A_0 et B_0 (Fig. 1(b)). Soient d_{ti}^{out} et d_{ti}^{in} respectivement ses diamètres extérieur et intérieur calculés en considérant la surface S_{ti} et le moment quadratique I_{ti} de l'ensemble des tirants :

$$d_{ti}^{out} = \left(\frac{8I_{ti}}{S_{ti}} + \frac{2S_{ti}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}, d_{ti}^{in} = \left(\frac{8I_{ti}}{S_{ti}} - \frac{2S_{ti}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Les anneaux de CC, l'ET et les extrémités des bouts d'arbre sont percés à leur périphérie pour le passage des barres de CC et des tirants, (3) est alors utilisée pour modéliser leurs SD. La précontrainte de traction est modélisée par la matrice K_P pour l'EF du cylindre.

3 Une fonctionnelle modale condensée

Soient $\hat{\omega}_k$ et ω_k respectivement les pulsations propres calculées et mesurées et soient $\hat{\varphi}_k$ et φ_k leurs formes propres associées projetées dans la même base spatiale. Les quantités $\hat{\omega}_k$ et $\hat{\varphi}_k$ sont calculées par :

$$\left(K - \hat{\lambda}_k M\right)\hat{\varphi}_k = 0 \text{ tel que } \hat{\lambda}_k = \hat{\omega}_k^2, (k = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

où m est le nombre d'éléments propres. Le même problème peut être écrit sous une forme plus compacte :

$$R_k - \hat{\omega}_k^2 = 0 \text{ avec } R_k = \frac{\hat{\varphi}_k^t K \hat{\varphi}_k}{\hat{\varphi}_k^t M \hat{\varphi}_k}, \tag{5}$$

où R_k désigne le quotient de Rayleigh, rapport des énergies potentielle et cinétique de la k^{eme} forme propre. Ainsi, une corrélation exacte entre les pulsations et formes propres calculées et mesurées conduit à $\hat{\varphi}_k = \varphi_k$ et $\hat{\omega}_k^2 = \omega_k^2$. Par conséquent, (5) peut être écrite sous une forme adimensionnelle :

$$1 - \frac{1}{\omega_k^2}\frac{\varphi_k^t K \hat{\varphi}_k}{\varphi_k^t M \hat{\varphi}_k} = 0. \tag{6}$$

En revanche, une corrélation exacte ne se rencontre jamais dans les cas réels. Nous proposons alors d'estimer la différence entre les quantités modales calculées et mesurées à l'aide de (6) :

$$\mathscr{E}_k = 1 - \frac{1}{\omega_k^2}\frac{\varphi_k^t K \hat{\varphi}_k}{\varphi_k^t M \hat{\varphi}_k}. \tag{7}$$

Les formes propres $\hat{\varphi}_k$ sont composées des déflexions transversales et des rotations de SD et φ_k sont des seules déflexions transversales. Nous proposons alors l'utilisation d'une condensation de Guyan afin de faire correspondre les ddl du modèle EF aux déflexions transversales mesurées. En partitionnant vecteur δ des ddl comme dans (8a), les n_c ddl de contour δ_c sont définis par les déflexions transversales tandis que les n_i ddl internes δ_i par les rotations de SD [11] :

$$\{\delta\} = \langle \delta_i, \delta_c \rangle^t, \quad (8a) \qquad \{\delta\} = \psi \{\delta_c\}, \quad (8b)$$

où ψ est la matrice de transformation (9b) obtenue en partitionnant le matrice de raideur de (4) :

$$K = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ic} \\ K_{ci} & K_{cc} \end{bmatrix}, \quad (9a) \qquad \psi = [\varphi^c, I]^t, \quad (9b) \qquad \varphi^c = -K_{ii}^{-1} K_{ic}, \quad (9c)$$

avec I la matrice identité de taille $[n_c \times n_c]$ et φ^c la matrice des modes contraints obtenus en annulant toutes les forces nodales d'inertie des ddl internes. Le problème aux valeurs propres généralisées du modèle condensé s'écrit donc :

$$(K_r - \lambda_k M_r)\widetilde{\varphi}_k = 0, \quad (10a) \qquad M_r = \psi^t M \psi, \quad (10b) \qquad K_r = \psi^t K \psi, \quad (10c)$$

où λ_k, $\widetilde{\varphi}_k$, M_r et Kr sont respectivement les n_c éléments propres du modèle EF condensé et les matrices de masse et raideur condensées. La fonctionnelle modale condensée est alors définie comme une fonction d'un quotient de Rayleigh hybride combinant les formes propres calculées et mesurées et les pulsations propres mesurées :

$$\mathscr{E}_k = 1 - \frac{R_k^*}{\omega_k^2}, \text{ avec } R_k^* = \frac{\varphi_k^t K_r \widetilde{\varphi}_k}{\varphi_k^t M_r \widetilde{\varphi}_k}. \quad (11)$$

4 Stratégie d'optimisation

Les propriétés constitutives de l'empilement sont définies par $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\{x_p\}_{p=1\ldots n}$. Soit x^i le vecteur des n variables d'optimisation x à l'itération i. Les x^i, définies par le doublet $\{E, G\}$, respectivement les modules d'Young et de Coulomb, *i.e.* $(n = 2)$, sont indépendants pour modéliser l'anisotropie [4]. La stratégie d'optimisation consiste donc à minimiser l'écart entre les quantités modales calculées et mesurées et se réduit donc à la minimisation d'une fonctionnelle globale $f\left(x^i\right)$:

$$f\left(\mathrm{x}^{\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2}\left\|\mathscr{E}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{i}}\right)\right\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \mathscr{E}_k^2\left(\mathrm{x}^{\mathrm{i}}\right). \quad (12)$$

Ainsi, chaque terme $\mathscr{E}_k$ combine une pulsation propre et sa forme propre associée en un terme adimensionnel. Les formes propres n'ont pas besoin d'être signées et l'utilisation de coefficients de pondération n'est pas nécessaire car les $\mathscr{E}_k$ sont de même ordre de grandeur. Afin d'éviter des problèmes de conditionnement numérique, notamment pour la matrice jacobienne $J\left(x^i\right)$, les x^i sont définies relativement aux variables initiales x^0 de l'algorithme de Levenberg-Marquardt implémenté pour minimiser f :

$$\begin{cases} x^0, \mu_0 \text{ donnés} \\ d_i = -\left(H_i + \mu_i I\right)^{-1} \nabla f\left(x^i\right) \\ x^{i+1} = x^i + \rho_i d_i \end{cases} \text{avec} \begin{cases} \nabla f\left(x^i\right) = J\left(x^i\right)^T \mathscr{E}\left(x^i\right) \\ H_i \approx J\left(x^i\right)^T J\left(x^i\right) \end{cases}, \quad (13)$$

où I et H_i sont respectivement les matrices identité et hessienne approximée de taille $[n \times n]$. L' (13) correspond aux méthodes de la plus grande pente ou de Gauss-Newton selon que $\mu_i \to \infty$ ou $\mu_i \to 0$. Le pas de descente ρ_i peut être obtenu par recherche linéaire. Nous préférons la méthode proposée par [18] en posant $\rho_i = 1$ et en actualisant fréquemment μ_i ce qui permet d'obtenir une convergence plus rapide.

5 Dérivation des éléments propres

La matrice jacobienne du vecteur $\mathscr{E}\left(x^i\right)$ dépend implicitement des éléments propres. En considérant (10a) et en supposant les vecteurs propres normalisés par rapport à la matrice de masse condensée M_r :

$$\widetilde{\varphi}_k^T M_r \widetilde{\varphi}_k = 1, \, (k = 1, \ldots, m). \quad (14)$$

En dérivant (10a) et (14) par rapport à x_p, les dérivées des vecteurs propres sont alors régies par [12] :

$$A_k \frac{\partial \widetilde{\varphi}_k}{\partial \mathrm{x_p}} = P_k, \quad (15a) \qquad \widetilde{\varphi}_k^T M_r \frac{\partial \widetilde{\varphi}_k}{\partial \mathrm{x_p}} = Q_k, \quad (15b)$$

$$\text{avec } Q_k = -\frac{1}{2}\widetilde{\varphi}_k^T \frac{\partial M_r}{\partial \mathrm{x_p}}\widetilde{\varphi}_k,\, A_k = (K_r - \lambda_k M_r)\,,\, P_k = -\left(\frac{\partial K_r}{\partial \mathrm{x_p}} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathrm{x_p}} M_r - \lambda_k \frac{\partial M_r}{\partial \mathrm{x_p}}\right)\widetilde{\varphi}_k.$$

En prémultipliant (15a) par $\widetilde{\varphi}_k^T$ et en combinant(10a) et (14), la dérivée de la k^{eme} valeur propre λ_k par rapport à x_p est obtenue par la relation suivante :

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_p} = \widetilde{\varphi}_k^T \left(\frac{\partial K_r}{\partial x_p} - \lambda_k \frac{\partial M_r}{\partial x_p}\right)\widetilde{\varphi}_k. \tag{16}$$

Concernant les dérivées des vecteurs propres, le problème est que (15a) n'est pas inversible puisque la matrice A_k est de rang $(n_c - 1)$. La méthode modale suppose que la dérivée du k^{eme} vecteur propre par rapport à x_p peut être exprimée de la manière suivante :

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}_k}{\partial \mathrm{x_p}} = \sum_{j=1}^{m} c_j \widetilde{\varphi}_j \text{ avec } c_j = \frac{\widetilde{\varphi}_j^T P_k}{\lambda_j - \lambda_k},\, j \neq k, \tag{17}$$

où les c_j sont obtenus en substituant (17) dans (15a) et en prémultipliant par $\widetilde{\varphi}_k^T$. L'Eq. (17) montre que la dérivée partielle du k^{eme} vecteur propre a une expression unique en tant que combinaison linéaire de tous les vecteurs propres du modèle, à l'exception du k^{eme} :

$$\frac{\partial \widetilde{\varphi}_k}{\partial \mathrm{x_p}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} c_j \widetilde{\varphi}_j + c_k \widetilde{\varphi}_k \equiv V_k + c_k \widetilde{\varphi}_k,\ \text{avec } c_k = Q_k - \widetilde{\varphi}_k M_r V_k, \tag{18}$$

où c_k est obtenu en substituant (18) de (15b). Cette méthode, coûteuse en temps de calcul, nécessite la connaissance de tous les vecteurs propres du modèle. En substituant (18) à (15a), [14] propose d'ôter la singularité de la matrice A_k en annulant une composante du vecteur V_k, (15a) devient alors inversible et la solution homogène est obtenue. La solution complète est donnée par (18). Cette méthode requiert autant d'inversion de matrice A_k que de dérivées désirées. Les dérivées des éléments propres nécessitent la connaissance des dérivées des matrices condensées obtenues grâce à la dérivée de ψ (8b) :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_p} = \left[\frac{\partial \varphi^c}{\partial x_p}, 0\right]^t \text{ avec } \frac{\partial \varphi^c}{\partial x_p} = -K_{ii}^{-1}\left(\frac{\partial K_{ic}}{\partial x_p} - \frac{\partial K_{ii}}{\partial x_p}\varphi^c\right), \tag{19}$$

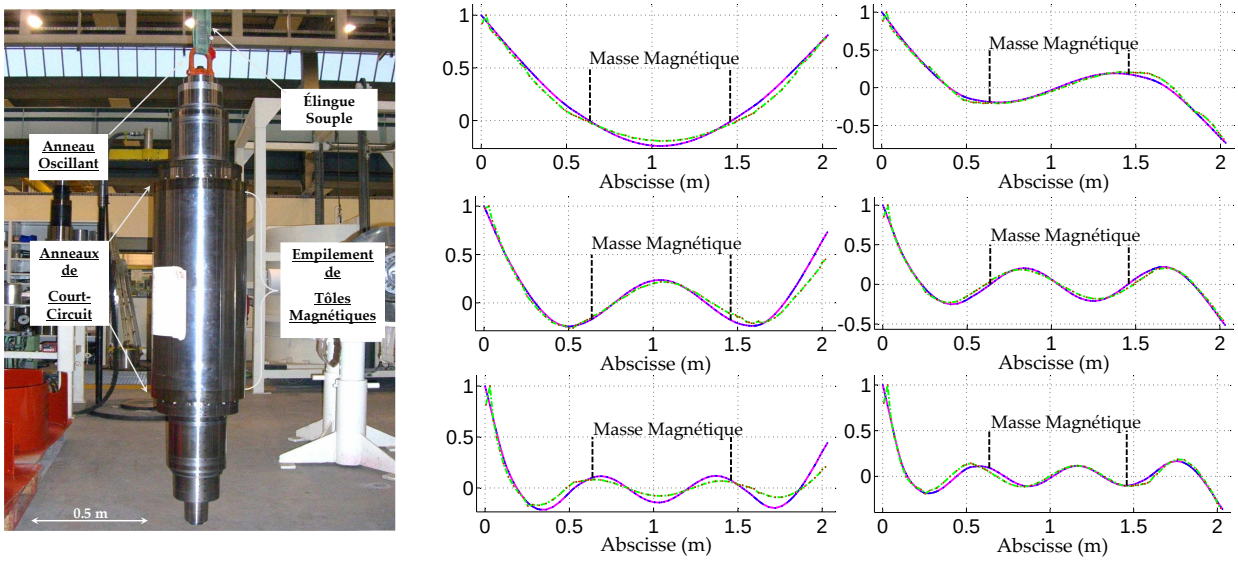
où $\frac{\partial \varphi^c}{\partial x_p}$ est la dérivée de la matrice des modes contraints (9c). Les dérivées des matrices condensées s'écrivent alors :

$$\frac{\partial K_r}{\partial x_p} = \psi^t \cdot \frac{\partial K}{\partial x_p} \cdot \psi + 2 \cdot \psi^t \cdot K \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_p}, \tag{20a}$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial x_p} = \psi^t \cdot \frac{\partial M}{\partial x_p} \cdot \psi + 2 \cdot \psi^t \cdot M \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_p}. \tag{20b}$$

6 Application industrielle

Une analyse modale expérimentale a été réalisée sur un rotor *MGV* suspendu verticalement à une élingue souple (Fig. 2(a)) pour assurer des conditions aux limites Libre-Libre. Les poids total et longueur du rotor sont respectivement de 998 *kg* et 2,03 *m*. Le rotor a été excité radialement le long d'une génératrice axiale avec un marteau de choc, un capteur de force mesurant la force transmise. La génératrice axiale a été discrétisée en 68 points de mesure (Fig. 1(c)) pour établir des formes propres précises. Module et partie imaginaire des accélérances, issues d'un analyseur dynamique, donnent les pulsations et les formes propres.
La procédure d'identification a été réalisée en faisant varier le nombre *m* de modes (pulsations et formes propres associées) dans l'algorithme d'optimisation tel que m = 2, ...,6. Un minimum de deux modes a été retenu pour assurer l'unicité du problème d'optimisation. Le coefficient de Poisson υ a été fixé à 0.28, comme dans [5]. Le problème d'optimisation contient donc deux inconnues et les valeurs initiales des variables d'optimisation x^0 ont été fixées à $E_0 = 0,3 \times 10^{11} N \cdot m^{-2}$ et $G_0 = \frac{E_0}{2(1+\upsilon)} N \cdot m^{-2}$.
La figure 3(a) présente l'évolution de la fonctionnelle énergétique globale moyenne en fonction du nombre *m* de modes à la convergence de l'algorithme. Cette grandeur est définie par le rapport entre la fonctionnelle quadratique $f\left(x^i\right)$ (12) et le carré du nombre de modes m^2. Cette quantité caractérise l'écart entre les quantités modales calculées et mesurées pour chaque mode. Celle-ci, tracée en foncé (Fig. 3(a)), décroît avec le nombre *m* de modes considérés ce qui signifie que la modèle EF proposé est représentatif de la dynamique globale du rotor étudié. Le nombre de modes considérés a également une influence sur les valeurs des propriétés constitutives identifiées de l'ET comme le montre la figure 3(b). Cependant, pour ce rotor, les paramètres



(a) Dispositif de suspension du rotor.

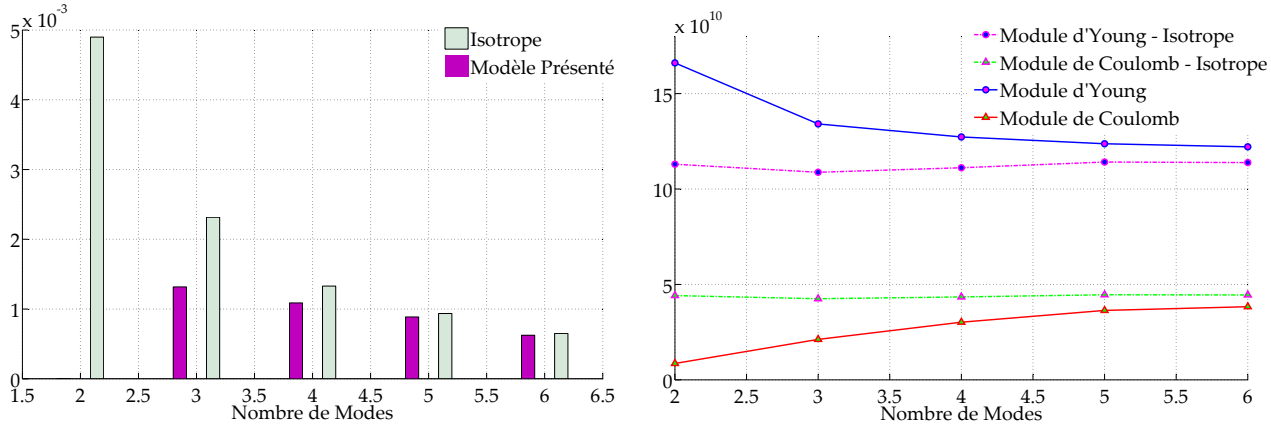
(b) Six premières formes propres calculées (continu) et mesurées (pointillés).

FIGURE 2 – Dispositif expérimental et formes propres.

identifiés tendent vers des valeurs asymptotiques à partir de cinq modes. Par conséquent, il est nécessaire de prendre en compte un nombre suffisant de modes, représentatif de la dynamique de la structure étudiée, pour identifier des propriétés constitutives pertinentes.
La même procédure d'identification a été réalisée en considérant l'ET comme un matériau isotrope, *i.e.* le module de Coulomb est défini comme une fonction linéaire du module d'Young. La fonctionnelle énergétique globale moyenne, tracée en clair (Fig. 3(a)), est environ $4,1\%$ à 75% (pour m = 3, ...,6) supérieure à la valeur de la fonctionnelle énergétique globale moyenne obtenue à la convergence de l'algorithme d'optimisation du modèle EF présenté. Aussi, la figure 3(b) montre que la valeur asymptotique du module de Coulomb

Mode	1	2	3	4	5	6
Mesurée (Hz)	$435,55$	$735,16$	$1159,4$	$1802,0$	$2425,8$	$2918,4$
Calculée (Hz)	$418,86$	$796,78$	$1188,6$	$1781,8$	$2335,5$	$2889,1$
Erreur $(\%)$	$-3,83$	$8,38$	$2,52$	$-1,12$	$-3,72$	$-1,00$

TABLE 1 – Valeurs des six premières fréquences propres de flexion calculées et mesurées.



(a) Evolution de la fonctionnelle globale moyenne en fonction du nombre de modes.

(b) Evolution des modules de Young (cercle) et de Coulomb (triangle) en fonction du nombre de modes, en $N \cdot m^{-2}$.

FIGURE 3 – Variables de l'algorithme d'optimisation en fonction du modèle de matériau considéré.

de l'ET du modèle proposé est inférieure à celle obtenue avec l'hypothèse d'isotropie. Ainsi, la procédure d'identification présentée est plus précise que des méthodes classiques considérant des hypothèses restrictives, telle que l'isotropie, sur le comportement mécanique de l'ET.
Les six premières fréquences propres calculées et mesurées sont présentées dans le TAB. 1 alors que leurs formes propres associées sont tracées dans la figure 2(b). Les fréquences et formes propres calculées ont été obtenues en considérant six modes dans la procédure d'identification. L'erreur relative entre les fréquences propres calculées et mesurées est comprise entre $1,0\%$ et $8,4\%$ avec une moyenne de $3,6\%$. La figure 2(b) montre une bonne corrélation entre formes propres calculées et mesurées.

7 Conclusion

La procédure d'identification a été réalisée sur une structure industrielle et a permis d'établir un modèle EF de poutres contenant peu de ddl ce qui est avantageux pour la prévoir la dynamique de rotors à la conception complexe. La combinaison d'une fonctionnelle énergétique à la condensation de Guyan est une solution efficace pour identifier les paramètres d'un modèle EF à partir de données a priori non compatibles, pulsations et formes propres. Les propriétés constitutives de l'ET d'un rotor à cage d'écureuil ont donc été identifiées avec pertinence dans la mesure où le nombre de modes utilisés est suffisamment représentatif de la dynamique de la structure testée.

Remerciement

Les auteurs remercient Converteam pour son support technique et son autorisation de publier cette recherche.

Références

[1] Belmans R., Heylen W., Vandenput A., and Geysen W. Influence of rotor-bar stiffness on the critical speed of an induction motor with an aluminium squirrel cage. In IEEE Proceedings, Vol. 131, Part B, N°5, pages 203–208, 1984.

[2] McClurg J. Advantages of stiff shaft design on high speed, high horsepower squirrel cage induction motors and generators. In 34th APCI Conference, pages 259–263, 1987.

[3] Ede J., Howe D., and Zhu Z. Rotor resonances of high-speed permanent-magnet brushless machines. IEEE Transactions on Industry Applications, 38(6), 1542–1548, 2002.

[4] Garvey S., Penny J., Friswell M., and Lees A. The stiffening effect of laminated rotor cores on flexible-rotor electrical machines. In IMechE Event Publications, Vol. 2004, N°2, pages 193–202, 2004.

[5] Chen Y., Cheng Y., Liao J., and Chiou C. Development of a finite element solution module for the analysis of the dynamic behavior and balancing effects of an induction motor system. Finite Elemens in Analysis and Design, pages 2047–2051, 2008.

[6] Kim Y.-C. and K-W K. Influence of lamination pressure upon the stiffness of laminated rotor. JSME - International Journal - Series C, 49(2), 426–431, 2006.

[7] Lee C. and Kam T. Identification of mechanical properties of elastically restrained laminated composite plates using vibration data. Journal of Sound and Vibration, 295(3-5), 999–1016, 2006.

[8] Feng X., Zhou J., and Fan Y. Identifying sub-regional material parameters of concrete dams using modal data. Acta Mechanica Solida Sinica, 16(1), 88–94, 2003.

[9] Cugnoni J. Identification par recalage modal et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites. Thèse n°3106, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.

[10] Andrieux S. and Baranger T. Energy methods for cauchy problems of evolutions equations. Journal of Physics : Conference Series, 135, 2008.

[11] Craig Jr. R. and Bampton M. Coupling of substructures for dynamic analyses. AIAA Journal, 6(7), 1313–1319, 1968.

[12] Ojalvo I. Efficient computation of mode-shape derivatives for large dynamic systems. AIAA Journal, 25(10), 1386–1390, 1987.

[13] Min Y., Zhong-Sheng L., and Da-Jun W. Comparison of several approximate modal methods for computing mode shape derivatives. Computers and Structures, 62(2), 381–393, 1997.

[14] Nelson R. Simplified calculation of eigenvector derivatives. AIAA Journal, 14(9), 1201–1205, 1976.

[15] Przemieniecki J.-S. Theory of Matrix Structural Analysis. Dover Publications, INC., New York, 1985.

[16] Lalanne M. and Ferraris G. Rotordynamics Prediction in Engineering. John Wiley and Sons Ltd, New York, 2 edition, 1998.

[17] Cowper G. The shear coefficient in timoshenko's beam theory. J. of Appl. Mech., 33(2), 335–340, 1966.

[18] Nielsen H. Damping parameter in marquardt's method. Technical report, Technical Univ. of Denmark, 1999.