



HAL
open science

Simulation particulière de l'écoulement de l'eau dans un sol partiellement saturé

Anthony Beaudoin, Serge Huberson, Elie Rivoalen

► **To cite this version:**

Anthony Beaudoin, Serge Huberson, Elie Rivoalen. Simulation particulière de l'écoulement de l'eau dans un sol partiellement saturé. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03390700

HAL Id: hal-03390700

<https://hal.science/hal-03390700>

Submitted on 21 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Simulation particulière de l'écoulement de l'eau dans un sol partiellement saturé

A. BEAUDOIN^a, S. HUBERSON^b ET E. RIVOALEN^a

a. Laboratoire Ondes et Milieux Complexes (LOMC - FRE CNRS 3102), Université du Havre, 25 rue Philippe Lebon, 76058 Le Havre

b. Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques (LEA - UMR CNRS 6609), Université de Poitiers, 15 rue de l'Hôtel Dieu, 86034 Poitiers

Résumé :

Sous certaines hypothèses, l'écoulement de l'eau dans un sol partiellement saturé peut être décrit par l'équation de Richards. Sa résolution numérique est difficile à cause de sa forme non linéaire. D'autres difficultés peuvent apparaître : domaine de calcul infini et infiltration avec front abrupte. Des techniques spécifiques doivent alors être utilisées. Les deux derniers problèmes suggèrent qu'une méthode particulière devrait être intéressante à cause de sa capacité à transporter des discontinuités et à résoudre naturellement les conditions aux limites externes. Cependant, la forme non linéaire de l'équation de transport constitue une difficulté pour de telles simulations. Ce travail présente une complète solution de ce type de problème basée sur deux méthodes alternatives, appelées Particle Strength Exchange and Diffusion velocity.

Abstract :

Under any assumptions, the groundwater flow in an unsaturated soil can be described by the Richards equation. The Richards equation is difficult to solve because of its non-linear form. Other difficulties can appear : unbounded computational domain and abrupt forehead of impregnation. So the use of specific techniques is required. The last two problems suggest that a particle method should be of some interest because of its ability to transport discontinuities and to naturally resolve external boundary conditions. However, the strong non-linearity constitutes a difficult obstacle for such simulations. This work presents a complete solution of these problems based on two alternative methods, called Particle Strength Exchange and Diffusion velocity.

Mots clefs : Milieu non saturé, équation de Richards, méthode particulière

1 Introduction

En hydrogéologie, la zone non saturée est la partie du sous sol située entre la surface du sol et la surface de la nappe phréatique. Dans cette zone, les pores du sol sont partiellement remplis d'eau et d'air, contrairement à la zone saturée dans laquelle la totalité du système poreux est rempli d'eau et contient la nappe phréatique. Au sein de la zone non saturée, plusieurs phénomènes physiques telles que l'infiltration, l'évaporation et la recharge de la nappe phréatique, peuvent avoir lieu [1]. En supposant le sol comme un milieu poreux homogène et indéformable et l'air comme une phase gazeuse continue et à pression atmosphérique, l'infiltration de l'eau peut être décrite par l'équation de Richards [2]. Cette équation est obtenue en couplant l'équation de conservation de masse à la loi de Darcy généralisée. Cette équation est hautement non linéaire à cause de la dépendance de la conductivité hydraulique et de la charge hydraulique à la saturation en eau [3]. Un historique détaillé des méthodes de résolution de cette équation est donné dans les travaux de Varado *et al.* [4] et de Miller *et al.* [5]. Apparues dans les années 50, les solutions analytiques sont limitées à des conditions géométriques et initiales simplifiées. C'est à partir de 1975 que sont disponibles des solutions numériques. Elles permettent de résoudre des problèmes plus réalistes. Mais elles peuvent présenter des difficultés tels que le non respect de la conservation de la masse, une pauvre résolution des fronts d'infiltration et une mise en défaut des solveurs linéaires ou non linéaires. Ces difficultés peuvent être résolues en utilisant une discrétisation fine en temps et en espace. Dans le cas de front abrupte d'infiltration, cette discrétisation fine peut devenir coûteuse. Pour remédier à ces difficultés, une méthode lagrangienne peut être utilisée [6]. Cette méthode lagrangienne, appelée méthode particulière, s'appuie sur une discrétisation lagrangienne du domaine de calcul et une représentation lagrangienne de l'équation de Richards. Ces deux principes permettent d'avoir un maillage adaptatif c'est à dire les particules mouvantes vont à l'endroit où on doit transporter une information. Cette propriété est intéressante pour résoudre des problèmes d'infiltration avec un front abrupte. L'approche lagrangienne permet aussi une introduction simple d'un écoulement complexe dû aux relations reliant la perméabilité et la charge hydraulique à la saturation en eau. Pour déterminer la trajectoire des particules mouvantes, la vitesse d'écoulement ne doit

être connue qu'à la position des particules. Cependant cette approche lagrangienne a aussi ses propres défauts par rapport aux méthodes eulériennes. En particulier le traitement du terme de diffusion d'une équation de transport pose des difficultés [7]. Dans la méthode particulière, deux solutions sont proposées : PSE (Particle Strength Exchange) [8] et DV (Diffusion Velocity) [9]. Ce travail présente une validation de ces deux solutions appliquées à des problèmes d'écoulement d'eau dans un sol partiellement saturé.

2 Equation de Richards

Sous certaines hypothèses simplificatrices, l'écoulement de l'eau dans un sol partiellement saturé peut être décrit par l'équation de Richards [2] :

$$\frac{\partial S_e}{\partial t} - \nabla \cdot (K(S_e) \nabla H(S_e)) = 0 \quad \text{avec} \quad H(S_e) = h(S_e) - z \quad \text{et} \quad S_e = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r) \quad (1)$$

où S_e désigne la saturation effective en eau [sans dimensions], θ la teneur en eau [cm^3/cm^3], θ_r la teneur en eau résiduelle [cm^3/cm^3], θ_s la teneur en eau de saturation [cm^3/cm^3], K la perméabilité [cm/s], H la charge hydraulique [cm], h le potentiel matriciel [cm] et z la cote positive dans le sens ascendant [cm]. Les deux paramètres hydrodynamiques du sol, K et h , peuvent être donnés par des expressions empiriques comme celles proposées par Van Genuchten [10] :

$$h = \frac{1}{\alpha} \left(S_e^{\frac{n}{1-n}} - 1 \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad K = k_{sat} S_e^{1/2} \left(1 - \left(1 - S_e^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right)^2 \quad (2)$$

α [cm^{-1}] représente la pression d'entrée de l'air et n [sans dimensions] est un paramètre de forme permettant de prendre en compte la distribution de la taille des pores. Plus le milieu poreux a une texture fine, plus n est proche de 1 [11]. k_{sat} [cm/s] désigne la perméabilité à saturation. L'équation (1) peut être réécrite sous une forme faisant intervenir la diffusivité hydraulique E [6] :

$$\frac{\partial S_e}{\partial t} + \nabla \cdot (K \mathbf{k}) = \nabla \cdot (E \nabla S_e) \quad \text{avec} \quad E = K \frac{\partial h}{\partial S_e} \quad (3)$$

En définissant trois grandeurs caractéristiques, longueur caractéristique $\frac{1}{\alpha}$, perméabilité caractéristique k_{sat} et temps caractéristique $\frac{1}{\alpha k_{sat}}$, une forme adimensionnelle de cette équation est donnée par :

$$\frac{\partial S_e}{\partial t^*} + \nabla^* \cdot (K^* \mathbf{k}) = \nabla^* \cdot (E^* \nabla^* S_e) \quad (4)$$

L'exposant * indique une variable adimensionnelle. E^* , h^* et K^* sont définies par :

$$E^* = K^* \frac{\partial h^*}{\partial S_e}, \quad h^* = \left(S_e^{\frac{n}{1-n}} - 1 \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad K^* = S_e^{1/2} \left(1 - \left(1 - S_e^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right)^2 \quad (5)$$

3 Méthode particulière

3.1 Définition des particules

Dans la méthode particulière, le champ de saturation en eau S_e est discrétisé en un ensemble de particules \mathcal{P}_i chacune définie par un vecteur position \mathbf{X}_i et un poids Ω_i :

$$\mathbf{X}_i = \frac{\int_{|P_i|} \mathbf{X} dv}{\int_{|P_i|} dv} \quad \text{et} \quad \Omega_i = \int_{|P_i|} S_e(\mathbf{X}) dv \quad (6)$$

$|P_i|$ désigne le support des particules \mathcal{P}_i . Le champ de saturation S_e peut être approché à partir du nuage de particules :

$$S_e(\mathbf{X}) = \sum_i \Omega_i \zeta_\epsilon(\mathbf{X} - \mathbf{X}_i) \quad \text{avec} \quad \zeta_\epsilon(\mathbf{X}) = (1/\epsilon^d) \zeta(\mathbf{X}/\epsilon) \quad (7)$$

où d désigne la dimension de l'espace et ϵ est un paramètre qui assure que le support de la fonction ζ_ϵ recouvre un ensemble de particules suffisant pour approcher le champ de saturation S_e . La fonction de régularisation ζ_ϵ est d'ordre r si elle satisfait les conditions suivantes :

$$\int_{\mathcal{R}^d} \zeta_\epsilon(\mathbf{X}) dv = 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{R}^d} \mathbf{X}^m \zeta_\epsilon(\mathbf{X}) dv = 0 \quad \text{avec} \quad m \leq r - 1 \quad (8)$$

Le paramètre ϵ est choisi constant et une trop grande distorsion du nuage de particules provoquera une perte de précision dans le calcul de l'expression (Eq. 5). Pour remédier à ce problème, une procédure de remaillage doit être mise en place [12].

3.2 Information transportée

L'équation (3) peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial S_e}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}_g S_e) = \nabla \cdot (E \nabla S_e) \quad \text{avec} \quad \mathbf{U}_g = \frac{K}{S_e} \mathbf{k} \quad (9)$$

\mathbf{U}_g représente une vitesse d'infiltration. Sous forme particulière, on a une équation de transport pour la position \mathbf{X}_i et le poids Ω_i de chaque particule \mathcal{P}_i :

$$\frac{d\mathbf{X}_i}{dt} = \mathbf{U}_{gi} \quad \text{et} \quad \frac{d\Omega_i}{dt} = \int_{|\mathcal{P}_i|} (\nabla \cdot (E \nabla S_e)) dv \quad (10)$$

La première équation ne pose pas de problème. Dans la pratique, cette équation de convection est résolue en utilisant un schéma en temps d'Adams-Bashforth ou encore de Runge-Kutta. Pour la résolution de la deuxième équation, il existe deux méthodes, PSE (Particle Strength Exchange) [8] et DV (Diffusion velocity) [9]. La méthode PSE s'appuie sur l'approximation de l'opérateur de diffusion de l'équation (3) par un opérateur intégral :

$$\nabla \cdot (E \nabla S_e) = \int_{\mathcal{R}^d} (E(\mathbf{X}) + E(\mathbf{X}')) (S_e(\mathbf{X}') - S_e(\mathbf{X})) \eta_\epsilon(|\mathbf{X}' - \mathbf{X}|) dv' \quad (11)$$

Si η_ϵ est une fonction à symétrie radiale, elle peut s'exprimer en fonction de ζ_ϵ :

$$\eta_\epsilon(\mathbf{X}) = -2 \frac{\nabla \zeta_\epsilon(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^2} = \frac{4}{\epsilon^2} \zeta_\epsilon(\mathbf{X}) \quad (12)$$

Sous forme discrétisée, le second membre de l'équation (11) est approché par l'expression suivante :

$$\int_{|\mathcal{P}_i|} (\nabla \cdot (E \nabla S_e)) dv = \sum_j (E_i + E_j) (\Omega_j |P_i| - \Omega_i |P_j|) \eta_\epsilon(|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|) \quad (13)$$

En utilisant un schéma en temps d'Euler explicite d'ordre 1, on trouve :

$$\Omega_i^{n+1} = \Omega_i^n + \delta t \sum_j (E_i + E_j) (\Omega_j |P_i| - \Omega_i |P_j|) \eta_\epsilon(|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|) \quad (14)$$

Dans la méthode DV, le terme de diffusion de l'équation (3) est interprété comme le mouvement des particules \mathcal{P}_i dans une direction qui est alignée avec le gradient local de la saturation en eau S_e . Cette remarque amène au concept de vitesse de diffusion \mathbf{U}_d :

$$\frac{\partial S_e}{\partial t} + \nabla \cdot ((\mathbf{U}_g + \mathbf{U}_d) S_e) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{U}_d = -\frac{E \nabla S_e}{S_e} \quad (15)$$

Le système d'équations (11) devient alors :

$$\frac{d\mathbf{X}_i}{dt} = \mathbf{U}_{gi} + \mathbf{U}_{di} \quad \text{et} \quad \frac{d\Omega_i}{dt} = 0 \quad (16)$$

Le terme ∇S_e est obtenu par une dérivation directe de l'équation (7).

4 Résultats

4.1 Ecoulement d'une goutte d'eau

Les deux méthodes, PSE et DV, sont éprouvées en simulant l'écoulement d'une goutte d'eau dans un milieu poreux infini 2D à teneur en eau résiduelle θ_r . L'évolution de la saturation en eau S_e est donnée par la forme adimensionnelle de l'équation de Richards, qui ne dépend uniquement du paramètre n . Ce paramètre n constitue un étalon de comparaison entre les méthodes. Nous avons testé les valeurs extrêmes de n : 1,5 et 6. L'état initial hydrique du sol est caractérisé par une gaussienne :

$$S_e(\mathbf{X}^*, t^* = 0) = S_{max} \exp\left(-\frac{|\mathbf{X}^*|^2}{\lambda^2}\right) \quad (17)$$

Les deux paramètres, S_{max} et λ , sont fixés respectivement à 0,75 et 0,45. La représentation lagrangienne évite de donner des dimensions au milieu poreux et d'imposer des conditions aux limites à la frontière du milieu poreux. La condition $S_e(\infty, t) = 0$ est automatiquement vérifiée par les méthodes particulières. Les deux méthodes langrangiennes, utilisent le même nombre de particules émises n_p qui varie entre 861 et 4661 pour les deux valeurs de n . Comme le pas de temps δt est lié au nombre de particules n_p par la relation $\epsilon \leq \sqrt{\delta t E}$, nous avons $2,2 \cdot 10^{-4} \leq \delta t \leq 1,37 \cdot 10^{-3}$ pour $n = 1,5$ et $7,9 \cdot 10^{-4} \leq \delta t \leq 5,0 \cdot 10^{-3}$ pour $n = 6,0$. A partir d'une étude de sensibilité, nous avons retenu une fréquence de remaillage n_f de 10. Les résultats, obtenus avec les deux méthodes lagrangiennes sont comparés à ceux obtenus avec le logiciel NAPL (Non Aqueous Phase Liquid). Ce logiciel a été développé dans les années 90 par l'agence américaine de protection de l'environnement [13]. Basé sur des éléments finis, ce code de calcul permet de simuler en 2D ou 3D l'écoulement de trois phases fluides (eau, air et polluant non miscible) dans un milieu partiellement ou totalement saturé. Seuls les résultats obtenus avec $n = 6$ sont représentés. Sur la figure (1), nous avons reportés le profil de saturation en eau S_e , de la diffusivité E^* et de la perméabilité K^* obtenus par les deux méthodes lagrangiennes et la méthode eulérienne à deux instants $t^* = 0$ et 0,39. On constate que les trois méthodes donnent des résultats très proches. En particulier, les deux méthodes lagrangiennes donnent des résultats identiques. A cause des relations en puissance de n de Van Genuchten, un faible écart sur la saturation en eau S_e donne un écart plus prononcé sur la diffusivité E^* et la perméabilité K^* . Les extrémités des profils sont correctement reproduits dans les trois méthodes. Aucune oscillation n'est observée. Les figures

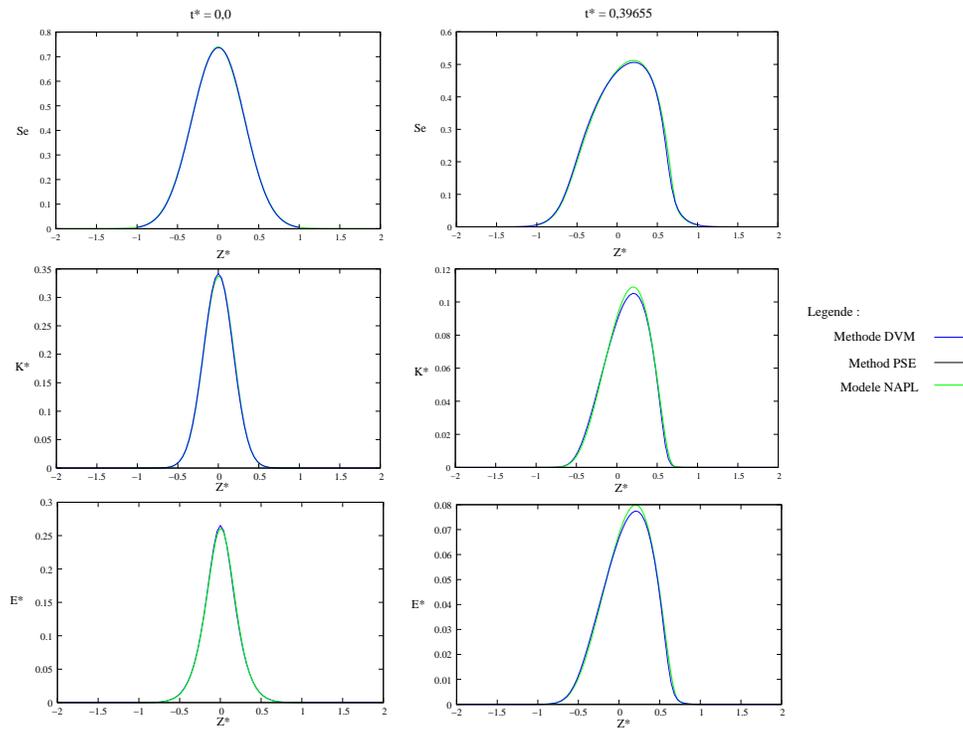


FIG. 1 – Profils de la saturation en eau S_e , de la perméabilité K^* et de la diffusivité E^* obtenus par les trois méthodes à deux instants $t^* = 0$ et 0,40 pour $n = 6$.

(2) et (3) donnent les résultats d'une étude de sensibilité par rapport à la discrétisation spatiale pour les trois méthodes. La discrétisation spatiale est définie par les nombres de maille $N_x = N_y$ dans les directions x et y pour la méthode eulérienne et le nombre de particules N_p pour les méthodes PSE et DV. Pour les trois méthodes, nous avons estimé la saturation en eau S_e en $X^* = (0, 0)$ au même instant $t^* = 0,40$. La sensibilité des méthodes par rapport à la discrétisation spatiale est appréciée en évaluant l'écart de la saturation en eau ΔS_e entre deux discrétisations successives. Les trois méthodes convergent vers le même écart ΔS_e . Les méthodes lagrangiennes sont plus rapides à converger. La convergence de la méthode eulérienne nécessite un effort de temps de calcul plus important. Les méthodes lagrangiennes ont des temps de simulation largement plus faibles.

4.2 Ecoulement dans une colonne

Pour compléter la validation, nous reprenons un cas pratique 1D utilisé par Taigbenu *et al.* [14]. Taigbenu *et al.* traitent l'équation de Richards sous forme dimensionnelle et les conditions aux limites en développant un modèle basé sur une méthode intégrale de frontière couplée à une méthode éléments finis. Pour valider leur modèle, Taigbenu *et al.* réalisent quatre tests. Nous avons repris le premier test consistant à simuler

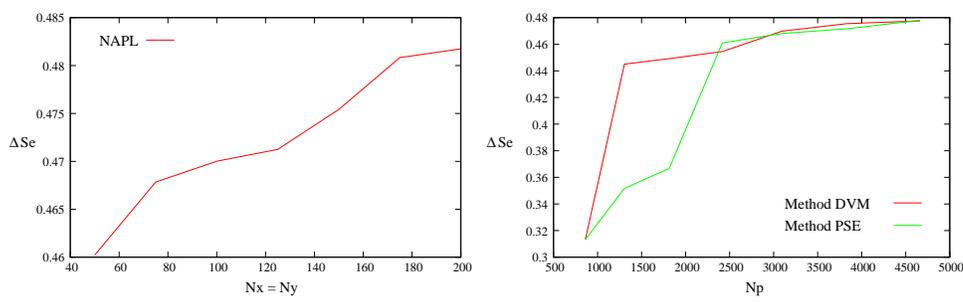


FIG. 2 – Ecart sur la saturation en eau ΔS_e en fonction de la discrétisation $N_x = N_y$ pour la méthode eulérienne (gauche) et N_p pour les méthodes lagrangiennes, PSE et DV (droite).

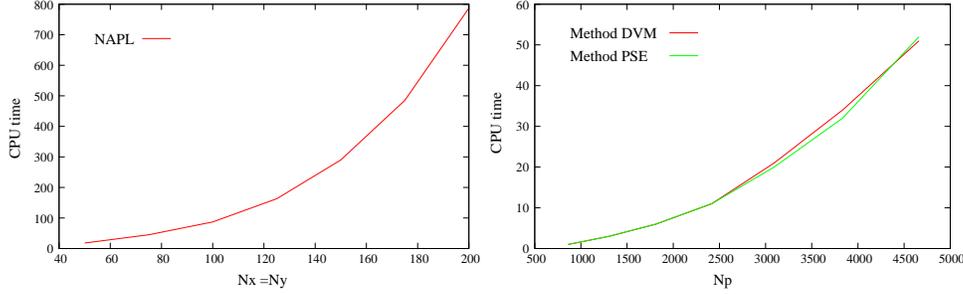


FIG. 3 – Temps CPU (en secondes) en fonction de la discrétisation $N_x = N_y$ pour la méthode eulérienne (gauche) et N_p pour les méthodes lagrangiennes, PSE et DV (droite).

l'écoulement de l'eau dans une colonne horizontale de longueur 20 cm. Le sol, contenu dans la colonne est à une teneur en eau résiduelle $\theta_r = 0, 2$. Pour $t > 0$, une teneur en eau de saturation $\theta_s = 0, 45$ est imposée à l'entrée de la colonne. Le sol est caractérisé par une perméabilité K et un potentiel matriciel h :

$$K(\theta) = \frac{10}{3}\theta - 0, 5 \quad [\text{cm/jour}] \quad \text{et} \quad h(\theta) = \frac{1000}{3}\theta - 150 \quad [\text{cm}] \quad (18)$$

En plus de la comparaison de nos résultats avec ceux de Taigbenu *et al.*, nous utilisons la théorie d'infiltration de Philip [15]. Philip montre que l'infiltration cumulée est donnée par :

$$I(t) = S\sqrt{t} + At \quad (19)$$

S et A désignent respectivement la sorptivité [$\text{cm}/\text{min}^{1/2}$] et la transmissivité [cm/min] du milieu poreux. La sorptivité S reflète la capacité du sol à absorber l'eau par les forces de capillarité. La transmissivité A est la capacité du sol à absorber l'eau par les forces de gravité. Ces deux paramètres sont donnés par des relations empiriques comme celles proposées par Mbagwu [16] :

$$S = 5, 4((w - \theta_r)\theta_s k_{sat})^{0,17} \quad \text{et} \quad A = 0, 0058 + 0, 36k_{sat} \quad (20)$$

w désigne la porosité du milieu poreux. En entrée de colonne, la teneur en eau θ est imposée à la teneur en eau de saturation θ_s . Cette condition de Dirichlet est satisfaite en créant un réservoir fictif de particules dont le poids est donnée par $\Omega_i = |P_i|\theta_s$ [17]. Pour les paramètres numériques utilisés, le nombre de particules émises n_p et la fréquence de remaillage n_f sont 350 et 4. Ces paramètres ont été choisis à partir d'une étude de sensibilité. Comme les deux méthodes lagrangiennes donnent les mêmes résultats, seuls les résultats obtenus avec la méthode DV sont représentés. Sur la figure (2 - gauche), nous avons reporté à différents instants t (en jours) les profils de teneur en eau θ obtenus avec la méthode DV et par Taigbenu *et al.*. Les deux méthodes, lagrangienne et eulérienne, donnent des profils de saturation en eau très proches. es. La figure (12- droite) montre l'infiltration cumulée I en fonction du temps t (en jours), obtenue avec la méthode DV et la solution analytique de Philip. La méthode particulière décrit correctement l'infiltration cumulée I .

5 Conclusion

Dans ce travail, nous proposons de résoudre des problèmes d'écoulement d'eau dans des milieux partiellement saturés à l'aide d'une méthode particulière afin d'éviter les difficultés rencontrées par les méthodes eulériennes classiques. Pour traiter correctement le terme diffusif de l'équation de transport, deux approches sont utilisées :

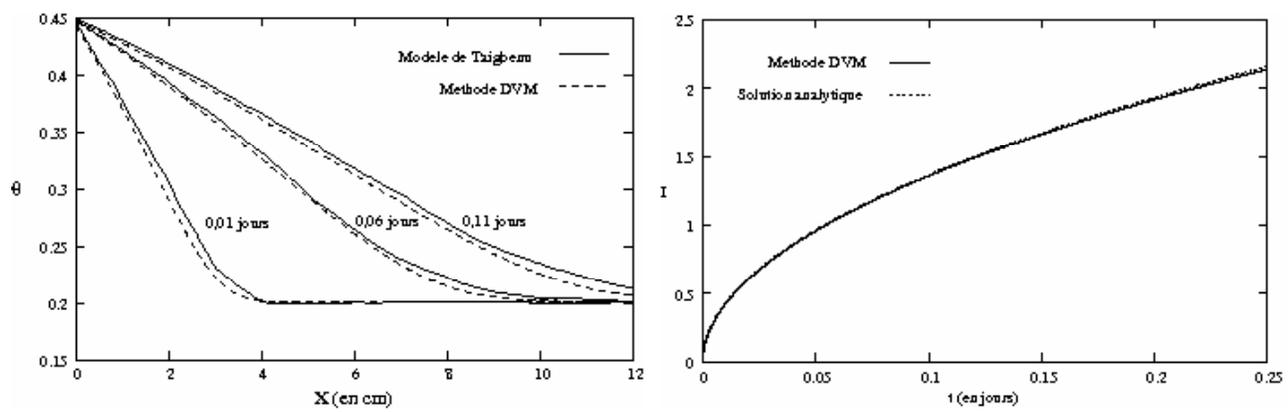


FIG. 4 – Profils de teneur en eau θ à différents instants t (gauche) et infiltration I en fonction du temps t (droite).

PSE (Particle Strength Exchange) et DV (Diffusion Velocity). Ces deux solutions sont étudiées à l'aide de deux cas tests. Les résultats de ces deux cas tests montrent que ces deux solutions peuvent être appliquées à des problèmes d'infiltration d'eau présentant des fronts abruptes. Une analyse numérique plus étoffée devra être faite pour mieux comprendre le comportement de chaque approche. Cette analyse numérique pourra être complétée par des applications plus réalistes : problèmes 3D, conditions aux limites plus complexes, relations K et h plus complexes et utilisation de différents types de sols.

Références

- [1] De Marsily G. Quantitative hydrogeology : groundwater hydrology for engineers. 1986.
- [2] Richards L. Capillary conduction of liquids through porous medium. *Physics*, 1, 318–333, 1931.
- [3] Feddes A., Kabat P., Van Bakel P., Bronswijk J., and Halbertsma J. Modelling soil water dynamics in the saturated zone - state of art. *Journal of Hydrology*, 100, 69–111, 1988.
- [4] Varado N., Braud I., Ross J., and Haverkamp R. Assessment of an efficient numerical solution of the 1d richard equation on bare soil. *Journal of Hydrology*, 213, 2006.
- [5] Miller C., Abhishek C., and Farthing M. A spatially and temporally adaptive solution of richard equation. *Advances in Water Resources*, 29, 525–545, 2006.
- [6] Rossi L. A high order lagrangian scheme for flow through unsaturated porous media. *Contemporary Mathematics*, 295, 1–12, 2000.
- [7] Tartakovsky A., Meakin P., Scheibe T., and Eichler West R. Simulations of reactive transport and precipitation with smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 222, 654–672, 2007.
- [8] Degond P. and Mas-Gallic S. The weight particle method for convection diffusion equation, part 2 : the case of anisotropic viscosity. *Math. Comp.*, 53, 1989.
- [9] Degond P. and Mustieles F. A deterministic approximation of diffusion equations using particles. *SIAM J. Sci. Statis. Comp.*, 11, 1990.
- [10] Van Genuchten M. A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society American Journal*, 44, 892–989, 1980.
- [11] Khaleel R. and Saripalli S. An air water interfacial area based variable tortuosity model for unsaturated sands. *Vadose Zone Journal*, 26, 764–776, 2006.
- [12] Cotter G. and Koumoutsakos P. Vortex methods theory and practice. 2000.
- [13] Guarnaccia P. G. F. M., J. and ShortDegond T. Napl simulator documentation. Technical Report EPA/600/R-97/102 report, EPA, 1997.
- [14] Taigbenu A. and Onyejekwe O. Green elements simulations of the transient nonlinear unsaturated flow equation. *Appl. Math. Modelling*, 19, 675–684, 1995.
- [15] Philip J. Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration dependent ii. Technical report, Division of plant industry, C.S.I.R.O., Deniliquin, N.S.W, 1956.
- [16] Mbagwu J. Soil physical properties influencing the fitting parameters in philip and kostiakov infiltration models. Technical Report IC/94/97 Internal Report, International Atomic Energy Agency and United Nations Educational Scientific and Cultural Organisation, 1994.
- [17] Szymczak P. and Ladd J. Boundary conditions for stochastic solutions of the convection-diffusion equation. *Physical Review E.*, 68, 2003.