



**HAL**  
open science

# Le comportement quasi-statique des milieux granulaires à particules non-convexe

Baptiste Saint-Cyr, Jean-Yves Delenne, Philippe Sornay, Farhang Radjai,  
Charles Voivret

► **To cite this version:**

Baptiste Saint-Cyr, Jean-Yves Delenne, Philippe Sornay, Farhang Radjai, Charles Voivret. Le comportement quasi-statique des milieux granulaires à particules non-convexe. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03378726

**HAL Id: hal-03378726**

**<https://hal.science/hal-03378726v1>**

Submitted on 14 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Influence de la non-convexité des particules sur le comportement en cisaillement des milieux granulaires.

B. SAINT-CYR<sup>a,b</sup>, C. VOIVRET<sup>a</sup>, J.-Y DELENNE<sup>a</sup>, F. RADJAI<sup>a</sup>, ET P. SORNAY<sup>b</sup>

*a. LMGC, CNRS-Université Montpellier 2, Place Eugène Bataillon 34095 Montpellier cedex, France*

*b. Commissariat à l'Energie Atomique, DEN/DEC/SPUA/LCU, 13108 St Paul lez Durance, France*

## Résumé :

*Dans cet article nous étudions l'effet de la forme non-convexe des particules, sur la résistance au cisaillement et la texture de milieux granulaires à l'aide d'une modélisation bidimensionnelle. Les particules sont constituées par des trimères rigides, composés de trois disques sécants de même diamètre positionnés à 120 degrés les uns des autres. La non-convexité est fonction du diamètre des disques et de leur interpénétration.*

*Des simulations de compactage isostatique et de cisaillement sont réalisées à l'aide de la méthode de dynamique des contacts sur des échantillons de 5000 trimères présentant différents degrés de non-convexité. La forme des trimères entraîne la présence de différents types de contacts (simples, doubles et triples).*

*Nous observons sans ambiguïté que la résistance au cisaillement augmente avec la non-convexité puis atteint une asymptote. Ce comportement est dû à la compensation de la diminution de l'anisotropie de contacts par l'augmentation de l'anisotropie des forces normales.*

*Nous montrons également que les contacts doubles et triples supportent les efforts les plus importants bien qu'ils soient peu nombreux par rapport aux contacts simples.*

**Mots clés :** milieux granulaires, non-convexité, méthode de dynamique des contacts, compaction

## 1 Introduction

De nombreux travaux de simulations numériques réalisés dans l'objectif de mieux comprendre la rhéologie et la microstructure des milieux granulaires se sont développés autour de matériaux modèles présentant des particules sphériques ou polyédriques (circulaires et polygonales en 2D). Dans ces travaux, les particules modélisées sont de formes diverses mais convexes.

Nous pouvons citer par exemple les polyèdres qui caractérisent les particules de ballast ferroviaire ou le kaolin aplati de l'argile. Cependant, dans la nature ou bien encore dans certains procédés industriels, les particules présentent des formes non-convexes comme par exemple certaines poudres ayant subi lors de leur synthèse une étape de calcination. Or, la forme des particules est un des paramètres majeurs qui contrôle le comportement des milieux granulaires. Par exemple, l'angularité des particules polyédriques augmente la résistance au cisaillement comme dans certains géomatériaux tandis que la sphéricité favorise une meilleure coulabilité [1]. L'objet de ce travail est l'étude numérique du comportement quasi-statique de milieux granulaires composés de particules non-convexes. Les simulations numériques sont menées par une méthode de type éléments discrets s'appuyant sur la méthode de la dynamique des contacts.

La notion de non-convexité est très liée à la notion d'échelle, selon que nous la considérons comme une déviation par rapport à la sphéricité (concavité) ou par rapport à une surface parfaitement régulière (rugosité). Par exemple, dans les poudres d' $\text{UO}_2$ , servant à la fabrication du combustible nucléaire, les particules sont constituées d'agrégats rigides composés de cristallites de forme d'ovoïde [2]. Ces agrégats présentent des concavités provenant du préfrittage qui s'est produit entre les cristallites lors de la synthèse de la poudre.

Pour notre modélisation en 2D et afin de pouvoir faire varier la non-convexité de manière continue, les agrégats sont représentés sous forme de trimères formés par trois disques sécants de même diamètre et positionnés à 120 degrés comme le montre la figure 1. Ces trimères isométriques constituent une morphologie non-convexe facilement quantifiable à partir de forme convexe (disque) de taille égale et pour laquelle un paramètre de non-convexité peut être défini (cf. §2). Ce paramètre est fonction de la distance d'interpénétration entre les disques et de leurs diamètres. Dans notre modèle numérique les trimères constituent des particules rigides. Les empilements sont formés de 5000 trimères compactés de manière isotrope puis sont soumis à des essais de cisaillement. Lors de ces essais nous réalisons une analyse systématique de la rhéologie (cf. §3) ainsi que de la microstructure et du réseau de forces (cf. §4) en fonction de la non-convexité.

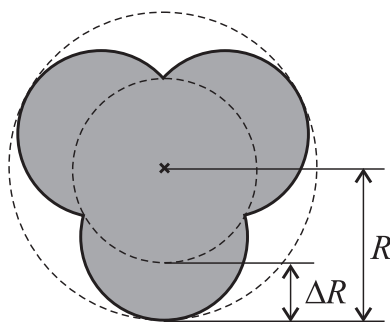
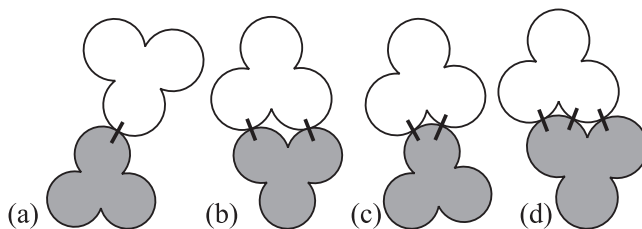
FIGURE 1 – Géométrie d'un trimère régulier et visualisation de la profondeur de concavité  $\Delta R$ 

FIGURE 2 – Différents types de contacts entre deux trimères : (a) simple, (b) double simple, (c) double, (d) triple

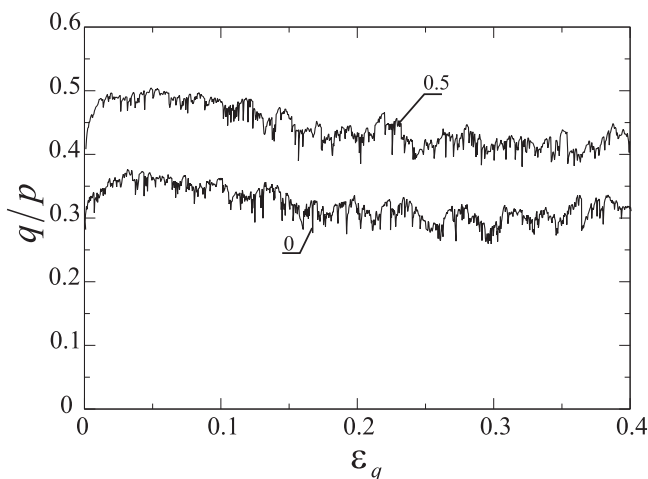
## 2 Protocole numérique

La non-convexité d'un trimère régulier composé de trois disques de rayon  $r$  peut être quantifiée par le ratio entre le rayon  $R$  de son cercle circonscrit sur le rayon  $R'$  de son cercle inscrit (cf. figure 1). La différence  $\Delta R = R - R'$  représente la profondeur de concavité du trimère, qui par définition correspond à un écart orienté vers l'intérieur de la courbure du cercle circonscrit. Par conséquent, le paramètre de non-convexité est défini par le rapport

$$\eta = \frac{\Delta R}{R} \quad (1)$$

Nous pouvons également exprimer  $\eta$  en fonction de la distance  $d$  entre le centre des disques constituant un trimère et leur rayon  $r$ . Le paramètre de non-convexité  $\eta$  varie de  $\eta = 0$  qui correspond à un trimère dont les disques sont totalement interpénétrés ( $d = 0$ ) à  $\eta \approx 0,73$  correspondant à trois disques tangents deux à deux ( $d = 2r$ ). Cette définition est similaire à celle du coefficient de sphéricité défini par Riley pour la caractérisation de la morphologie de fines coupes de roches [3].

Nous avons employé la méthode de la dynamique des contacts, pour simuler des échantillons de 5000 trimères c'est-à-dire 15000 disques [4, 5]. Les trimères considérés comme des corps rigides interagissent entre eux suivant des lois de contact (la loi de frottement de Coulomb et la condition d'impénétrabilité de Signorini). La forme des particules modèles permet d'avoir plusieurs contacts (jusqu'à 3) entre deux trimères (cf. figure 2).

FIGURE 3 – Contrainte normalisée  $q/p$  en fonction de la déformation cumulée  $\varepsilon_q$ , pour deux valeurs de  $\eta$ .

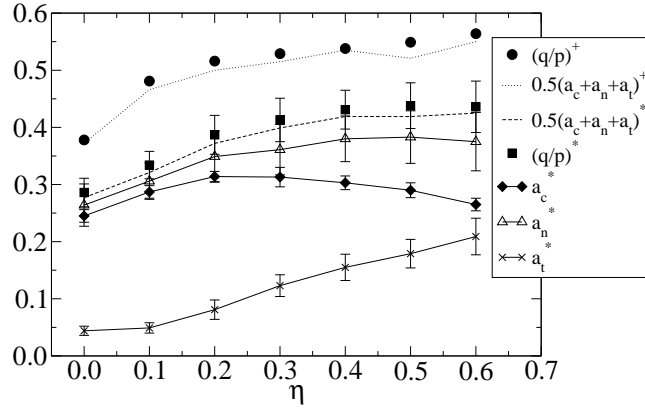


FIGURE 4 – La contrainte de cisaillement en fonction de  $\eta$ , au pic  $(q/p)^+$  et à l'état stationnaire  $(q/p)^*$  ajustée par l'expression théorique correspondante. Les anisotropies des orientations des contacts  $a_c^*$ , des forces normales  $a_n^*$  et des forces tangentielles  $a_t^*$  à l'état critique.

Le rayon du cercle circonscrit  $R$  peut être considéré comme une longueur de référence pour chaque trimère. Dans l'optique d'éviter toute forme d'organisation cristalline dans les compacts surtout pour de faibles valeurs de  $\eta$ , nous considérons une polydispersité caractérisée par un choix de  $R$  dans l'intervalle  $[R_{min}, R_{max}]$  avec  $R_{max} = 3R_{min}$  et une distribution des tailles de particules uniforme par fraction volumique. Les échantillons sont densifiés en compression isotrope pour laquelle deux parois perpendiculaires sont fixes et les deux parois opposées se déplacent sous l'effet de la contrainte appliquée  $p$ . La gravité  $g$  et les coefficients de frottement  $\mu$  et  $\mu_w$  respectivement pour les particules et pour les parois sont fixés à zéro dans le but d'obtenir des compacts homogènes, denses et isotropes. Ainsi, sept compacts de 5000 trimères sont préparés pour sept valeurs de  $\eta$  prises entre 0 et 0,6. Ces compacts sont ensuite soumis à des essais de cisaillement par compression biaxiale. Une vitesse verticale  $v_y$  est alors imposée sur la paroi du haut tout en maintenant une pression de confinement sur la paroi de droite. Le taux de déformation

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{v_y}{H} \quad (2)$$

où  $H$  désigne la hauteur de la boîte de cisaillement est faible afin d'assurer un régime de sollicitation quasi-statique. Lors de ces essais le coefficient de frottement entre les particules est pris égal à 0,3 pour évaluer les angles de friction internes tandis que le frottement entre les particules et les parois est maintenu égal à 0 afin de diminuer les effets de bord (effets d'arche).

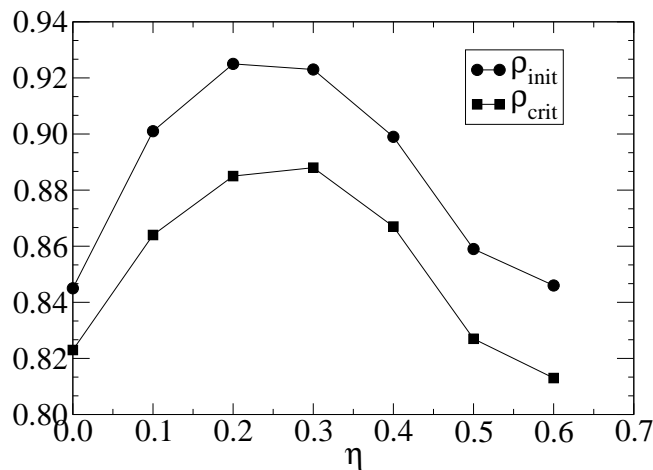
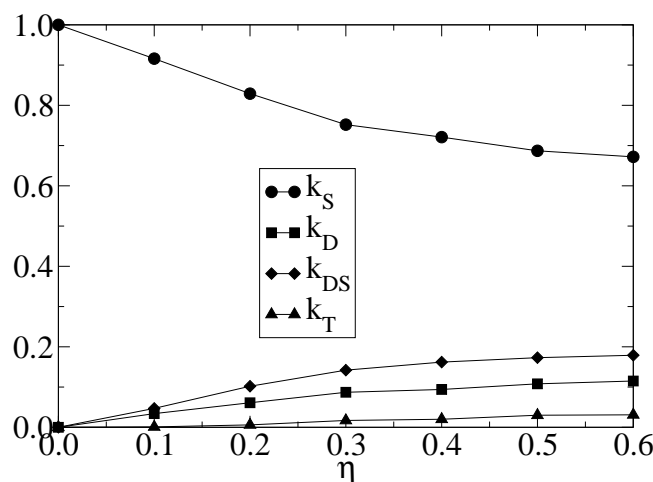
### 3 Comportement macroscopique

Le tenseur des contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$  est calculé à partir du produit dyadique des forces de contacts  $\vec{f}^c$  et des vecteurs branches  $\vec{\ell}^c$  reliant les centres des particules en contact [4, 6] :

$$\sigma_{\alpha\beta} = n_c \langle f_{\alpha}^c \ell_{\beta}^c \rangle_c \quad (3)$$

où  $n_c$  est le nombre de contacts  $c$  par unité de volume et  $\langle \dots \rangle_c$  désigne la moyenne sur l'ensemble des contacts  $c$  à l'intérieur de l'élément de volume considéré. Par suite, nous considérons la contrainte normalisée  $q/p$  avec  $q = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$  et  $p = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ , où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  désignent les contraintes principales. De même, nous considérons la déformation cumulée  $\epsilon_q = \epsilon_1 - \epsilon_2$ , où  $\epsilon_1, \epsilon_2$  sont les déformations principales définies par  $\epsilon_1(t) = \int_0^t v_y(t')/H(t') dt'$  et  $\epsilon_2(t) = \int_0^t v_x(t')/L(t') dt'$ . Sur la figure 3,  $q/p$  est tracé en fonction de  $\epsilon_q$  pour deux valeurs du paramètre de non-convexité  $\eta$ . La forte augmentation observée sur la figure 3 pour  $\epsilon_q \simeq 0$  est la conséquence d'une part du caractère rigide des particules et d'autre part de la densité initiale élevée des compacts. Pour les deux valeurs de  $\eta$ , la contrainte de cisaillement passe par un maximum dénommé pic par la suite, avant de s'adoucir vers un plateau plastique (état critique en mécanique des sols). Nous voyons que les courbes correspondant à  $\eta = 0$  et  $\eta = 0,5$  restent parallèles indépendamment du niveau de déformation. La figure 4 montre l'évolution de  $q/p$  à l'état de pic et à l'état critique en fonction de  $\eta$ . Le pic du déviateur de contrainte normalisé  $q/p$  augmente avec  $\eta$ , tandis qu'à l'état critique la non-convexité  $\eta$  influence légèrement  $q/p$  à partir de  $\eta = 0,4$ . De plus nous observons que la prédiction numérique basée sur les anisotropies de forces et de texture résultant du développement de Fourier des distributions angulaires des forces normales et tangentielles, est en accord avec les résultats de simulation numérique [7].

La figure 5 montre que la compacité aux états initiaux  $\rho_{init}$  et critiques  $\rho_{crit}$  en fonction de la non-convexité  $\eta$  présente la même évolution. Dans un premier temps la compacité croît lorsque  $\eta$  croît, puis décroît lorsque

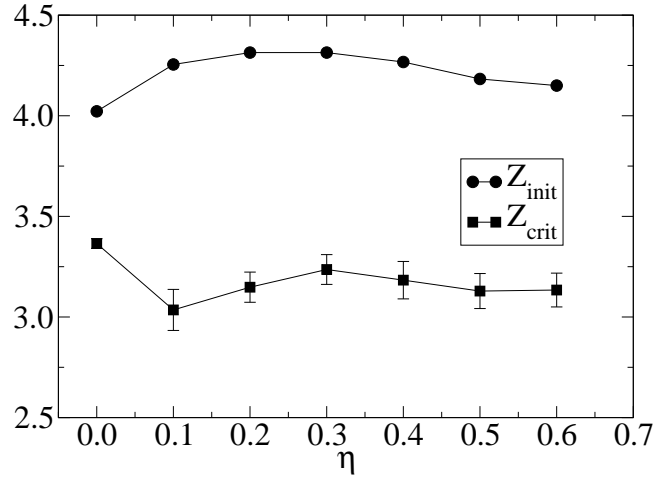
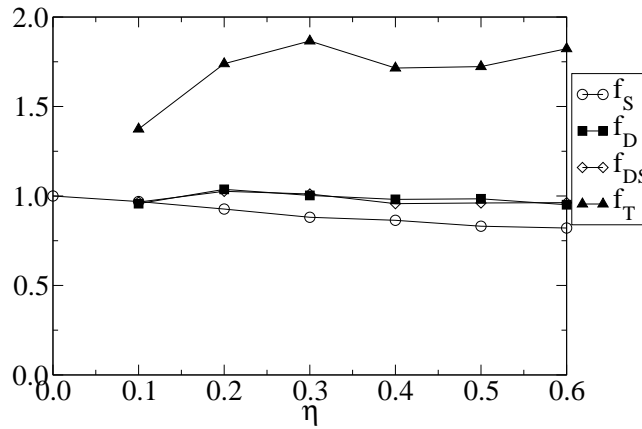
FIGURE 5 – Les compacités aux états initiaux et critiques en fonction de  $\eta$ .FIGURE 6 – Proportions de chaque type de contacts en fonction de  $\eta$  dans l'état critique.

$\eta \gtrsim 0,2$  dans l'état initial et lorsque  $\eta \gtrsim 0,3$  dans l'état critique. Pour  $\eta = 0,6$  la valeur de la compacité est proche de celle obtenue pour les disques parfaits ( $\eta = 0$ ). Le faible écart entre ces valeurs est dû à un effet géométrique de l'empilement des particules. En effet, pour  $\eta = 0,6$  l'interpénétration entre les trois disques de chaque trimère est si faible que la configuration de l'empilement est similaire à celle d'un empilement de disques. Par conséquent, les compacités sont sensiblement égales pour ces deux cas extrêmes. Dans l'état initial la compacité maximale est obtenue pour  $\eta = 0,2$  avec une valeur de 0,92. Il est intéressant de noter que la contrainte de cisaillement (cf. figure 4) n'évolue pas de la même manière que la compacité en fonction de  $\eta$ .

#### 4 Réseau de forces de contacts

L'effet majeur de la présence de concavités est la possibilité d'avoir plusieurs contacts entre deux particules. Quatre types différents de contacts peuvent exister entre deux trimères, (cf. figure 2) : (a) les contacts *simples*, (b) les contacts *double-simples* définis comme deux contacts simples entre deux paires de disques appartenant à un trimère, (c) les contacts *doubles* définis comme un contact entre un disque appartenant à un trimère et deux disques d'un autre trimère et (d) les contacts *triples* constitués d'un contact simple et d'un contact double. Nous avons reporté sur la figure 6 la proportion de chaque type de contact en fonction de  $\eta$  dans l'état critique. Lorsque  $\eta$  croît, la proportion des contacts simples diminue alors que celle des différents contacts multiples augmente. La figure 7 montre les nombres de coordinations aux états initiaux ( $Z_{init}$ ) et critique ( $Z_{crit}$ ) en fonction de  $\eta$ . La coordination évolue de manière non-linéaire comme la contrainte de cisaillement à ces mêmes états (cf. figure 3). Hormis la forte discontinuité obtenue dans le passage de  $\eta = 0$  à  $\eta = 0,1$  dans l'état critique un maximum est atteint pour  $0,2 < \eta < 0,3$ . La différence entre  $Z_{crit}$  et  $Z_{init}$  résulte du fait que la dilataance dépend de la forme des particules.

Les contacts multiples ne participent pas au transfert de couples. De ce fait, le blocage doit être essentiellement dû au frottement. Dans l'optique de mieux appréhender le rôle des contacts multiples vis-à-vis de la transmission des forces et de l'équilibre statique de l'empilement, nous considérons les forces radiales normalisées par la force radiale moyenne. Ces forces sont tracées sur la figure 8 par type de contacts et en fonction de

FIGURE 7 – Nombre de coordination dans l'état critique  $Z_{crit}$  et dans l'état initial  $Z_{init}$  en fonction de  $\eta$ .FIGURE 8 – Forces radiales moyennes normalisées pour chaque type de contact entre trimères en fonction de  $\eta$  dans l'état critique.

$\eta$ . Les forces radiales résultent de la projection des forces de contacts locales (normales et tangentielles) qui existent entre les disques composant les trimères sur le vecteur branche reliant le centre de deux trimères. Nous constatons que les contacts triples qui sont inférieurs en nombre aux contacts simples, supportent une charge moyenne plus importante. La contribution des contacts doubles et double-simples est identique et plus élevée que celle des contacts simples. Il ressort de ces observations, que c'est la présence de contacts doubles et/ou triples dans le cas de particules non-convexes qui modifie le comportement mécanique des empilements.

La figure 9 présente les forces normales pour  $\eta = 0, 1$  et  $\eta = 0, 5$ . Nous observons que les contacts doubles augmentent nettement la connectivité du réseau pour  $\eta = 0, 5$ . Leur rôle peut être comparé à des contacts de type face-face qui, dans les empilements de polygones, supportent la plus grande partie des forces normales [1].

En général, la résistance au cisaillement d'un milieu granulaire reflète sa capacité à développer des anisotropies de forces et de texture [8]. La quantité  $a_c$  caractérise l'anisotropie de texture du milieu. Par un développement de Fourier du second ordre nous avons :

$$P_c(\theta) = \frac{1}{\pi} \{1 + a_c \cos 2(\theta - \theta_c)\} \quad (4)$$

où  $P_c(\theta)$  est la distribution angulaire des normales aux contacts et  $\theta_c$  est la direction privilégiée de celles-ci. Par ailleurs, les anisotropies  $a_n$  et  $a_t$  des distributions angulaires des forces normales et tangentielles sont respectivement définies par [7] :

$$\langle f_n \rangle(\theta) = \langle f \rangle \{1 + a_n \cos 2(\theta - \theta_n)\} \quad (5)$$

$$\langle f_t \rangle(\theta) = \langle f \rangle a_t \sin 2(\theta - \theta_t) \quad (6)$$

où  $\langle f \rangle$  est la force moyenne et  $\theta_n$  et  $\theta_t$  sont respectivement les directions principales des forces normales et tangentielles. En combinant ces développements de Fourier dans l'expression du tenseur de contrainte  $\sigma_{\alpha\beta}$  et

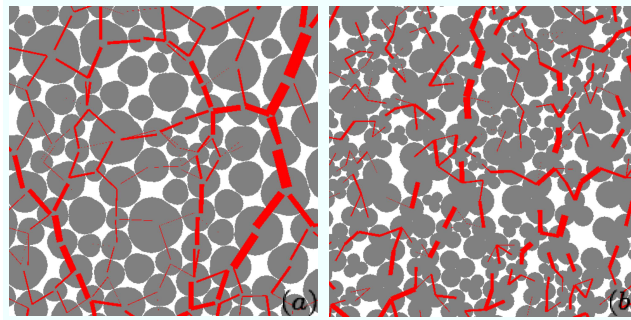


FIGURE 9 – Image d’une partie des échantillons pour  $\eta = 0.1$  (a) and  $\eta = 0.5$  (b). L’épaisseur des traits est proportionnelle aux forces normales.

en supposant l’indépendance des vecteurs branches par rapport aux forces de contacts, nous pouvons montrer que [7]

$$\frac{q}{p} \simeq \frac{1}{2}(a_c + a_n + a_t) \quad (7)$$

Les valeurs moyennes des anisotropies  $a_c^*$ ,  $a_n^*$  et  $a_t^*$  dans l’état critique sont reportées sur la figure 4 de même que la valeur de  $(q/p)^*$  prédite par la relation (7). Cette relation 7 est vérifiée au travers des résultats numériques. L’anisotropie de texture  $a_c^*$  augmente pour  $\eta < 0,2$ , puis décroît lentement. Cette décroissance de  $a_c^*$  s’accompagne d’une croissance de  $a_t^*$  tandis que  $a_n^*$  devient à peu près constant pour  $\eta > 0,3$ . Ces différentes évolutions des anisotropies et la relation (7) sont compatibles avec le fait que  $(q/p)^*$  soit quasi constante à partir de  $\eta > 0,3$ . En d’autres termes lorsque la non-convexité augmente, les anisotropies de forces et de texture évoluent en sens inverse.

## 5 Conclusion

En résumé, nous avons appliqué la méthode de dynamique des contacts à la simulation de grands échantillons de trimères non-convexes. Un paramètre adimensionné est proposé dans le but de quantifier la non-convexité de la forme des particules, et d’en étudier l’effet sur la résistance au cisaillement, la compacité, la texture et le réseau de forces. Nos résultats montrent que la résistance au cisaillement augmente avec le degré de non-convexité. Dans l’état critique, la diminution de l’anisotropie des orientations de contacts compensée essentiellement par l’augmentation des anisotropies de forces tangentielles, conduit à une valeur quasi constante de la contrainte déviatorique normalisée  $(q/p)^*$  par rapport à  $\eta$ . Ce dernier point peut être interprété comme une conséquence de la présence de contacts multiples.

## Références

- [1] Azéma E., Radjai F., Peyroux R., and Saussine G. Force transmission in a packing of pentagonal particles. *Phys. Rev. E*, 76(1 Pt 1), 011301, Jul 2007.
- [2] Fourcade J., Sornay P., Sudreau F., and Papet P. Experimental approach of uo2 compaction and analytical modelling of pellet diametric deformations. *Powder Metallurgy*, 49, 125–135, 2006.
- [3] Folk R. L. *Petrology of Sedimentary Rocks*. 1974.
- [4] Moreau J. Some numerical methods in multibody dynamics : Application to granular materials. *European Journal of Mechanics A/Solids*, supp.(4), 93–114, 1994.
- [5] Radjai F. Contact dynamics method. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 12, 871–900, 2008.
- [6] Staron L. and Radjai F. Friction versus texture at the approach of a granular avalanche. *Phys Rev E*, 72(4 Pt 1), 041308, Oct 2005.
- [7] Rothenburg L. and Bathurst R. J. Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials. *Geotechnique*, 39, 601–614, 1989.
- [8] Radjai F., Troadec H., and Roux S. Key features of granular plasticity. In Antony S., Hoyle W., and Ding Y., editors, *Granular Materials : Fundamentals and Applications*, pages 157–184, Cambridge, 2004. R.S.C.