



**HAL**  
open science

# Modélisation asymptotique et analyse numérique d'un couplage fluide-structure

Cécile Poutous, Robert Luce

► **To cite this version:**

Cécile Poutous, Robert Luce. Modélisation asymptotique et analyse numérique d'un couplage fluide-structure. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03378664

**HAL Id: hal-03378664**

**<https://hal.science/hal-03378664>**

Submitted on 14 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation asymptotique d'un couplage fluide-structure dans le cas d'une membrane orthotrope gonflée précontrainte.

R. LUCE<sup>a</sup>, C. POUTOUS<sup>b</sup>

a. Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA), BP 1155, 64013 Pau Cedex

b. Centre de Recherche de l'Armée de l'air (CREA), École de l'air, BA701, 13661 Salon

## Résumé :

On étudie les déformations et contraintes d'une structure gonflée précontrainte soumise à des perturbations extérieures. La modélisation se fait en élasticité linéaire 3D. L'analyse asymptotique conduit à un modèle asymptotique 2D, bien posé pour certaines forces extérieures. On établit la convergence forte des valeurs moyennes des solutions 3D vers la solution 2D. L'analyse numérique du modèle asymptotique et quelques essais numériques confirment que les estimateurs d'erreur a priori sont dans la norme de l'énergie.

## Abstract :

We study the stresses and deformations of an inflated prestressed structure when external forces are applied to it. After a mechanical modelling in 3D linearized elasticity, we let the thickness parameter tend to zero and obtain a 2D asymptotic model, well posed for admissible forces. We prove that the mean value in the thickness of the 3D solution strongly tends to the solution of the 2D asymptotic problem. The numerical analysis and some numerical simulations confirm that the a priori error is estimated in the energy norm.

**Mots clés :** Élasticité linéaire, coques en membrane, structure gonflée, orthotropie

## 1 Introduction

On considère une structure souple gonflée précontrainte composée de deux pièces d'un tissu orthotrope fixées sur une armature rigide. Le volume intérieur  $V$  ainsi délimité est gonflé sous pression  $\Pi$  par un gaz parfait, créant ainsi une précontrainte, supposée connue,  $\Sigma_0$ . On applique à ce système en équilibre une perturbation surfacique extérieure  $h$ . Le fluide intérieur génère un couplage entre les déplacements, et donc entre les contraintes, des deux pièces de tissu. On suppose que du fait de la précontrainte, la déformation se fait à volume constant et qu'on reste dans le cadre de l'élasticité linéaire. On suppose également que la géométrie et les conditions d'encastrement sont telles que le matériau se comporte comme une coque en membrane généralisée linéairement élastique de type 1, c'est à dire en flexion pure inhibée (définition dans [2] p262 ou dans [8]). Enfin, on suppose que la densité  $h$  est admissible au sens donné dans [5] et que la forme linéaire liée au couplage est continue par rapport à la norme membranaire.

## 2 Notations et modélisation 3D

Dans cette étude, les indices grecs sont à valeur dans  $\{1, 2\}$ , alors que les indices latins appartiennent à  $\{1, 2, 3\}$ , on utilise la convention de l'indice répété et  $\delta_j^i$  est le symbole de Kronecker.

**Hypothèse 1**  $\omega^\pm$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$  (ouvert, borné, connexe de frontière lipschitzienne, les ouverts  $\omega^\pm$  étant localement d'un seul coté de leur frontière).  $\theta^\pm : \overline{\omega^\pm} \rightarrow \mathbb{R}^3 \in C^3(\overline{\omega^\pm}; \mathbb{R}^3)$  est une carte injective telle que les vecteurs  $\mathbf{a}^\pm_\alpha := \partial_\alpha \theta^\pm(y)$  sont orthogonaux en tout point  $y \in \overline{\omega^\pm}$ . Les surfaces  $S^\pm := \theta^\pm(\overline{\omega^\pm})$  représentent les surfaces moyennes de deux morceaux d'un même matériau orthotrope dont les directions d'orthotropies sont respectivement  $\mathbf{a}_1^\pm$  et  $\mathbf{a}_2^\pm$  sur la surface et  $\mathbf{a}_3^\pm := \frac{\mathbf{a}_1^\pm \wedge \mathbf{a}_2^\pm}{\|\mathbf{a}_1^\pm \wedge \mathbf{a}_2^\pm\|}$  dans l'épaisseur  $2\varepsilon$ .  $\Omega_\varepsilon^\pm := S^\pm \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  représente le volume des coques.  $S_\varepsilon^\pm := S^\pm \times \{\varepsilon\}$  sont les surfaces extérieures et  $S_{-\varepsilon}^\pm := S^\pm \times \{-\varepsilon\}$  les surfaces intérieures. Posons  $\partial\omega^\pm = \gamma_0^\pm \cup \gamma_1^\pm$ ,  $\Gamma_{0,\varepsilon}^\pm := \theta^\pm(\gamma_0^\pm) \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  et  $\Gamma_{1,\varepsilon}^\pm := \theta^\pm(\gamma_1^\pm) \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . Les coques, fixées le long de  $\Gamma_{0,\varepsilon}^\pm$ , sont dans un état d'équilibre précontraint, la pression de gonflage est  $\Pi$ , la précontrainte est notée  $\Sigma_0^\pm$ .

**Remarque 1** Avec un matériau orthotrope, contrairement à ce qui se passe dans le cas d'un matériau isotrope, le choix du système de coordonnées curvilignes pour paramétrer la surface n'est pas libre. Les coordonnées curvilignes doivent être choisies le long des directions principales d'orthotropie.

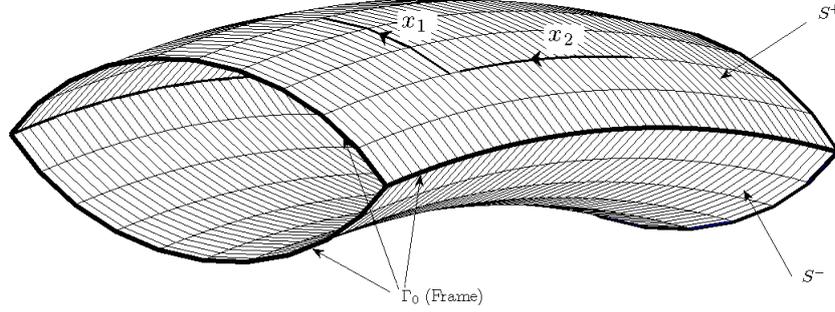


FIG. 1 – Un exemple de structure gonflée précontrainte

On perturbe les conditions extérieures en appliquant une densité surfacique de force  $\mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(S_{-\varepsilon}^{\pm})$ . Cette perturbation modifie la géométrie de la coque. Il en résulte une modification de la pression intérieure  $\Delta\Pi$  et les contraintes deviennent  $\Sigma^{\pm}$ . Notons  $\mathbf{n}$  la normale unitaire sortante à la surface et  $\mathbf{A}$  le tenseur d'élasticité dans une base orthonormale d'orthotropie (un choix naturel de base pour mettre en évidence la symétrie du tenseur et annuler la plupart des termes). Les composantes contravariantes de  $\mathbf{A}$  sont alors

$$A^{ijkl} = 0 \text{ en dehors de } A^{ijjj} = \lambda_{ij} \text{ et } A^{ijji} = A^{jjii} = \mu_{ij} \text{ pour } i \neq j$$

où  $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$  et  $\mu_{ij} = \mu_{ji}$  sont des constantes positives qui ne dépendent que du matériau (voir [4] pour le calcul du tenseur). Les équations d'équilibre dans la configuration de référence (à savoir l'état précontraint) sont :

$$\begin{cases} -\text{div}(\Sigma^{\pm} - \Sigma_0^{\pm}) = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega_{\varepsilon}^{\pm} \\ (\Sigma^{\pm} - \Sigma_0^{\pm}) \mathbf{n} = \mathbf{h} & \text{sur } S_{\varepsilon}^{\pm} \\ (\Sigma^{\pm} - \Sigma_0^{\pm}) \mathbf{n} = -\Delta\Pi \mathbf{n} & \text{sur } S_{-\varepsilon}^{\pm} \\ (\Sigma^{\pm} - \Sigma_0^{\pm}) \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{1,\varepsilon}^{\pm} \end{cases}$$

**Hypothèse 2** On est dans le cadre de petites perturbations du fait de la précontrainte et en conséquence on peut linéariser les lois de comportement.

Notons  $\mathbf{u}_{\varepsilon}^{\pm}$  le déplacement de l'état précontraint à l'état déformé. Après linéarisation la loi de comportement devient :

$$\Sigma^{\pm} - \Sigma_0^{\pm} = \mathbf{A} : \mathbf{e}_{\varepsilon}^{\pm}(\mathbf{u}_{\varepsilon}^{\pm}) \quad \text{où} \quad \mathbf{e}_{\varepsilon}^{\pm}(\mathbf{u}_{\varepsilon}^{\pm}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon}^{\pm} + \nabla \mathbf{u}_{\varepsilon}^{\pm T}).$$

Le gaz de gonflage est supposé parfait aussi, la variation de volume intérieur  $\Delta V$  et la variation de pression intérieure  $\Delta\Pi$  vérifient

$$\Delta\Pi = -\frac{\Delta V}{V} \Pi.$$

De plus, la variation de volume s'exprime en fonction du déplacement par l'équation

$$\Delta V = - \int_{S_{-\varepsilon}^{\pm}} \mathbf{u}_{\varepsilon}^{\pm} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Pour finir l'encastrement se traduit par

$$\mathbf{u}_{\varepsilon}^{\pm} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{0,\varepsilon}^{\pm}.$$

Pour éviter que les domaines d'intégration dépendent de  $\varepsilon$ , on normalise le problème en effectuant le changement de variable  $(y, x_3) \mapsto (y, \varepsilon x_3)$ . On obtient ainsi le problème variationnel :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } \mathbf{u}(\varepsilon) \text{ dans } \mathbf{V}(\Omega) \text{ tel que pour tout } \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega) \text{ on ait} \\ &\int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon; \mathbf{u}(\varepsilon)) e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)} \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma^-} \mathbf{u}(\varepsilon) \cdot \mathbf{n} \sqrt{g(\varepsilon)} \, dy \int_{\Gamma^-} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \sqrt{g(\varepsilon)} \, dy = \\ &\int_{\Gamma^+} h^{i\pm} v_i \sqrt{g(\varepsilon)} \, dy \end{aligned} \quad (1)$$

où :

les fonctions  $h^{i\pm}$  appartiennent à  $L^2(\Gamma^+)$  et ne dépendent pas de  $\varepsilon$ ,

$\Gamma^+ := \omega \times \{1\}$ ,  $\Gamma^- := \omega \times \{-1\}$ ,  $\Omega := \omega \times ]-1, 1[$ ,  $\Gamma_0 = \gamma_0 \times ]-1, 1[$ ,

$\mathbf{V}(\Omega) := \{\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{H}^1(\Omega); \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0\}$ ,

$\Theta : \bar{\omega} \times [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow \bar{\Omega}_\varepsilon^\pm$  est l'extension canonique de  $\theta$  et vérifie donc  $\Theta(y, x_3) := \theta(y) + x_3 \mathbf{a}_3$ ,

$\det(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) > 0$  (avec  $(\mathbf{g}_i)_i := (\partial_i \Theta)_i$  covariante associée à  $\Theta(\bar{\omega} \times [-\varepsilon, \varepsilon])$  et  $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$  base contravariante définie par  $\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_i = \delta_i^j$ ),

$g(\varepsilon)$  est la fonction normalisée définie par  $g^\varepsilon := \det(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j)_{ij}$ ,

les composantes contravariantes  $A^{ijkl}(\varepsilon)$  du tenseur d'élasticité 3D normalisé  $\mathbf{A}(\varepsilon)$  vérifient la formule de changement de base et de coordonnées

$$A^{ijkl}(\varepsilon)(y, x_3) = (|\mathbf{g}^i| |\mathbf{g}^j| |\mathbf{g}^k| |\mathbf{g}^l| A^{ijkl})(y, \varepsilon x_3),$$

les conditions de symétrie et les développements au premier ordre

$$A^{ijkl}(\varepsilon) = A^{jikl}(\varepsilon) = A^{klij}(\varepsilon) \text{ et } A^{ijkl}(\varepsilon) = A^{ijkl}(0) + O(\varepsilon),$$

où le symbole d'ordre se comprend par rapport à la norme  $\|w\|_{0,\infty,\bar{\Omega}} := \sup \{|w(x)|, x \in \bar{\Omega}\}$ . Enfin,

$$A^{\alpha\beta\sigma 3}(\varepsilon) = A^{\alpha 333}(\varepsilon) = A^{\alpha\beta\sigma 3}(0) = A^{\alpha 333}(0) = 0.$$

Pour tout vecteur  $\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , on définit les composantes covariantes du tenseur symétrique linéarisé des déformations  $e_{i||j}(\varepsilon; \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)$  par

$$\begin{aligned} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon; \mathbf{v}) &:= \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) v_p, \\ e_{\alpha||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) &:= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\partial_3 v_\alpha + \partial_\alpha v_3\right) - \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) v_\sigma \\ e_{3||3}(\varepsilon; \mathbf{v}) &:= \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 v_3 \end{aligned}$$

où  $\Gamma_{ij}^p(\varepsilon)$  sont les symboles 3D normalisés de Christoffel calculés selon  $\Gamma_{ij}^{\varepsilon,p} := \mathbf{g}^p \cdot \partial_i \mathbf{g}_j$ .

On a montré dans [6] que :

**Proposition 1** *Les problèmes variationnels normalisés (1) sont bien posés.*

et que le terme de couplage

$$C_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma^-} u_3 \sqrt{g(\varepsilon)} dy \int_{\Gamma^-} v_3 \sqrt{g(\varepsilon)} dy$$

est borné.

### 3 Analyse asymptotique

Dans la perspective de simulations numériques, on s'intéresse à la convergence de la suite des valeurs moyennes dans l'épaisseur de la solution du problème variationnel 3D (1)

$$\left(\overline{\mathbf{u}(\varepsilon)}\right)_\varepsilon := \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{u}(\varepsilon) dx_3\right)_\varepsilon$$

vers la solution d'un problème variationnel posé sur la surface moyenne. Ce problème est identifié à l'aide d'une analyse préasymptotique menée sur le même principe que celle de [3] à savoir : on fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro dans l'équation variationnelle de (1) en prenant pour fonction test  $\mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{w}$  où  $\mathbf{w}$  est une fonction quelconque de l'espace  $\mathbf{V}(\Omega)$ . On est alors conduits à considérer le tenseur d'élasticité 2D  $\mathbf{A}(\omega)$  de composantes contravariantes

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := 2|\mathbf{a}^\alpha| |\mathbf{a}^\beta| |\mathbf{a}^\sigma| |\mathbf{a}^\tau| \left( A^{\alpha\beta\sigma\tau} - \frac{A^{\alpha\beta 33} A^{33\sigma\tau}}{A^{3333}} \right)$$

et, à considérer pour tout vecteur  $\mathbf{v} = (v_i)$  de  $\mathbf{V}(\omega) := \{\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{H}^1(\omega); \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \gamma_0\}$ , le tenseur linéarisé 2D de changement de métrique  $(\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}))_{\alpha\beta}$  de composantes covariantes

$$\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma v_\sigma - b_{\alpha\beta} v_3$$

où les  $b_{\alpha\beta} := \mathbf{a}_3 \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta$  sont les composantes covariantes du tenseur de courbure et  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma := \mathbf{a}^\sigma \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta$  sont les symboles 2D de Christoffel. On considère également la semi-norme  $|\cdot|_\omega^M$  définie par

$$|\mathbf{v}|_\omega^M := \left\{ \sum_{\alpha,\beta} |\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v})|_{0,\omega}^2 \right\}^{1/2}$$

**Remarque 2** Par rapport aux résultats classiques sur les coques isotropes (voir [2]) on constate que le passage à l'orthotropie n'affecte ni le tenseur de courbure ni la semi-norme. En revanche il modifie le tenseur d'élasticité.

**Hypothèse 3** La géométrie de la coque et les conditions d'encastrement sont telles que la semi-norme  $|\cdot|_\omega^M$  est une norme sur l'espace  $\mathbf{V}(\omega)$  qui n'est pas équivalente à la norme usuelle  $\|\cdot\|_{1,\omega}$ .

Puisque les normes ne sont pas équivalentes, on note  $\mathbf{V}_M^\#(\omega)$  le complété de  $\mathbf{V}(\omega)$  pour la norme  $|\cdot|_\omega^M$ . On construit à l'aide de  $|\cdot|_\omega^M$  la norme 3D sur  $\mathbf{V}(\Omega)$  définie par  $|\mathbf{v}|_\Omega^M = \{|\partial_3 \mathbf{v}|_{0,\omega}^2 + (|\bar{\mathbf{v}}|_\omega^M)^2\}^{1/2}$ . On note  $\mathbf{V}_M^\#(\Omega)$  le complété de  $\mathbf{V}(\Omega)$  pour la norme  $|\cdot|_\Omega^M$ . Enfin, on note  $a_{\alpha\beta} := \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$  les composantes covariantes du tenseur métrique et  $a$  son déterminant. La forme bilinéaire  $B_M(\zeta, \eta) := \int_\omega a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\zeta) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy$  est bicontinue pour la norme  $|\cdot|_\omega^M$  et on note  $B_M^\#$  son unique extension bicontinue à l'espace  $\mathbf{V}_M^\#(\omega)$ . Quand  $\mathbf{h}$  est dans le dual de  $\mathbf{V}_M^\#(\omega)$  (voir [1]) la forme linéaire  $L_M(\eta) := \int_\omega h^i \eta_i \sqrt{a} dy$  est continue. Quand de plus  $C_M(\eta) := \int_\omega \eta_3 \sqrt{a} dy$  est  $|\cdot|_\omega^M$ -continue (par exemple si  $\mathbf{f} = (0, 0, 1)$  est admissible au sens de [5]), on note  $L_M^\#$  and  $C_M^\#$  leurs uniques extensions continues. Dans ce cas le problème variationnel 2D

$$\begin{cases} \zeta \in \mathbf{V}_{M0}^\#(\omega), \forall \eta \in \mathbf{V}_{M0}^\#(\omega) \\ B_M^\#(\zeta, \eta) = L_M^\#(\eta). \end{cases} \quad (2)$$

avec  $\mathbf{V}_{M0}^\#(\omega) := \{\eta \in \mathbf{V}_M^\#(\omega), C_M^\#(\eta) = 0\}$  est bien posé.

**Remarque 3** Compte tenu des espaces de travail, ce problème ne peut pas être formulé avec des intégrales.

**Hypothèse 4** Le terme de couplage  $C_M$  est  $|\cdot|_\omega^M$ -continu et il existe des fonctions  $h^{\alpha\beta} = h^{\beta\alpha}$  de  $L^2(\omega)$  telles que pour tout vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\omega)$ , on ait

$$\int_\omega h^i v_i \sqrt{a} dy = \int_\omega h^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \sqrt{a} dy$$

(i.e. la densité de force  $\mathbf{h} = (h^i)$  est admissible au sens de [5]).

On a établi dans [6] les résultats de convergence forte suivants :

**Théorème 1** Sous les hypothèses 1, 2, 3 and 4, il existe  $\zeta$  dans  $\mathbf{V}_{M0}^\#(\omega)$  et  $\mathbf{u}$  dans  $\mathbf{V}_M^\#(\Omega)$  tels que

$$\mathbf{u}(\varepsilon) \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{V}_M^\#(\Omega) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{u}(\varepsilon)} \longrightarrow \zeta \text{ dans } \mathbf{V}_{M0}^\#(\omega) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

et la limite  $\zeta$  est l'unique solution du problème limite (2).

## 4 Analyse numérique et simulation numérique dans le cas d'un lobe parabolique

On étudie le cas particulier d'un lobe cylindrique parabolique pour lequel (voir [7]), en notant  $E_1, E_2, \nu_{12}$  et  $G_{12}$  les modules de Young, coefficient de Poisson et module de cisaillement respectivement, le tenseur 2D d'élasticité et le tenseur de changement de métrique sont :

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{bmatrix} \frac{2E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} & 0 & | & 0 & 2G_{12} \\ 0 & \frac{2\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} & | & 2G_{12} & 0 \\ - & - & | & - & - \\ 0 & 2G_{12} & | & \frac{2\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} & 0 \\ 2G_{12} & 0 & | & 0 & \frac{2E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + \frac{1}{R_i} v_3 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}$$

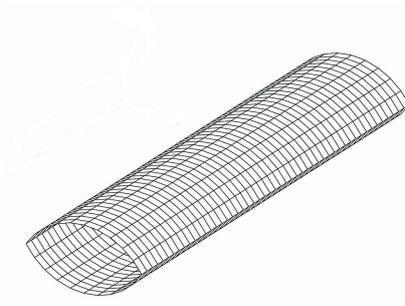


FIG. 2 – Lobe cylindrique parabolique

#### 4.1 Modèle asymptotique découplé

Posons  $\mathbf{V}_0(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L_0^2(\Omega)$  où  $L_0^2(\Omega) = \{v \in L^2(\omega), \int_{\omega} v \, d\omega = 0\}$ . Si on suppose que  $\mathbf{u}$  a davantage de régularité que  $\mathbf{V}_{M0}^{\#}(\omega)$  et que  $\mathbf{u}$  est dans le sous-espace  $\mathbf{V}_0(\omega)$ , alors  $\mathbf{u}$  est l'unique solution du problème mal posé :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in \mathbf{V}_0(\omega), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0(\omega), \\ \int_{\omega} \mathbf{A}(\omega) : \gamma(\mathbf{u}) : \gamma(\mathbf{v}) \, d\xi_{\omega} = \int_{\omega} h^i v_i \, d\xi_{\omega}. \end{cases}$$

Ce problème se découple et en éliminant  $u_3$  de la formulation variationnelle. On se ramène alors à la résolution du problème mal posé dans  $H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega)$  d'inconnue  $(u_1, u_2)$  :

$$\begin{cases} (u_1, u_2) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega), \forall (v_1, v_2) \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega), \\ \int_{\omega} \left( \frac{1}{2G_{12}} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right) \left( \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1} \right) + 2E_2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} \right) d\xi_{\omega} = \int_{\omega} \left( h^{\alpha} v_{\alpha} - R_l h^3 \left( \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} \right) \right) d\xi_{\omega} \end{cases}$$

puis on recalcule  $u_3$  selon la formule

$$u_3 = R_l \left( \frac{E_1 - \nu_{12}^2 E_2}{2E_1^2} \left( R_l \left( h^3 - \overline{h^3}^{\omega} \right) - \frac{2\nu_{12} E_1 E_2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} - \frac{2E_1^2}{E_1 - \nu_{12}^2 E_2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} \right) \right).$$

#### 4.2 Approximation de la solution

Dans tout ce paragraphe on note  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  les champs de déplacement et  $\mathbf{u}_h$  et  $\mathbf{v}_h$  leurs approximations.

Supposons que  $\mathbf{u}$  ait la régularité  $\mathbf{W}(\omega) := H^2(\omega) \times H^2(\omega) \times H^1(\omega) \cap \mathbf{V}_0(\omega)$  et considérons le sous-espace de  $\mathbf{W}(\omega)$  de dimension finie :

$$\mathbf{W}_h(\omega) := \{ \mathbf{v}_h \in H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L_0^2(\omega), \mathbf{v}_h|_T \in P_1(T) \times P_1(T) \times P_0(T) \}$$

où  $T$  est une triangulation régulière de  $\omega$  à base de triangles  $\omega^{\pm} = \bigcup_{i=1}^{N_t} T_i^{\pm}$ . Alors la solution  $\mathbf{u}_h$  du problème discret bien posé

$$\begin{cases} \mathbf{u}_h \in \mathbf{W}_h(\omega), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h(\omega), \\ \int_{\omega} \mathbf{A}(\omega) : \gamma(\mathbf{u}_h) : \gamma(\mathbf{v}_h) \, d\xi_{\omega} = \int_{\omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{v}_h \, d\xi_{\omega}. \end{cases}$$

vérifie l'estimation d'erreur à priori :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\omega}^M = \mathcal{O}(h).$$

Cette estimation est peu satisfaisante car elle est dans la norme  $\|\cdot\|_{\omega}^M$  et les conséquences numériques sont importantes. Toutefois, le tenseur des contraintes et les contraintes principales  $S_1$  et  $S_2$  vérifient les estimations d'erreur

$$\|\Sigma_{\omega}(\mathbf{u}) - \Sigma_{\omega}(\mathbf{u}_h)\|_{0,\omega} = \mathcal{O}(h) \text{ et } |S_{\alpha}(\mathbf{u}) - S_{\alpha}(\mathbf{u}_h)| = \mathcal{O}(h).$$

obtenues dans les normes usuelles.

### 4.3 Résultats numériques

Les forces extérieures ont été choisies de sorte que la solution exacte soit

$$\begin{aligned} u_1^+(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{(2l)^6} \xi_1^3 (\xi_1 - 2l)^3 \left(1 - \frac{\xi_2^2}{L^2}\right)^3, \\ u_2^+(\xi_1, \xi_2) &= 0, \\ u_3^+(\xi_1, \xi_2) &= \frac{3R_l}{32l^6 L^6} \xi_2^2 (\xi_1 - 2l)^2 (L^2 - \xi_2^2)^3 (l - \xi_1). \end{aligned}$$

La figure 3 illustre les difficultés générées par l'estimation d'erreur dans la norme de l'énergie. En effet, on obtient graphiquement deux solutions différentes selon que le maillage est structuré ou destructuré. Par contre

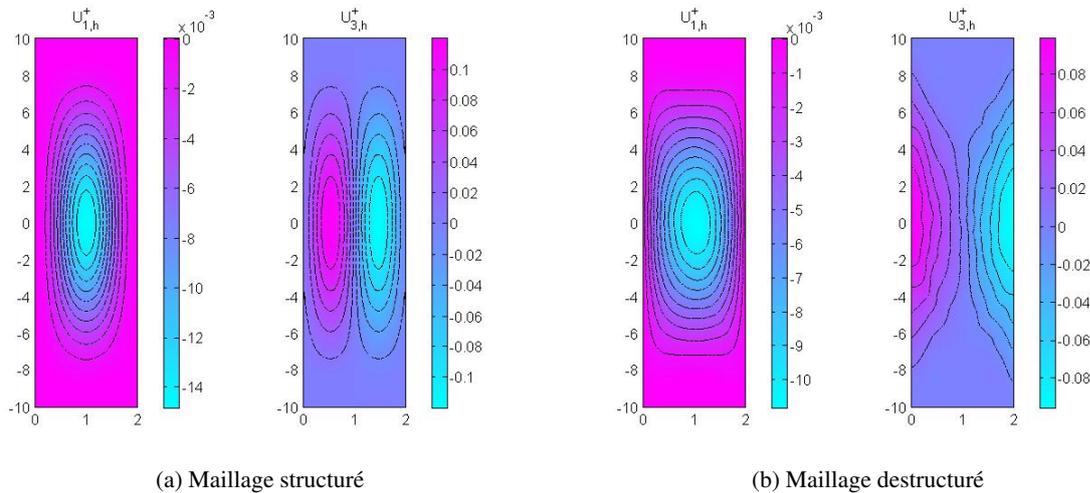


FIG. 3 – Solutions pour deux types de maillage

ces déplacements différents donnent des contraintes "identiques".

## 5 Conclusion

De l'architecture à l'aéronautique, le champs d'application des structures gonflées est très vaste. Toutefois, les problèmes mal posés sur lesquels elles débouchent mathématiquement compliquent l'interprétation des résultats numériques. En effet pour les déplacements, les ordres de convergence étant établis dans la norme de l'énergie, l'unicité de la solution approchée limite n'entraîne pas l'unicité au sens classique. Cette problématique mériterait une étude numérique et mathématique plus approfondie.

## Références

- [1] Chapelle, D. & Bathe, K.J. The Finite Element Analysis of Shells Fundamentals, Springer, 2003.
- [2] Ciarlet, P.G. Mathematical Elasticity, Volume III, Theory of shells, North Holland, Amsterdam, 2000.
- [3] Ciarlet, P.G. & Lods, V. Asymptotic analysis of linearly elastic shells : "Generalized membrane shells", J.Elasticity **43**, 147-188, 1996.
- [4] Coirier, J. Mécanique des milieux continus, Dunod, Paris, 2001.
- [5] Luce, R. & Poutous, C. & Thomas, J.M. Weakened conditions of admissibility of surface forces applied to linearly elastic membrane shells, C. R. Acad. Sci. Paris, ser I (344) 721-726, 2007.
- [6] Luce, R. & Poutous, C. & Thomas, J.M. , Asymptotic modelling of a fluid-structure coupling in the case of a prestressed inflated orthotropic membrane shell C. R. Acad. Sci. Paris, ser I (346) 1207-1212, (2008).
- [7] Poutous, C. Modélisation asymptotique et analyse numérique d'un problème de couplage fluide-structure, Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2006.
- [8] Sanchez-Hubert, J. & Sanchez-Palencia, E. Coques élastiques minces. Propriétés asymptotiques. Masson, Paris, 1997.