



HAL
open science

Schéma basé sur le résidu d'ordre 3 en maillage non-structuré pour les équations d'Euler

Xi Du, Christophe Corre, Alain Lerat

► **To cite this version:**

Xi Du, Christophe Corre, Alain Lerat. Schéma basé sur le résidu d'ordre 3 en maillage non-structuré pour les équations d'Euler. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03378708

HAL Id: hal-03378708

<https://hal.science/hal-03378708>

Submitted on 14 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Schéma basé sur résidu d'ordre 3 en maillage non-structuré pour les équations d'Euler

XI DU^a, CHRISTOPHE CORRE^b, ALAIN LERAT^a

a. Arts et Métiers ParisTech, SINUMEF, 151 Bd de l'Hôpital, 75013 PARIS

b. Grenoble INP, LEGI, 1023 rue de la piscine, Domaine universitaire, 38400 SAINT MARTIN D'HERES

Résumé :

Un schéma compact basé sur le résidu, initialement développé en maillage structuré, est étendu à l'ordre 3 en maillage non-structuré en utilisant d'une part une combinaison d'approche volumes finis et de technique de moindres carrés d'ordre élevé et d'autre part une approche récemment introduite dite de volumes spectraux. Ces deux formulations sont comparées afin d'analyser leur intérêt pour la simulation efficace d'écoulements compressibles.

Abstract :

A residual based compact scheme, originally designed on structured grids, is extended to third-order accuracy for unstructured grids computations following two distinct strategies : on one hand a combination of a finite volume method and a least square technique, on the other hand a recently developed spectral volume approach. Both formulations are compared in order to assess their respective advantages for compressible flow computations.

Mots clés : schéma basé sur le résidu, volumes finis, moindres carrés, volumes spectraux

1 Introduction

Un schéma compact basé sur le résidu (RBC pour *Residual Based Compact scheme* en anglais) a été développé en maillage structuré pour résoudre les équations d'Euler [1] et de Navier-Stokes [2] en régime compressible. Support compact facilitant le traitement des conditions aux limites, convergence rapide vers l'état stationnaire, haute précision et capture des chocs sans limiteur sont les principaux avantages du schéma RBC, qui font de cette méthode un bon choix pour la simulation à l'ordre 2 ou 3 d'écoulements en aérodynamique compressible [3],[4]. Récemment, le schéma RBC a été étendu suivant deux directions : d'une part, des versions d'ordre très élevé ont été développées en maillage structuré (ordre 7 pour les équations d'Euler [5] et ordre 5 pour l'équation advection-diffusion [6] et d'autre part le schéma a été adapté à la simulation, à l'ordre 2, d'écoulements compressibles de fluide parfait ou visqueux en maillage non-structuré [7]. On parlera dans ce dernier cas de schéma RB (*Residual-Based*) dans la mesure où, sur des maillages non-structurés quelconques, la formulation non-structurée proposée n'est pas nécessairement plus compacte qu'un schéma décentré conventionnel de type Flux-Vector-Splitting ou Flux-Difference-Splitting d'ordre 2. Le présent article poursuit ce dernier axe de travail en s'attachant à développer une version d'ordre 3 du schéma basé sur le résidu pour la simulation d'écoulements compressibles en maillages non-structurés. Cette action de recherche s'inscrit dans le cadre du projet européen ADIGMA consacré au développement de méthodes d'ordre élevé pour les applications aérospatiales [8].

Deux stratégies distinctes sont adoptées pour construire un schéma RB d'ordre 3 en maillage quelconque. La première stratégie s'inscrit dans la continuité directe du travail effectué à l'ordre 2 [7] : elle couple le flux numérique dissipatif du schéma RB en formulation volumes finis (FV en anglais) avec une reconstruction des variables conservatives ou primitives à l'aide d'une technique de moindres carrés ; pour passer de l'ordre 2 à l'ordre 3, on remplace la reconstruction linéaire avec estimation à l'ordre 1 du gradient des variables par technique de moindres carrés par une reconstruction quadratique avec estimation à l'ordre 2 du gradient des variables et à l'ordre 1 du Hessien par une technique de moindres carrés généralisée. Cette stratégie de montée en ordre de précision par élévation du degré du polynôme de reconstruction des variables nécessite bien sûr l'élargissement du support de reconstruction (ensemble des cellules voisines utilisées pour l'évaluation du gradient puis du Hessien au centre d'une cellule donnée du maillage) et présente en conséquence deux inconvénients majeurs : un accroissement important des besoins en place-mémoire associés au schéma (puisque les informations de connectivité deviennent de plus en plus nombreuses) et une dépendance accrue de la précision du résultat à la qualité (régularité) du maillage. On envisage donc une seconde stratégie pour le développement du schéma RB d'ordre élevé en maillage non-structuré. Il s'agit d'une méthode de discrétisation spatiale dite de type volumes spectraux (*spectral volume (SV)*) récemment développée par [9] pour étendre des schémas décentrés conventionnels à un ordre de précision élevé en maillages quelconques (voir par exemple

[10] pour la résolution à l'ordre 4 des équations d'Euler) et que nous souhaitons adapter au flux numérique du schéma RB. Le travail présenté ici se limite à une formulation d'ordre 3 dans un premier temps afin de permettre une comparaison avec l'approche volumes finis / moindres carrés de même ordre.

Le papier est organisé en 3 sections : les sections 2 et 3 détaillent les principes de construction respectifs des schémas dits FV-RB et SV-RB (pour schéma basé sur le résidu en formulation volumes finis puis en formulation volumes spectraux) ; la section 4 présente quelques résultats de simulations obtenus par ces deux approches et les analyse du point de vue de la précision et de l'efficacité.

2 Schéma RB en formulation volumes finis

2.1 Discrétisation en espace

On considère le système de lois de conservation sous forme intégrale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathcal{F} d\Omega = 0, \quad (1)$$

où U désigne la variable conservative, \mathcal{F} est la fonction de flux. Dans le cadre d'une formulation volumes finis en maillage quelconque, le système (1) est transformé en utilisant le théorème flux-divergence :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathcal{F} \cdot n d\Omega = 0, \quad (2)$$

où n désigne le vecteur unitaire normal au contour $\partial\Omega$ de la cellule de contrôle, puis discrétisé en choisissant successivement pour volume de contrôle Ω chaque cellule Ω_i du maillage :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{k=1}^{N_f} |\Gamma_{i,k}| \sum_{q=1}^{N_q} \omega_q \mathcal{H}_{k,q} = 0, \quad (3)$$

avec \bar{U}_i l'état moyen dans la cellule Ω_i de volume $|\Omega_i|$. Cette cellule est formée par N_f faces ($N_f = 3$ pour un maillage $2D$ à base de triangles) et la surface de la face k est notée $|\Gamma_{i,k}|$. La quantité N_q désigne le nombre de points de quadrature de Gauss nécessaires pour construire, à l'aide de poids ω_q , une approximation d'ordre p de l'intégrale du flux physique $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{F} \cdot n$ sur une face ($N_q = E(\frac{p+1}{2})$). Le flux numérique approchant le flux physique normal à la face au q -ième point de Gauss sur la face k est noté $\mathcal{H}_{k,q}$. Ce flux numérique peut être classiquement obtenu à l'aide d'un solveur de Riemann approché (schéma de Roe, schéma HLL) ou, dans le cas présent et de façon plus originale, en utilisant une formulation basée sur le résidu. Dans le cas d'un solveur de Riemann approché classique, le flux numérique peut s'écrire formellement comme $\mathcal{H}_q^{SC}(U_{q,L}, U_{q,R}; n)$, où $U_{q,L}, U_{q,R}$ désignent respectivement les états reconstruits à gauche et à droite du point de Gauss q de la face considérée. Pour un schéma FV d'ordre 3, on reconstruit ainsi la solution U dans chaque cellule i du maillage en utilisant le polynôme d'approximation suivant :

$$U_q = U_i + ((1 - \sigma_i)\phi_i + \sigma_i)\mathbf{r}_{qi}^T \cdot \nabla U_i + \frac{1}{2}\sigma_i\mathbf{r}_{qi}^T \cdot \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{r}_{qi}, \quad (4)$$

où $\mathbf{r} = [x, y]$ est le vecteur des coordonnées d'un point de la cellule, $\mathbf{r}_{qi} = \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_i$ est le vecteur distance entre le point de Gauss q et le centre de la cellule i , ∇U_i et \mathbf{H}_i désignent respectivement le gradient et le Hessien de la solution calculés au centre de chaque cellule par la méthode des moindres carrés généralisée avec un support centré. Afin d'assurer la propriété de monotonie du schéma en présence de discontinuités dans la solution, le gradient est limité par une fonction-limiteur ϕ_i , qui correspond au limiteur de Barth modifié par [11]. De plus, pour cette reconstruction quadratique, on adopte également l'idée de [12] qui consiste à utiliser un limiteur discret σ_i pour désactiver si nécessaire l'utilisation du Hessien : $\sigma_i = 0$ quand le gradient de la solution U dépasse une valeur-seuil prescrite de sorte que la reconstruction devient simplement linéaire ; $\sigma_i = 1$ pour les zones régulières de la solution où la reconstruction quadratique complète est utilisée.

Le flux numérique du schéma RB reprend ces ingrédients mais se distingue par une dissipation explicitement construite à partir du résidu sous forme intégrale calculé au niveau de la face k considérée :

$$R_k = \frac{1}{|\Omega_d|} \int_{\Omega_d} r d\Omega, \quad (5)$$

avec $r = \nabla \cdot \mathcal{F}$ et où le choix de la cellule Ω_d pour calculer R_k sera précisé ultérieurement. On peut donc écrire formellement le flux numérique du schéma RB au niveau du point de Gauss q de la face k sous la forme $\mathcal{H}_{k,q}^{RB}(U_{q,L}, U_{q,R}; R_k; n)$ et plus explicitement :

$$\mathcal{H}_{k,q}^{RB} = \frac{1}{2}(\mathcal{F}_{q,L}^\perp + \mathcal{F}_{q,R}^\perp) - d_k, \quad (6)$$

où $\mathcal{F}_{q,L/R}^\perp$ est le flux physique dans la direction normale à la face k considérée calculé en utilisant le polynôme de reconstruction associé à la cellule à gauche ou à droite de cette face ; d_k est la dissipation numérique associée à la face, calculée en tout point de Gauss le long de cette face comme :

$$d_k = \frac{1}{2} |\overrightarrow{C_i C_o}| \Phi_k \mathcal{R}_k, \quad (7)$$

avec $|\overrightarrow{C_i C_o}|$ la distance entre les centres des deux cellules voisines de la face k et Φ_k le coefficient matriciel de dissipation sur cette face donné par :

$$\Phi_k = (T_\perp)_k M_k (T_\perp^{-1})_k, \quad (8)$$

où les colonnes de la matrice $(T_\perp)_k$ sont les vecteurs propres à droite de la matrice jacobienne $(J_\perp)_k$ associée au flux \mathcal{F}^\perp et M_k est une matrice diagonale dont les coefficients sont construits à partir des valeurs propres de $(J^\perp)_k$ et de $(J^//)_k$, matrice jacobienne associée au flux tangent à la face k , de façon à assurer le caractère réellement dissipatif de d_k - plus de détails peuvent être trouvés dans [1] ou [7]. On notera que la partie dissipative du flux RB est calculée de façon unique au centre d'une face k donnée et ne diffère donc pas d'un point de Gauss à l'autre le long de la face ; ce choix simple permet de réduire le coût d'évaluation de la dissipation matricielle du schéma et suffit d'autre part à préserver la précision globale de la méthode. Pour estimer le résidu \mathcal{R}_k on définit la cellule décalée Ω_d associée à la face k par les centres des cellules voisines de la face et les noeuds extrémités de cette face. Puisque $\Phi_k = O(1)$ et $|\overrightarrow{C_i C_o}| = O(h)$, avec h la taille caractéristique du maillage, une approximation d'ordre 1 du résidu suffit pour obtenir un schéma RB d'ordre 2 et une approximation d'ordre 2 pour un schéma RB d'ordre 3. Le résidu \mathcal{R}_k est calculé comme suit :

$$\mathcal{R}_k = \frac{1}{|\Omega_d|} \sum_{m=1}^{N_{fd}} \tilde{\mathcal{F}}_m^\perp |\Gamma_m| \quad (9)$$

où N_{fd} est le nombre de faces de la cellule décalée, $|\Gamma_m|$ la surface de la face m de cette cellule et $\tilde{\mathcal{F}}_m^\perp$ est une approximation du flux physique normal à la face m de la cellule décalée. Ce flux est estimé comme la moyenne des flux aux extrémités de la face m , qui sont soit des centres i/o soit des noeuds N des cellules qui partagent la face k autour de laquelle est construite la cellule décalée : $\tilde{\mathcal{F}}_m^\perp = (\mathcal{F}_{i/o}^\perp + \mathcal{F}_N^\perp)/2$. Pour estimer le flux physique au niveau d'un noeud N on calcule la valeur en ce noeud en utilisant le polynôme de reconstruction associé à chaque cellule voisine du noeud puis on prend la moyenne de ces valeurs reconstruites.

2.2 Discrétisation en temps et conditions aux limites

Dans la mesure où on ne s'intéresse ici qu'à la simulation d'écoulements stationnaires, on retient une intégration en temps implicite d'ordre 1 qui permet d'utiliser de grands pas de temps et assure ainsi une convergence rapide vers l'état stationnaire. Le coût de la phase implicite est réduit en ne cherchant pas à linéariser la phase explicite d'ordre 3 (basée sur un solveur de Riemann approché ou le schéma RB) mais en lui associant plutôt une phase implicite très simple, sans matrice car basée sur le schéma de Rusanov d'ordre 1, choix suffisant pour assurer la stabilité inconditionnelle du schéma implicite obtenu (voir [13] et [7] pour plus de détails sur ce point). Le système associé à cette phase implicite est résolu par une technique de relaxation de type Jacobi par point, peu efficace intrinsèquement mais de coût par itération très faible et assurant donc *in fine* une bonne efficacité globale du schéma.

Au niveau des faces des cellules frontières en champ lointain (cas des équations d'Euler), le flux numérique est calculé en utilisant d'une part l'état dans la cellule intérieure et d'autre part un état fictif construit à partir de la théorie des caractéristiques. Dans le cas d'une frontière de type paroi solide pour un fluide idéal, on impose le flux physique dans la direction normale à cette face : celui-ci ne dépend que de la pression (en raison de la condition de glissement), qui est évaluée au niveau de la face en utilisant le polynôme de reconstruction associé à la cellule intérieure.

3 Schéma RB basé sur l'approche de volumes spectraux

On décrit ici le principe général de la méthode SV (*spectral volume*), initialement introduit dans [9]. Comme dans le cas de l'approche volumes finis, on va approcher la solution dans une cellule du maillage, désignée comme étant un *volume spectral* (SV), à l'aide d'un polynôme de reconstruction. Mais, alors que l'approche FV s'appuie sur un support constitué par la cellule de base et un ensemble de cellules voisines pour construire ce polynôme, l'approche SV va utiliser une partition du SV en un ensemble de sous-cellules désignées comme des volumes de contrôle (ou CV pour *control volumes*). Le nombre des CV générés dans chaque SV est déterminé par l'ordre souhaité pour le polynôme de reconstruction. Ainsi, pour un schéma d'ordre 2, on a besoin d'au moins 3 CV pour construire un polynôme d'ordre 1 dans la cellule ou SV en 2D. Une discrétisation de type volumes finis est appliquée à chaque CV, produisant un état moyen dans le CV correspondant ; l'ensemble des

états moyens disponibles dans les CV d'un SV est alors utilisé pour construire un polynôme de solution qui reste continu dans l'ensemble du SV. La conséquence pratique de cette formulation est que les flux numériques (solveur de Riemann approché ou RB) ne sont mis en oeuvre que sur les faces des CV qui correspondent également aux faces frontières du SV auquel ils appartiennent - puisque dans ce cas on dispose de deux polynômes de reconstruction distincts associés respectivement aux SV qui se partagent cette face. Pour toutes les faces internes au SV, l'approximation volumes finis écrite dans chaque CV fait simplement appel au flux physique calculé à l'aide de l'état physique fourni par le polynôme continu dans le SV.

Pour la discrétisation en temps du schéma, Wang utilise dans [9] un schéma explicite de type Runge-Kutta proposé par Gottlieb. Récemment, [14] a développé une phase implicite de type LU-SGS et une stratégie multi-grille pour accélérer la convergence des simulations SV vers l'état stationnaire. Dans le cadre du présent travail, nous avons adapté à la formulation SV le schéma implicite sans matrice précédemment utilisé dans le contexte de simulations FV. Les principes de mise en oeuvre restent inchangés lorsque l'on passe de la formulation FV à la formulation SV : dans ce dernier cas, il est simplement nécessaire de stocker la connectivité entre CV voisins d'un même SV et CV voisins dans deux SV voisins pour pouvoir écrire de façon efficace la phase implicite associée au schéma écrit dans chaque CV.

Enfin, on doit souligner que pour des calculs en présence de paroi solide, il est indispensable de disposer d'une représentation suffisamment précise de la paroi pour mener des simulations corrects, dans la mesure où l'approche SV, comparativement à l'approche FV, utilise des maillages grossiers (faible nombre de cellules ou SV) qui sont ensuite enrichis par la décomposition de chaque SV en un ensemble de CV. Dans le présent travail, on a donc repris la démarche initialement proposée par [15] pour représenter de façon quadratique et non plus seulement linéaire la paroi solide d'un profil.

4 Résultats numériques

4.1 Advection circulaire 2D

On considère le problème d'advection à coefficients variables : $U_t + yU_x + (1-x)U_y = 0$ dans un domaine $[0, 1]^2$, avec la condition initiale : $U(x, y, 0) = 0$, et la condition d'entrée : $U(x, y, t) = e^{-50(r-0.5)^2}$, où $r = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ sur les bords $y = 0$ et $x = 0$. La solution exacte du problème est constituée par la rotation de la solution prescrite sur les frontières d'entrée le long de courbes caractéristiques définies comme des arcs de cercle centrés sur le coin $(1, 0)$ du domaine de calcul. En utilisant 5 maillages triangulaires réguliers (une cellule carrée coupée en deux triangles) de raffinement croissant pour calculer la solution stationnaire de ce problème et en traçant la norme L_2 de l'erreur entre cette solution discrète et la solution exacte en fonction du pas d'espace h dans une représentation $\log - \log$, on obtient les courbes de convergence en maillage présentées sur la Figure 1) pour les approches FV et SV. On vérifie tout d'abord que le schéma de Roe, représentatif des solveurs de Riemann approchés, fournit bien une précision d'ordre 3 tant en formulation FV que SV. La différence au niveau d'erreur entre deux formulations est liée au fait que le nombre de DOF utilisé par le schéma SV est 6 fois plus que celui du schéma FV pour un maillage donné. Dans le cas du schéma RB, la topologie particulière du maillage triangulaire régulier conduit à une sur-convergence de l'approche FV. La formulation SV-RB quant à elle est bien d'ordre 3 avec un niveau d'erreur faiblement dépendant du flux numérique utilisé puisque très proche de lui obtenu dans le cas SV-Roe.

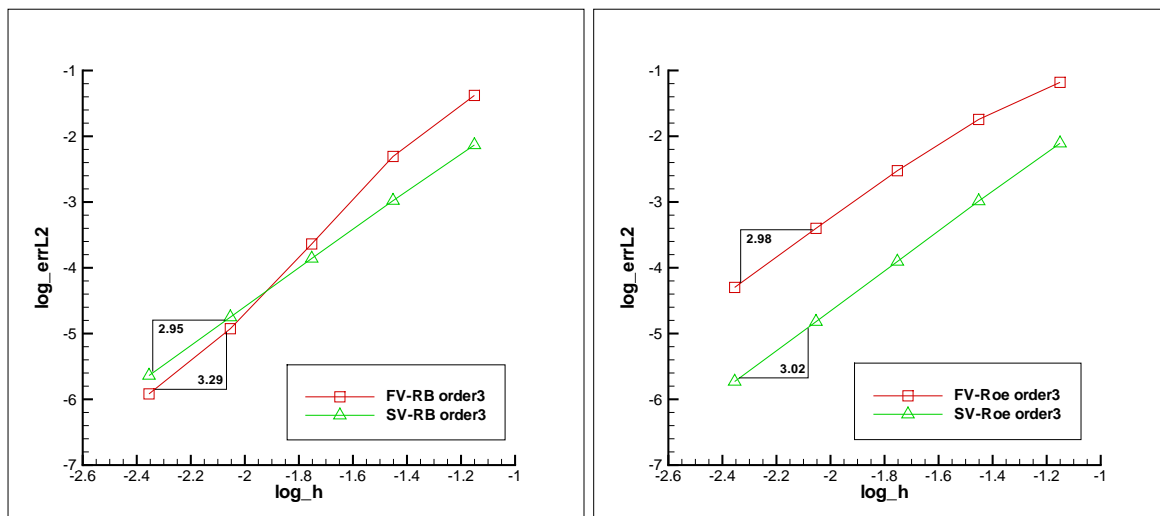


FIG. 1 – Convergence en maillage des schémas d'ordre 3 (théorique). A gauche : FV-RB O(3) et SV-RB O(3); à droite : FV-Roe O(3) et SV-Roe O(3).

4.2 Écoulement subsonique de fluide parfait

On utilise maintenant les schémas FV-RB et SV-RB pour simuler l'écoulement d'un fluide parfait à Mach 0.5 et 2° d'incidence autour d'un profil NACA0012. La simulation FV est réalisée dans un maillage structuré de type "O" dont chaque cellule quadrangulaire est divisée suivant une diagonale en 2 triangles pour former finalement un maillage de 10800 cellules ou degrés de libertés (DOF), avec 180 points répartis le long du profil. Afin de permettre une comparaison raisonnablement pertinente entre FV et SV, la simulation SV-RB est réalisée pour le même nombre de DOF, soit 10800, qui correspondent à un maillage de 1800 SV (ou cellules) seulement, mais avec 6 CV dans chaque SV pour construire un polynôme de solution d'ordre 2 ; le maillage du cas SV contient 90 points répartis le long du profil et une représentation virtuelle quadratique de la paroi du profil est utilisée. Les résultats présentés sur la figure 2 indiquent en premier lieu que les deux approches FV en maillage de 10800 cellules et SV en maillage de 1800 cellules seulement mais avec 1 CV par SV conduisent à des solutions stationnaires très proches l'une de l'autre pour ce qui concerne à la fois la valeur du coefficient de portance et la distribution de pression pariétale. Si on étudie une grandeur plus sensible telle que la déviation d'entropie le long du profil (définie par $C_S = (S - S_\infty)/S_\infty$ avec S l'entropie locale et S_∞ l'entropie de référence à l'infini amont), on observe que la précision du schéma SV-RB est inférieure à celle du schéma FV-RB puisque le niveau d'entropie numérique est plus élevé avec la première approche qu'avec la seconde. Ce résultat peut être interprété comme le signe d'une nécessaire amélioration de la représentation de la paroi dans le cas de l'approche SV. Les deux approches ne sont pas comparées pour le moment au niveau de leur efficacité dans la mesure où les traitements implicites respectivement associés à FV et SV doivent être optimisés pour permettre une comparaison réellement fiable à la fois en termes de temps de calcul et d'occupation en place-mémoire. La comparaison des deux approches qui sera réalisée lors du congrès élargira les cas de calcul traités d'une part et conclura sur cette question d'efficacité d'autre part.

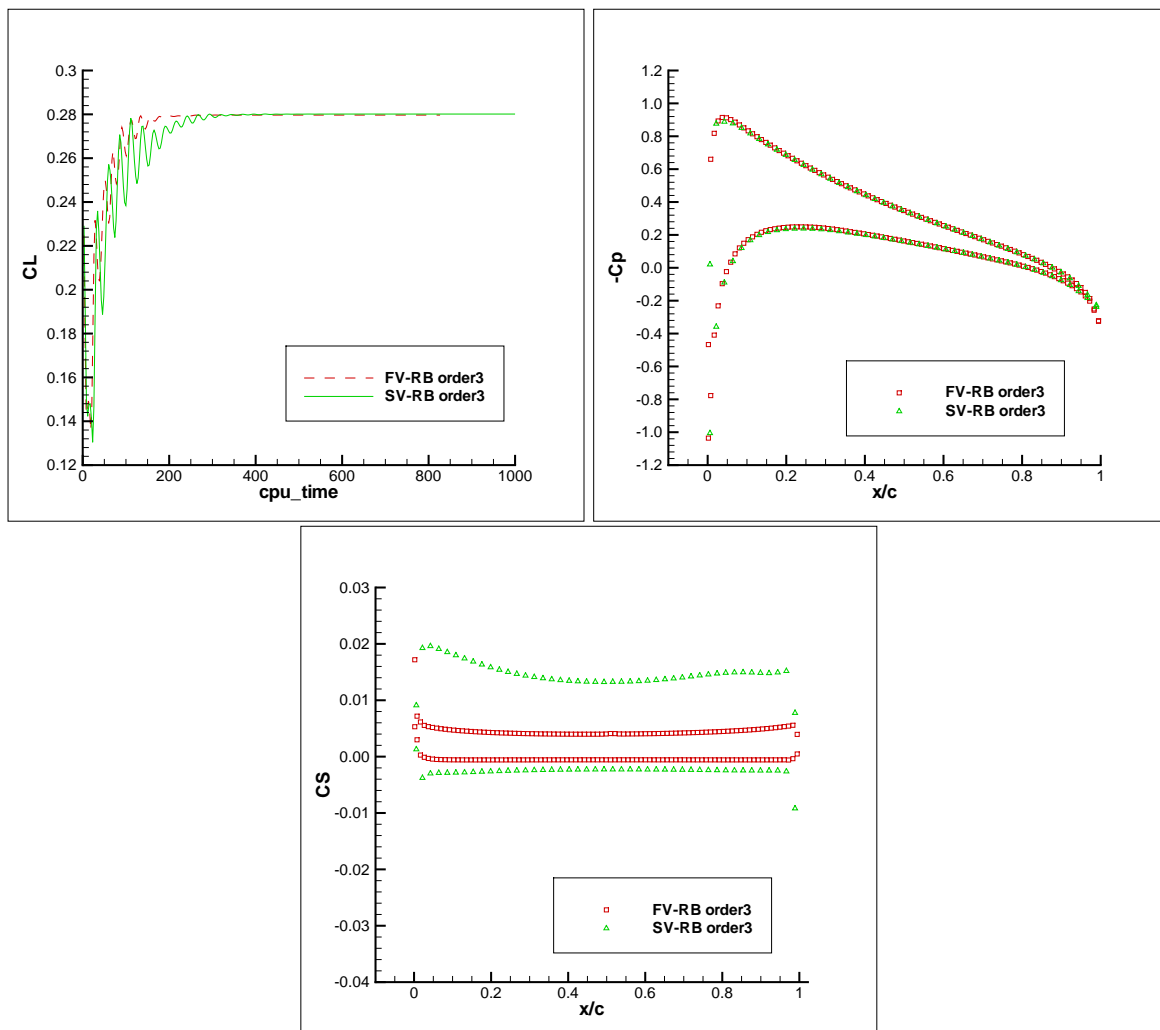


FIG. 2 – Comparaison du schéma. Convergence du coefficient de portance en temps CPU (à gauche en haut), distribution du coefficient de pression (à droite en haut) et du coefficient d'entropie (en bas) sur le profil.

5 Conclusion

Deux formulations sont obtenues au cours du développement d'un schéma basé sur le résidu (RB) d'ordre élevé en maillage non-structuré, une basée sur la méthode volumes finis, et l'autre couplée avec la méthode volumes spectraux. En comparant les résultats numériques obtenus par ces deux schémas, on constate que le schéma RB basé sur volumes finis (FV-RB) est plus précis et efficace que le schéma RB basé sur volumes spectraux (SV-RB). Néanmoins, si on souhaite avoir un schéma d'ordre supérieur à 3, le schéma FV-RB sera non réalisable à cause d'une demande en mémoire excessive, surtout pour un calcul 3D. Au contraire, le schéma SV-RB peut être étendu plus facilement à un ordre quelconque. Pour conclure, nous pouvons remarquer que le schéma FV-RB donne un résultat beaucoup plus précis qu'un solveur de Riemann classique, par exemple le schéma AUSM+ ou HLLC. Enfin, il est à souligner que le schéma SV-RB fournit un résultat du même niveau de précision que ceux cités précédemment.

Références

- [1] Lerat A. and Corre C. Residual based compact schemes for multidimensional hyperbolic systems of conservation laws. *Computers and fluids*, 31, Issues 4–7, 639–661, 2002.
- [2] Lerat A. and Corre C. A residual based compact scheme for compressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 170, 642–675, 2001.
- [3] Hanss G. Schémas numériques compacts basés sur le résidu en maillage irrégulier pour les équations de Navier-Stokes en compressible. PhD thesis, ENSAM Paris, 2002.
- [4] Michel B. Contributions à la simulation numérique efficace des écoulements dans les prises d'air supersoniques. PhD thesis, ENSAM Paris, 2004.
- [5] Corre C., Falissard F., and Lerat A. High-order residual based compact schemes for compressible inviscid flows. *Computers and fluids*, 36, 1567–1582, 2007.
- [6] Corre C. and Lerat A. High-order residual based compact schemes for advection-diffusion problems. *Computers and fluids*, 37, 505–519, 2008.
- [7] Corre C. and Du X. A residual-based scheme for computing compressible flows on unstructured grids. *Computers and fluids*, doi :10.1016, 2008.04.005, 2008.
- [8] Kroll N. Adigma-a european project on the development of adaptive high-order variational methods for aerospace applications. In AIAA paper, volume 0176, Orlando, USA, January 2009.
- [9] Wang Z. Spectral (finite) volume method for convection laws on unstructured grids : Basic formulation. *Journal of Computational Physics*, 178,210-251, 2002.
- [10] Wang Z., Zhang L., and Liu Y. Spectral (finite) volume method for convection laws on unstructured grids iv : Extension to two-dimensional systems. *Journal of Computational Physics*, 194,716-741, 2004.
- [11] Venkatakrisnan V. Convergence to steady-state solutions of the euler equations on unstructured grids with limiters. *Journal of Computational Physics*, 118, 120–130, 1995.
- [12] Delanaye M. Polynomial reconstruction finite volume schemes for the compressible Euler and Navier-Stokes equations on unstructured adaptive grids. PhD thesis, Université de Liège, Belgique, 1996.
- [13] Luo H., Baum J., and Lohner R. A fast, matrix-free implicit method for compressible flows on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 146, 664–690, 1998.
- [14] Parsani M., den Abeele K. V., and Lacor C. Implicit lu-sgs time integration algorithm for high-order spectral volume method with p-multigrid strategy. Moscow, Russia, November 2007. West-east high speed flow field conference.
- [15] Krivodonova L. and Berger M. High-order accurate implementation of solid wall boundary conditions in curved geometries. *Journal of Computational Physics*, 211,492-512, 2006.