



HAL
open science

formulation adaptée de l'analogie de Lighthill/Curle en zone source

Mathieu Watrigant, Christophe Picard, Emmanuel Perrey Debain, Christian
Prax

► To cite this version:

Mathieu Watrigant, Christophe Picard, Emmanuel Perrey Debain, Christian Prax. formulation adaptée de l'analogie de Lighthill/Curle en zone source. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03378692

HAL Id: hal-03378692

<https://hal.science/hal-03378692v1>

Submitted on 14 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Formulation adaptée de l'analogie acoustique de Lighthill-Curle en zone source

M. WATRIGANT^{a,b}, C. PICARD^a, E. PERREY-DEBAIN^c, C. PRAX^b

a. PSA Peugeot Citroën, Centre Technique de Vélizy, 78943 Vélizy Villacoublay, France

b. Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques, CNRS UMR 6609, Université de Poitiers, France

c. Laboratoire Roberval, CNRS UMR 6253, Université de Technologie de Compiègne, France

Résumé :

Les Analogies Aéroacoustiques (AA), initiées par Lighthill en 1952, sont aptes à fournir le champ acoustique rayonné par un écoulement, pour des points observateurs situés en dehors de la zone source, siège des instationnarités turbulentes. Par une recombinaison des équations de Navier-Stokes, nous montrons qu'il est possible d'obtenir une extension de la théorie de Lighthill/Curle, basée sur la pression totale, valable à l'intérieur comme à l'extérieur de la zone de production sonore.

Abstract :

Aeroacoustic Analogies (AA), initiated by Sir J. Lighthill in 1952, are able to give the acoustic field radiated by an aerodynamic flow, given that the observer is located outside the source region, where the turbulent instabilities are confined. With a re-organisation of the Navier-Stokes equations, we obtain an extension of the Lighthill/Curle theory, based on the total pressure, for an observer located equally inside or outside the acoustic source region.

Mots clefs : aéroacoustique, analogies acoustique, zone source, pression totale, méthode hybride, analogie de Curle.

1 Introduction

La reformulation des équations de Navier-Stokes (NS) faite par Lighthill en 1952 permet d'obtenir une équation d'onde donnant les fluctuations acoustiques en un point observateur en fonction des données de l'écoulement turbulent, regroupées dans ce que l'on appelle le Tenseur de Lighthill T_{ij} [1]. Ce travail donne naissance à ce que l'on appelle les Analogies Aéroacoustiques (AA). Ces AA ont connu un essor particulier depuis le milieu des années 1970 grâce notamment au développement des ressources informatiques qui ont permis de mettre en évidence la bonne qualité des analogies en comparaison avec les résultats expérimentaux.

Très vite, il a été mis en évidence quelques limitations à l'AA de Lighthill. Curle [2], en 1955, montre que la présence d'obstacles rigides dans l'écoulement (non pris en compte par Lighthill) se traduit par l'ajout de dipôles à la solution de Lighthill : à faible nombre de Mach, l'influence de l'obstacle est beaucoup plus importante que celle de l'écoulement (à comportement quadripolaire). En 1969, Ffowcs Williams et Hawkings [3] étendent encore le domaine d'application de la théorie en prenant en compte la possibilité d'avoir des surfaces mobiles. Par la suite, certaines études ont mis en évidence la difficulté d'accéder à la signification physique des sources, la convection de ces dernières ou l'influence de l'écoulement. Pour répondre à ces problématiques, d'autres analogies ont été développées (Powell [4], Howe [5], Doak [6]...), mais ces considérations ne font pas l'objet de ce travail. Ici, nous travaillons sur une des limitations de l'AA de Lighthill-Curle qui n'a reçu jusqu'ici que très peu d'attention : la validité de la solution pour un point observateur situé dans la zone source. Les premiers travaux autour de cette limitation ont pourtant débuté dès 1959 par Frantz [7] puis en 1967 par Ollerhead [8], qui prédisent une solution en champ proche, mais toujours en dehors de la zone source. Ce n'est que récemment que la résolution de cette limitation a connu un nouveau souffle, par les travaux de Schram [9]. L'auteur développe une formulation intégrale (en fréquence) pour une AA valable dans l'ensemble de l'espace. L'approche reposant sur certaines approximations rend cependant difficile une estimation fiable dans la zone source. Parallèlement, la société Free Field Technology a développé une solution basée sur une formulation variationnelle de l'équation de Lighthill (voir <http://www.fft.be/?id=67>). Bien adaptée aux cas d'écoulements confinés, la méthode semble moins indiquée dans la configuration qui nous intéresse ici : celle du bruit rayonné par un écoulement autour d'un véhicule terrestre. Pour cette raison, nous privilégions l'approche intégrale.

Après avoir brièvement rappelé la démarche de Lighthill-Curle, nous présentons ici un développement d'AA pour la pression totale, reposant sur la même idée que dans [2], valable sans restriction sur la position du point observateur. Ensuite, nous résolvons l'équation obtenue en prenant en compte certaines contraintes numériques

dues à la possibilité de placer le point observateur dans la zone source. Enfin, nous appliquerons la résolution de cette AA sur un cas analytique de source 2D fréquentielle.

2 Rappel de la démarche de Lighthill-Curle

Dans leurs travaux, Lighthill et Curle ([1], [10], [2]) suivent la même démarche pour l'établissement de leur AA. Soit les équations de NS dans le cas général :

$$\text{Equation de conservation de la masse : } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = Q_m. \quad (1)$$

$$\text{Equation de la quantité de mouvement : } \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial (p \delta_{ij} - \tau_{ij})}{\partial x_j} = \rho f_i. \quad (2)$$

Ici, on considère l'air comme un fluide non pesant ($\rho f_i = 0$) et le débit nul ($Q_m = 0$). En prenant la dérivée temporelle de (1) dont on soustrait la divergence de (2), on obtient l'équation intermédiaire suivante :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \rho u_i}{\partial t \partial x_i} - \frac{\partial^2 \rho u_i}{\partial x_i \partial t} - \frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 (p \delta_{ij} - \tau_{ij})}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (3)$$

On retranche ensuite des deux côtés de (3) le terme $c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2}$, ce qui fait apparaître l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4)$$

où on a introduit le tenseur de Lighthill $T_{ij} = \rho u_i u_j + (p - c_0^2 \rho) \delta_{ij} - \tau_{ij}$. Lighthill simplifie ensuite le problème en posant que le point observateur est "entouré d'un fluide homogène au repos", ce qui permet de n'avoir que des fluctuations d'origine acoustique au point observateur. Cette étape revient à séparer l'espace en 2 zones (une zone source, siège des instabilités turbulentes et une zone 'acoustique' homogène et au repos). Après convolution de (4) par la fonction de Green spatio-temporelle en espace libre $G = G(x, t, y, \tau)$, la fluctuation acoustique de masse volumique en un point observateur (noté x) situé en dehors de la zone source (points y) est donnée par l'équation intégrale suivante

$$\rho_a(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_V G \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} dy d\tau + \int_{-\infty}^t \int_{\Sigma} \left(G \frac{\partial \rho'}{\partial n} - \rho' \frac{\partial G}{\partial n} \right) dy d\tau. \quad (5)$$

où V est le domaine source, Σ les bords (fixes) d'un obstacle éventuel et n indique le vecteur normal à la paroi. La notation $\phi' = \phi - \phi_0$ signifie que l'on prend la partie fluctuante du champ par rapport à un état de référence ϕ_0 . Dans le cas tridimensionnel, la convolution temporelle est simplifiée et, après intégrations par parties (IPP) on obtient la forme plus classique dite de Curle [2] :

$$p_a(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \left[\frac{T_{ij}}{4\pi r} \right]_{t-r/c_0} dy - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Sigma} \left[\frac{P_{ij} n_j}{4\pi r} \right]_{t-r/c_0} dy. \quad (6)$$

où $r = |x - y|$ et on a posé $P_{ij} = p' \delta_{ij} - \tau_{ij}$. Si le tenseur de Lighthill est, en général, considéré comme connu dans l'intégrale (c'est à dire *indépendant* de la pression acoustique), il n'en est pas de même du terme surfacique p' qui contient toutes les fluctuations de pression, c.à.d la pression dite hydrodynamique d'origine turbulente et la pression acoustique diffractée sur la paroi de l'obstacle. Dans certain cas cependant, on peut s'affranchir d'un calcul de diffraction (onéreux en 3D) et réduire la pression présente dans l'intégrale de surface à sa partie hydrodynamique seule [11].

3 Développement d'une AA pour la pression totale

Dans l'hypothèse de Lighthill [1], le point observateur est supposé en dehors des sources dans un fluide homogène et au repos. Pour passer outre cette hypothèse, on retravaille les équations de NS pour **les champs totaux** en suivant le même type de démarche que Lighthill, mais pour obtenir une équation pour la pression totale. On repart des équations de NS rappelées dans la section précédente, avec les mêmes hypothèses que Lighthill, et, comme ce dernier, on prend la dérivée temporelle de la conservation de la masse à laquelle on soustrait la divergence de l'équation de la quantité de mouvement. On obtient donc l'équation (3). On ajoute ensuite le terme $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ des deux côtés de l'égalité pour obtenir l'équation d'onde pour la pression totale suivante :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 (\rho u_i u_j - \tau_{ij})}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 (p - c_0^2 \rho)}{\partial t^2} \quad (7)$$

Afin de simplifier le problème, nous nous plaçons dans un cas d'écoulement typique du transport terrestre : nombre de Mach faible ($Ma \approx 0,1$), les fluctuations sont supposées isentropiques et les effets visqueux négligeables (Larsson [12] montre en effet que pour cette classe d'écoulement, les sources acoustique d'origine entropiques, visqueuses, dues à la compressibilité de l'écoulement et aux effets de convection/réfraction des ondes acoustiques n'interviennent que dans une très faible mesure). En suivant ces hypothèses, et en se plaçant dans le domaine fréquentiel (avec la convention temporelle $\phi(x, t) = \hat{\phi}(x)e^{-i\omega t}$) on peut réécrire (8) sous la forme d'une équation de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\hat{p}_t(x) = -\frac{\partial^2 \hat{T}_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (8)$$

Ici, p_t représente la fluctuation totale de pression et $k = \omega/c_0$ est le nombre d'onde. Enfin, dans l'hypothèse d'incompressibilité du fluide on a simplement $T_{ij} = \rho_0 u_i u_j$. Le traitement de (8) sous forme intégrale donne

$$c(x)\hat{p}_t(x) = -\int_{V_{\text{CFD}}} \frac{\partial^2 \hat{T}_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \hat{G} dy + \int_{\partial V} \left(\hat{G} \frac{\partial \hat{p}_t}{\partial n} - \hat{p}_t \frac{\partial \hat{G}}{\partial n} \right) dy \quad (9)$$

où n indique la normale au domaine et $\hat{G} = \hat{G}(x, y, \omega)$ une fonction de Green quelconque. Le coefficient géométrique $c(x)$ vaut 1 dans le domaine fluide, $1/2$ sur les bords d'obstacle et s'annule sinon. Dans cette équation, nous nous mettons volontairement dans les conditions pratiques d'un calcul CFD (Computational Fluid Dynamics) préalablement résolu dans le domaine d'étude noté V_{CFD} . La frontière ∂V dénote les limites de l'écoulement, décomposable en deux parties distinctes : Σ_1 , les parois des obstacles et Σ_2 les limites (non rigides) du domaine CFD. Bien que théoriquement valable, cette formulation n'est malheureusement pas

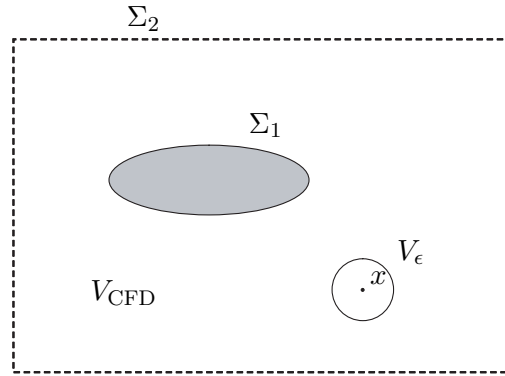


FIG. 1 – Traitement des singularités : découpage de l'espace.

adaptée à un traitement numérique comme l'ont montré Schram et al. [9]. Ceci étant dû essentiellement à l'évaluation de la double dérivée du tenseur de Lighthill. On stabilise la solution par le biais d'une double IPP qui transfère les dérivations de \hat{T}_{ij} à \hat{G} . Le prix d'une telle opération est l'apparition des intégrales de saut sur les surfaces limites du fluide. L'autre difficulté est la présence d'une intégrale singulière qu'il faut traiter avec soin. Pour cela, on utilise un domaine d'exclusion, V_ϵ , circulaire ou sphérique, de rayon ϵ et centré autour du point observateur, comme le montre la figure 1. En appliquant les IPP dans le domaine tronqué $V_{\text{CFD}} \setminus V_\epsilon$, on trouve

$$\begin{aligned} \hat{p}_t(x) = & - \int_{V_{\text{CFD}} \setminus V_\epsilon} \frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial y_i \partial y_j} \hat{T}_{ij} dy - \int_{\Sigma_1} \hat{p}_t \frac{\partial \hat{G}}{\partial n} dy \\ & + \int_{\Sigma_2} \left(\hat{G} \frac{\partial \hat{p}_t}{\partial n} - \hat{p}_t \frac{\partial \hat{G}}{\partial n} \right) dy - \int_{\Sigma_2} \left(\hat{G} \frac{\partial \hat{T}_{ij}}{\partial y_i} n_j - \hat{T}_{ij} \frac{\partial \hat{G}}{\partial y_j} n_i \right) dy \\ & - \int_{\Sigma_\epsilon} \left(\hat{G} \frac{\partial \hat{T}_{ij}}{\partial y_i} n_j - \hat{T}_{ij} \frac{\partial \hat{G}}{\partial y_j} n_i \right) dy - \int_{V_\epsilon} \frac{\partial^2 \hat{T}_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \hat{G} dy \end{aligned} \quad (10)$$

Notons que certains termes surfaciques sur les bords de l'obstacle n'apparaissent plus une fois que les conditions 'classiques' sur les parois sont prises en compte, c.à.d la dérivée normale de la pression est nulle ainsi que la vitesse de l'écoulement (condition de non-glisement). La première ligne s'apparente à la formulation de Curle. L'intégration sur les bords fictifs du domaine de calcul (Σ_2) fait apparaître deux termes de nature différente. Le premier s'annule en choisissant la fonction de Green en espace libre et en faisant simplement

tendre Σ_2 vers l'infini. Le traitement du deuxième terme est beaucoup moins trivial et implique certaines hypothèses sur la physique de l'écoulement en aval [13]. Le problème ne se pose évidemment pas si le domaine contient tout l'écoulement (ce qui est impossible en pratique) puisque dans ce cas les vitesses et leur dérivées spatiales sont nécessairement nulles sur Σ_2 . La dernière intégrale sur Σ_ϵ contient la singularité de la fonction de Green. Celle-ci peut être analytiquement résolue sous réserve que le tenseur de Lighthill soit suffisamment régulier localement au voisinage du point x . Ainsi, compte tenu du comportement en champ proche $\widehat{G} \sim -\ln \epsilon/2\pi$, ($d = 2$) et $\widehat{G} \sim 1/4\pi\epsilon$, ($d = 3$) où d est la dimension du domaine, il est clair que

$$\int_{\Sigma_\epsilon} \widehat{G} \frac{\partial \widehat{T}_{ij}}{\partial y_i} n_j dy = \begin{cases} \mathcal{O}(\epsilon \ln \epsilon), & d = 2, \\ \mathcal{O}(\epsilon), & d = 3. \end{cases} \quad (11)$$

De la même façon, on trouve

$$\int_{V_\epsilon} \frac{\partial^2 \widehat{T}_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \widehat{G} dy = \begin{cases} \mathcal{O}(\epsilon^2 \ln \epsilon), & d = 2, \\ \mathcal{O}(\epsilon^2), & d = 3. \end{cases} \quad (12)$$

Le traitement de l'intégrale singulière (due à la dérivée première de \widehat{G}) se fait après changement de variable sur Σ_ϵ . En deux dimensions, on pose $y - x = \epsilon(\sin \theta, \cos \theta)$, et on trouve

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\epsilon} \widehat{T}_{ij} \frac{\partial \widehat{G}}{\partial y_j} n_i dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\widehat{T}_{11} \cos^2 \theta + \widehat{T}_{12} \sin 2\theta + \widehat{T}_{22} \sin^2 \theta \right) d\theta = \frac{\widehat{T}_{11} + \widehat{T}_{22}}{2}. \quad (13)$$

En coordonnées sphériques, $y - x = \epsilon(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, seuls les termes diagonaux du tenseur de Lighthill ont une contribution, et on obtient après intégration

$$\int_{\Sigma_\epsilon} \widehat{T}_{ij} \frac{\partial \widehat{G}}{\partial y_j} n_i dy = \frac{\widehat{T}_{11} + \widehat{T}_{22} + \widehat{T}_{33}}{3}. \quad (14)$$

En résumé, la formule de Curle valable en zone source peut maintenant s'écrire

$$\widehat{p}_t(x) = \frac{\widehat{T}_{ii}(x)}{d} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V_{\text{CFD}} \setminus V_\epsilon} \frac{\partial^2 \widehat{G}}{\partial y_i \partial y_j} \widehat{T}_{ij} dy - \int_{\Sigma_1} \widehat{p}_t \frac{\partial \widehat{G}}{\partial n} dy, \quad (15)$$

où nous avons omis l'intégration sur la troncature du domaine fluide Σ_2 par souci de clarté. Notons que cette analyse, purement formelle, est valide dans tous les cas. Si l'on se restreint maintenant aux écoulements incompressibles à faible nombre de Mach, on peut faire l'hypothèse d'une séparation entre champ de pression acoustique p_a et 'hydrodynamique' p_h . Ce dernier étant simplement la solution 'statique' ($k = 0$) de l'équation (8). En admettant p_h comme quantité connue fournie par un calcul CFD, on obtient, après soustraction, la forme alternative suivante

$$\widehat{p}_a(x) = - \int_{V_{\text{CFD}}} \frac{\partial^2 (\widehat{G} - \widehat{G}_0)}{\partial y_i \partial y_j} \widehat{T}_{ij} dy - \int_{\Sigma_1} \widehat{p}_a \frac{\partial \widehat{G}}{\partial n} dy - \int_{\Sigma_1} \widehat{p}_h \frac{\partial (\widehat{G} - \widehat{G}_0)}{\partial n} dy \quad (16)$$

où \widehat{G}_0 est la fonction de Green de l'équation de Poisson. Notons que $\widehat{G} - \widehat{G}_0$ est une fonction régulière, cela permet de s'affranchir de la procédure de régularisation décrite plus haut.

4 Exemple numérique en 2D

Dans cette dernière section, nous comparons les formulations intégrales 1 (monopolaire, equ. (9)) et 2 (quadripolaire, equ. (15)) sur un cas théorique en deux dimensions. Pour cela, on utilise la source analytique développée dans la thèse de Whitmire [14], étendue à un cas 2D fréquentiel. Les termes de vitesse ont pour expression :

$$u_1 = \frac{A_1 e^{ik_1 y_1}}{2\omega} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{A_2 e^{ik_2 y_2}}{2\omega}$$

où A_1 , A_2 , k_1 et k_2 sont des constantes données. Pour de ne pas avoir à évaluer les intégrales de saut sur Σ_2 , on applique un filtre (fenêtre de Blackman) annulant le tenseur de Lighthill et ses dérivées sur les limites du domaine. Les maillages source et observateur sont tous les deux composés de mailles carrées, de côté de longueur h , décalées d'une demi-maille $h/2$ dans les deux directions (voir figure 2). Le calcul se fait à partir des valeurs de la vitesse de l'écoulement prises aux noeuds du maillage (cercles blancs). Afin de simplifier le calcul et éviter la singularité, l'intégrale sur la maille où repose le point observateur n'est pas prise en compte.

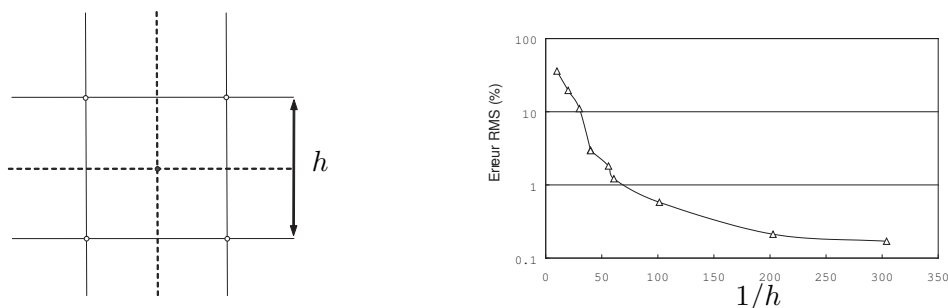


FIG. 2 – Gauche : Maillage source (trait plein) et observateur (pointillé). Droite : Evolution de l'erreur RMS entre les deux formulations (monopolaire et quadripolaire) en fonction du raffinement du maillage.

Pour la formulation 1, cela a pour effet d'induire une erreur en $\mathcal{O}(h^2 \ln h)$ pour des valeurs de h suffisamment faibles. L'estimation de l'erreur pour la formulation 2 nécessite un développement de Taylor du tenseur au deuxième ordre, et on trouve $\mathcal{O}(h^2)$.

Sur la figure 2 (à droite) sont tracées les estimations des erreurs relatives RMS entre les deux formulations en fonction de la taille des mailles. Ici le nombre d'onde acoustique est d'environ $k \approx 6.65$ (correspondant à une fréquence de 360 Hz). Le champ hydrodynamique est calé à la même fréquence spatiale (on prend $k_1 = k_2 = k$) avec $A_1 = 5000$ et $A_2 = 20$. On observe une bonne convergence à partir de $h \approx 1/50$, ($kh \approx 0.13$). Au-delà, le raffinement du maillage n'est plus utile. Enfin, sur la figure 3, on montre la contribution du terme additionnel ($\frac{\widehat{T}_{ii}(x)}{2}$) pour un calcul AA en zone source. La zone représentée sur les 3 graphes correspond à la ligne centrale de la zone source $x_2 = 0$, où le terme additionnel est le plus important.

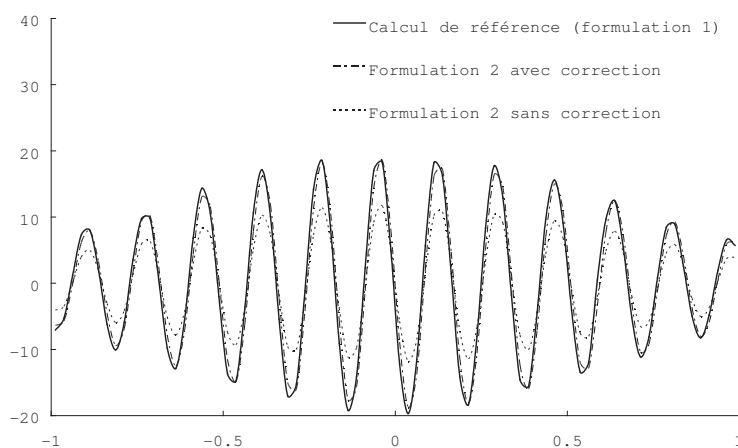


FIG. 3 – Champ de pression totale sur la ligne centrale $x_2 = 0$.

5 Conclusions et perspectives

Dans ce travail, nous avons présenté une formulation d'analogie aéroacoustique permettant d'accéder à la fluctuation de pression totale en des points observateurs situés indifféremment dans la zone de production sonore ou en dehors de celle-ci. Les contraintes liées à la résolution de l'AA dans la zone source ont pour conséquence d'introduire un terme additionnel à la solution de Curle. Dans le cadre d'écoulements à faibles nombre de Mach, les hypothèses simplificatrices ont permis de montrer sur un cas bidimensionnel fréquentiel l'importance de ce terme additionnel dans la solution totale. Avec la formulation présentée ici, on retrouve bien la solution classique de Curle en dehors de la zone source. La validation de cette démarche a été faite sur un cas analytique (cas de Whitmire [14] étendu au 2-D) et sera par la suite appliquée à un cas de cylindre 2-D en écoulement puis à un cas 3-D.

Références

- [1] Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically .i. general theory. Proceedings of the Royal Society of London, A 211, 564–587, 1952.

- [2] Curle N. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. Proceedings of the Royal Society of London, A 231, 505–514, 1955.
- [3] Ffowcs Williams J. E. and Hawkings D. L. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. Philosophical Transactions of the Royal Society, A 264(1151), 321–342, 1969.
- [4] Powell A. Theory of vortex sound. Journal of the Acoustical Society of America, 36, 177–195, 1964.
- [5] Howe M. S. Contribution to the theory of aerodynamic sound, with application to excess noise and the theory of the flute. Journal of Fluid Mechanics, 71, 625–673, 1975.
- [6] Doak P. E. Acoustic radiation from a turbulent fluid containing foreign bodies. Proceedings of the Royal Society of London, A 264, 129–145, 1960.
- [7] Frantz G. J. The near-sound field of the turbulence. Report 982 NS 715-102, 1959.
- [8] Ollerhead J. B. On the prediction of the near field noise of supersonic jets. NASA CR-857, 1967.
- [9] Schram C., Martinez-Lera P., and Tournour M. Two-dimensional in-duct vortex leapfrogging as a validation benchmark for internal aeroacoustics. 13th AIAA/CEAS Aeroacoustics conference, AIAA 2007-3565, 2007.
- [10] Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically .ii. turbulence as a source of sound. Proceedings of the Royal Society of London, A 222, 1–31, 1954.
- [11] Gloerfelt X., Pérot F., Bailly C., and Juvé D. Flow-induced cylinder noise formulated as a diffraction problem for low mach numbers. Journal of Sound and Vibrations, 287, 129–151, 2005.
- [12] Larsson J. Computational Aero-Acoustics for Vehicle Applications. PhD thesis, Chalmers University of Technology, 2002.
- [13] Martinez-Lera P. and Schram C. Correction techniques for the truncation of the source field in acoustic analogies. Journal of Acoustical Society of America, 124 (6), 2008.
- [14] Whitmire J. K. Sound Radiated by Turbulence- Acoustic Analogy Validation. PhD thesis, University of California, San Diego, 1999.