



**HAL**  
open science

## Statistique de blocage dans un écoulement de silo

Alexandre Martin, Frédéric Dubois, Farhang Radjai, Yann Monerie

► **To cite this version:**

Alexandre Martin, Frédéric Dubois, Farhang Radjai, Yann Monerie. Statistique de blocage dans un écoulement de silo. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03378637

**HAL Id: hal-03378637**

**<https://hal.science/hal-03378637>**

Submitted on 14 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Etude statistique de blocage d'écoulement dans une géométrie de silo

A.MARTIN<sup>a,c</sup>, F. DUBOIS<sup>a,c</sup>, Y. MONERIE<sup>b,c</sup>, F. RADJAI<sup>a,c</sup>

a. LMGC, Université Montpellier 2, 34080 Montpellier cedex 05  
b. IRSN, DPAM, CE Cadarache, Bat. 702, 13115 St. Paul-lez-Durance Cedex  
c. Laboratoire MIST, IRSN-CNRS-Université Montpellier 2

## Résumé :

*Nous proposons une étude 2D du blocage à la sortie d'un silo, à l'aide de la méthode NSCD (Non Smooth Contact Dynamics). Dans cette géométrie, le problème de blocage peut être comparé au problème d'avalanche sur un plan incliné. Dans cette analogie, la taille de l'ouverture joue le même rôle que la pente alors que le nombre de particules s'écoulant entre deux blocages successifs correspond à la taille de l'avalanche. Nous utilisons un protocole simple pour casser la voûte et ainsi déclencher une nouvelle avalanche chaque fois qu'une voûte se forme. Nous trouvons que la densité de probabilité de la taille d'une avalanche est une exponentielle décroissante quelle que soit la taille du trou. La taille moyenne d'une avalanche augmente avec la taille de l'orifice et diverge quand elle s'approche d'une valeur critique. Cette transition vers un écoulement permanent où la probabilité de blocage s'annule, correspond dans l'analogie précédente à la transition vers un écoulement permanent sur un plan incliné d'angle égal à l'angle maximum de stabilité. Nous présentons aussi un modèle décrivant le passage des particules comme un processus sans mémoire. Ce dernier approche de près la statistique des tailles d'avalanche.*

## Abstract :

*We propose a 2D study of jamming at the outlet of a silo in the metastable state by means of the nonsmooth contact dynamics method. The jamming problem in this geometry can be mapped into the avalanche problem on a granular slope. In this analogy, the size of the opening plays the same role as the slope angle whereas the number of passing particles between two jams corresponds to the avalanche size. We use a simple protocol to break the arch and thus trigger a new avalanche every time an arch is formed. We find that the probability density of avalanche size scaled by the mean avalanche size is a decreasing exponential function independent of the opening. The mean avalanche size increases with the opening and it diverges as a critical opening is approached. This transition to steady flow where the jamming probability vanishes, bears close analogy to transition to steady flow on an inclined plane at the maximum angle of stability. We also present a simple model of passing events as an uncorrelated process. This model provides an excellent fit to the avalanche statistics.*

**Mots clefs :** matériaux granulaires, blocage, avalanche, dynamique des contacts non régulière

## 1 Introduction

Les matériaux granulaires peuvent se bloquer dans des états métastables très sensibles aux petites fluctuations. Un exemple bien connu est l'écoulement granulaire sur un plan incliné de pente  $\theta$ . Un écoulement permanent peut s'initier quand  $\theta$  atteint un angle limite  $\theta_f$  (aussi appelé "angle de démarrage") [1, 2]. D'un autre côté, le lit granulaire est insensible aux perturbations externes quand  $\theta$  est plus faible qu'un angle  $\theta_s$  (correspondant à l'"angle d'arrêt"). Dans ce régime, des réarrangements locaux de particules peuvent se produire sans déclencher des événements de grande amplitude [3, 4]. Dans l'intervalle  $[\theta_s, \theta_f]$ , le lit granulaire est métastable dans le sens où un écoulement granulaire peut être déclenché par une petite perturbation mais s'arrêtera en temps fini. Ce régime est donc de nature stochastique et caractérisé par une distribution de tailles d'avalanches plutôt large avec une moyenne qui augmente quand  $\theta$  approche le seuil d'écoulement  $\theta_f$  [3, 4].

Plus généralement, le blocage fournit un concept commun pour l'arrêt spontané de la dynamique dans la transition vitreuse et la rhéologie des fluides complexes [5, 6]. Il est souvent associé aux chaînes de force et la formation d'arches, i.e. aux corrélations cinématiques résultant des exclusions stériques et du frottement. Les arches ou les structures bloquées peuvent être plus ou moins stables selon les conditions de chargement. L'écoulement granulaire lui-même peut être vu comme un procédé de blocage-déblocage qui devient fortement intermittent et bruité quand au moins une dimension spatiale du système est petite.

Dans cet article, nous analysons numériquement la décharge de particules circulaires par l'orifice d'un conteneur, considéré comme une géométrie prototypique des écoulements granulaires [2]. Si la largeur de la sortie n'est pas trop grande par rapport au diamètre moyen des particules, l'écoulement des particules peut être stoppé

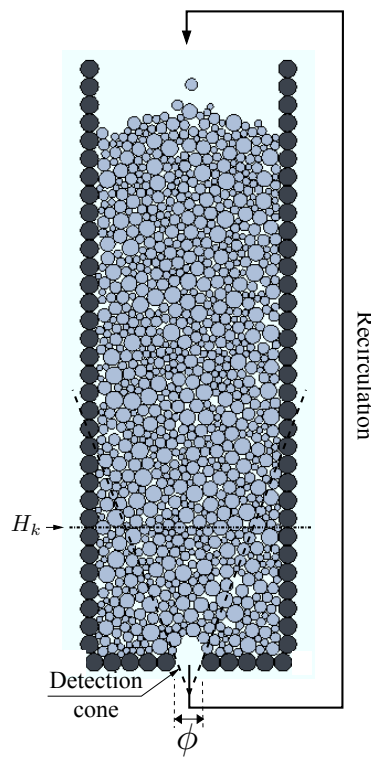


FIG. 1 – Schéma du dispositif :  $\phi$  diamètre de l’ouverture,  $\langle d \rangle$  diamètre moyen des grains,  $R = \phi / \langle d \rangle$  rapport d’ouverture.

par une voûte apparue juste au dessus de l’orifice. L’écoulement reprend si la voûte est déstabilisée par une action extérieure. Dans l’état métastable, un certain nombre de particules s’écoule par l’orifice jusqu’à ce qu’une nouvelle voûte interrompe l’écoulement.

Nous nous intéressons ici à la probabilité de blocage et sa relation avec la taille d’avalanche i.e. le nombre de particules s’écoulant entre deux blocages consécutifs. Une étude expérimentale détaillée de Zuriguel *et al.* [7, 8] montre que la probabilité de blocage décroît quand le rayon de l’orifice augmente. La taille d’avalanche diverge comme une loi de puissance à l’approche d’un rayon critique. Au delà de ce rayon, aucun blocage ne peut avoir lieu et l’écoulement devient stationnaire. Les simulations numériques 2D présentées ici sont cohérentes avec ces résultats. Nous montrons que la probabilité de blocage et la distribution des tailles d’avalanche sont prédites correctement par un modèle simple ne nécessitant pas de paramètres d’ajustement.

## 2 Description du système

Nous considérons une boîte 2D de forme rectangulaire de largeur  $L$  et possédant une ouverture à sa base de largeur variable  $\phi$  (FIG. 1). Les murs sont faits de disques rigides de diamètre  $d_w$ . Les échantillons granulaires sont préparés en remplissant la boîte par le haut sous l’action de la gravité d’intensité  $g$ . Afin d’éviter l’effet de cristallisation 2D, les échantillons sont polydisperses et formés de particules de diamètres tirés dans l’intervalle  $[d_{min}, d_{max}]$ , où  $d_{max} = d_w = 3d_{min}$ , suivant une distribution uniforme par fraction volumique. Les simulations ont été effectuées avec  $L \simeq 10d_{max}$ . La compacité moyenne à l’équilibre est  $\rho \simeq 0,85$ . Le coefficient de frottement entre particules et avec les murs est  $\mu = 0,5$ . L’effet conjoint des murs rugueux et d’un coefficient de frottement élevé améliorent la statistique de blocage durant la décharge. Les particules tombant par le trou sont réintroduites dans l’échantillon par le haut avec une vitesse nulle. Le nombre total de particules est donc constant durant la décharge. Nous utilisons près de  $10^3$  particules, ce qui correspond à une hauteur de remplissage de  $H \simeq 3L$ .

Pour déclencher une avalanche après apparition d’une arche de blocage, cette dernière est déstabilisée en retirant la particule possédant la plus basse altitude dans un cône de détection ; voir FIG. 1. La particule ôtée est traitée de la même manière que celles sortant de la boîte. Détecter la voûte numériquement est un problème non trivial. Cependant, si on ne s’intéresse pas à l’instant précis du blocage, la présence d’une voûte peut être simplement caractérisée par l’absence de mouvement relatif des particules dans un voisinage de l’orifice. Le voisinage considéré ici correspond à l’ensemble des particules situées au dessus de l’orifice jusqu’à une certaine hauteur  $H_k = 7d_{max}$ . Le critère retenu se base sur une normalisation du second moment de la vitesse  $\vec{v}$  des particules dans ce domaine  $\sqrt{\langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle}$  par la vitesse caractéristique unitaire des particules de plus petite taille lors d’une chute libre  $\sqrt{2gd_{min}}$ . Les particules sont considérées au repos quand le rapport  $\sqrt{\langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle} / (2gd_{min})$  devient suffisamment petit (typiquement inférieur à  $10^{-4}$ ).

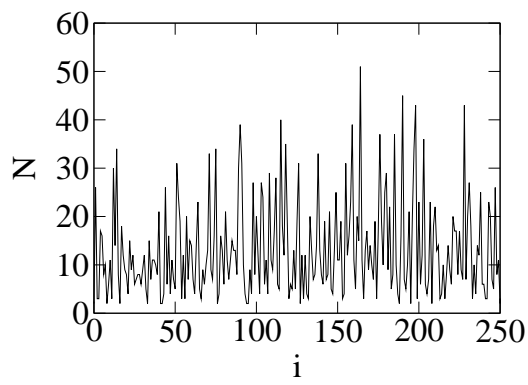


FIG. 2 – Une séquence de tailles d’avalanche pour  $R = 2, 25$ .

Pour les simulations, nous utilisons la méthode NSCD (dynamique des contacts non régulière, aussi appelée dynamique des contacts) [9, 10]. Huit séries de simulations ont été réalisées avec des valeurs de la largeur d’ouverture  $\phi$  différentes. Il est remarquable que seul le rapport  $R = \phi/\langle d \rangle$ , où  $\langle d \rangle$  est le diamètre moyen des particules, est pertinent. Nous faisons varier  $\phi$  tout en gardant la même distribution de tailles des particules et la largeur de la boîte  $L$ . Il est important de noter ici qu’une statistique significative d’avalanche nécessite des simulations à grande échelle de temps physique. Par exemple, dans le cas d’un rapport d’ouverture  $R = 2, 25$ , le temps physique nécessaire à l’obtention d’environ 1000 avalanches est de 3000 s. Nous avons suffisamment de statistiques pour les trois plus petites valeurs de  $R$  (2,25, 2,63 et 3). Les simulations pour les cinq plus grandes valeurs de  $R$  sont uniquement utilisées pour évaluer la taille moyenne d’avalanche à l’approche du rapport d’ouverture critique  $R_f$  où se produit la transition vers l’écoulement permanent.

### 3 Statistiques d’avalanche

Le nombre  $N$  de particules tombant entre deux blocages successifs est la taille d’avalanche. Elle fluctue considérablement d’une avalanche à l’autre comme le montre la FIG. 2, et on n’observe pas de corrélations entre plusieurs avalanches consécutives. L’absence de mémoire indique que le système (l’ensemble des particules à l’intérieur de la boîte) est dans un “état critique” au sens de la mécanique des sols. Le flux intermittent de particules à travers l’orifice conduit le système à un état critique. La compacité dans cet état est constante en moyenne et indépendante du rapport d’ouverture.

La FIG. 3 montre les densités de probabilité  $P(N)$  des tailles d’avalanche pour deux valeurs différentes de  $R$ . Elles sont bien approchées par une exponentielle dans la limite de la précision statistique disponible. La décroissance de cette exponentielle est en accord avec la densité de probabilité pour les grandes avalanches obtenues dans les expériences de Zuriguel *et al.* [7], mais nous n’observons pas un comportement distinct (croissance de la densité de probabilité avec la taille d’avalanche) pour les petites avalanches malgré la plus grande précision dont nous disposons pour celles-ci. Les plus petites avalanches comptent trois ou quatre particules minimum, comme on peut le voir sur la FIG. 3. Ces différences avec les expériences peuvent être attribuées au protocole utilisé pour déstabiliser la voûte. Enlever une particule de la voûte affecte seulement son voisinage tandis que le jet d’air utilisé dans les expériences citées déstabilise la voûte dans son ensemble. En effet, la pression de l’air semble influencer les statistiques des avalanches de petite taille dans les expériences [7]. Quand une voûte est cassée, toutes les particules la constituant peuvent tomber sans rebloquer la sortie si la pression de l’air est suffisamment élevée. Cette différence peut aussi être un simple effet de dimension d’espace. Une structure en dôme en 3D est très différente d’une structure curviligne en 2D, et sa formation ainsi que son effondrement sont encore plus complexes.

Les densités de probabilité pour différents rapports d’ouverture  $R$  se superposent sur la même courbe exponentielle en rapportant la taille d’avalanche  $N$  à sa moyenne  $\langle N \rangle$ , comme le montre la Fig. 4. Cela signifie que le nombre de particules entraînées dans l’avalanche varie avec  $R$  alors que la dynamique de blocage reste qualitativement identique. La distribution exponentielle implique que la probabilité d’observer une avalanche dont la taille est un multiple de la moyenne est significative. Il s’agit là d’un trait caractéristique du régime métastable qui a été aussi observé dans le cas des avalanches à la surface d’un tas de sable [4].

La FIG. 5 montre l’évolution de la taille moyenne d’avalanche  $\langle N \rangle$  en fonction de l’ouverture  $R$ . La taille moyenne d’avalanche augmente lentement avec  $R$  mais diverge à l’approche de la transition vers l’écoulement permanent pour un rapport d’ouverture critique  $R_f$ . Le graphe obtenu en utilisant l’échelle logarithmique est compatible avec une divergence en loi de puissance, en accord avec les conclusions de l’étude expérimentale [7] :

$$\langle N \rangle \propto (R_f - R)^{-\gamma} \quad (1)$$

où  $\gamma \simeq 2, 24$ . L’ouverture seuil  $R_f$  pour la décharge d’un silo joue donc le même rôle que l’angle maximum  $\theta_f$  pour l’écoulement sur un plan incliné. Nous trouvons  $R_f \simeq 4, 9$ , ce qui est étonnamment proche de la valeur expérimentale ( $R_f = 4, 94 \pm 0, 03$ ) malgré la géométrie 2D employée dans nos simulations et le fait que  $R_f$

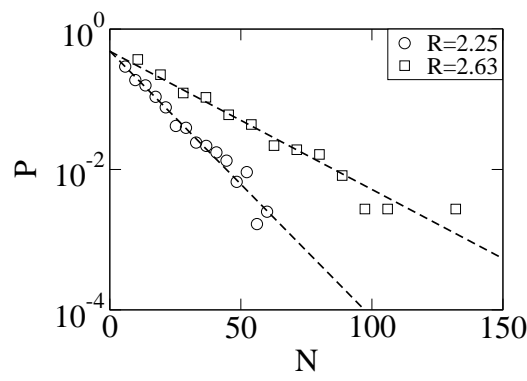


FIG. 3 – Densité de probabilité de tailles d’avalanche  $N$  pour deux valeurs différentes de  $R$ . Chaque ligne représente une approximation par une loi exponentielle.

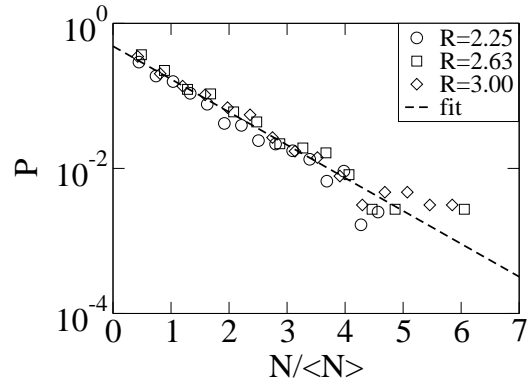


FIG. 4 – Densité de probabilité des tailles réduites d’avalanche  $N/\langle N \rangle$  pour trois valeurs différentes du rapport d’ouverture  $R$ . La ligne représente la loi exponentielle prédite par le modèle (cf. équation (6))

est défini par rapport à la taille moyenne des particules pour un échantillon polydisperse.

#### 4 Un modèle pour le blocage

Nous supposons que pendant chaque avalanche les particules sortent une par une. Nous notons “1” l’événement “passage” et “0” l’événement “blocage”. L’événement “passage” désigne le fait qu’une particule passe après qu’une autre soit déjà passée et sa probabilité d’occurrence est  $P_{11}$ . L’événement “blocage” signifie qu’un blocage s’est produit après le passage d’une particule, il a une probabilité  $P_{10} = 1 - P_{11}$  de se produire. La forme exponentielle de la distribution des tailles d’avalanches suggère que les événements successifs sont décorrelés, de sorte que la probabilité d’avoir  $N$  passages successifs est

$$P(N) = P(0) P_{11}^N = P(0) e^{N \ln(P_{11})} \quad (2)$$

Le processus s’arrête par un blocage et un nouveau processus indépendant démarre avec le déblocage. Dans l’équation (2),  $P(0)$  désigne la probabilité de blocage.  $P(0)$  caractérise le blocage dans le processus entier, tandis que  $P_{10}$  est une probabilité conditionnelle.

Le processus entier peut être vu comme une série composée de séquences d’événements “passage” séparées par des instances de blocage : 111011011110. ... Le fait qu’un nouveau processus démarre après chaque blocage, peut s’exprimer par les probabilités conditionnelles  $P_{00} = 0$  et  $P_{01} = 1$ . Soit  $M$  le nombre total d’événements, comportant  $S$  blocages et  $M - S$  passages. Par définition, nous avons

$$P(0) = \frac{S}{M} \quad (3)$$

D’autre part, comme chaque avalanche s’arrête par un blocage, la taille moyenne d’avalanche est

$$\langle N \rangle = \frac{M - S}{S} \quad (4)$$

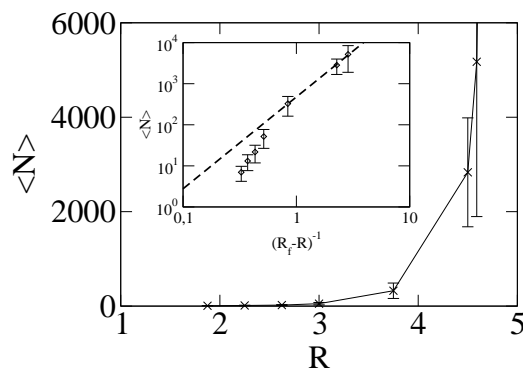


FIG. 5 – Evolution de la taille moyenne d’avalanche en fonction du rapport d’ouverture.

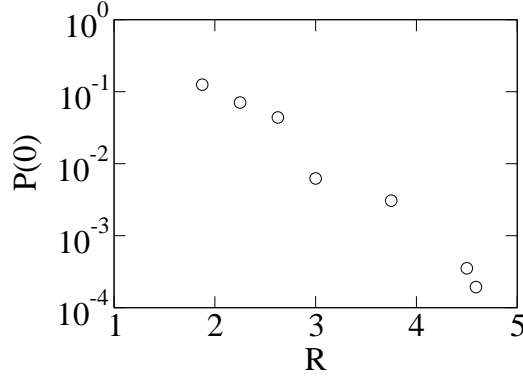


FIG. 6 – Evolution de la probabilité de blocage  $P(0)$  en fonction du rapport d’ouverture  $R$ .

Nous obtenons à partir des équations (3) et (4)

$$P(0) = \frac{1}{\langle N \rangle + 1} \quad (5)$$

Il s’agit d’une relation simple mais intéressante puisqu’elle montre que la probabilité de blocage dans l’état métastable est donnée par la taille moyenne d’avalanche. De plus, elle est compatible avec les deux limites de l’état métastable. En effet, pour  $\langle N \rangle = 0$ , nous avons  $P(0) = 1$  (état stable où tout est bloqué), et  $\langle N \rangle = \infty$ , nous avons  $P(0) = 0$  (état instable où les particules écoulent en permanence). La probabilité de blocage  $P(0)$  introduite dans l’équation (5) est tracée en fonction de l’ouverture  $R$  sur la FIG. 6, connaissant l’évolution de  $\langle N \rangle$  avec  $R$  (FIG. 5).

L’application de la condition de normalisation dans l’équation (2), i.e.  $\int_0^\infty P(N)dN = 1$ , et l’expression de  $P(0)$  de l’équation (5) donnent

$$P(N) = \frac{1}{\langle N \rangle + 1} e^{-\frac{N}{\langle N \rangle + 1}} \quad (6)$$

Cette expression est en accord avec la forme exponentielle des densités de probabilité des tailles d’avalanche et la mise à l’échelle des données par la taille moyenne d’avalanche. Nous obtenons aussi l’expression des deux probabilités conditionnelles manquantes

$$P_{10} = 1 - e^{-\frac{1}{\langle N \rangle + 1}} \quad (7)$$

$$P_{11} = e^{-\frac{1}{\langle N \rangle + 1}} = P(1)/P(0) \quad (8)$$

Nous remarquons, d’après l’équation (7), que nous avons  $P_{10} \simeq P(0)$  dans le cas où  $\langle N \rangle \gg 1$  : à l’approche d’un écoulement stationnaire, la probabilité instantanée de blocage est bien égale à sa valeur moyenne. Nous pouvons, à partir de l’équation (6), définir la densité de probabilité  $P_n(n)$  de la variable réduite  $n = N/(\langle N \rangle + 1)$ . Nous avons

$$P_n(n) = e^{-n} \quad (9)$$

Il s’agit d’une équation simple qui approche de près nos données normalisées, sans recourir à un paramètre d’ajustement (voir FIG. 4). Cette équation tient lieu de courbe maîtresse pour l’écoulement d’un silo et confirme la forme exponentielle décroissante de la statistique associée.

## 5 Conclusion

Une série de simulations numériques 2D de décharge de silo a été effectuée à l'aide de la méthode de NSCD. Le paramètre de contrôle est le rapport d'ouverture défini comme étant la largeur de l'orifice normalisée par la taille moyenne des particules. La série des particules passant par le trou entre deux blocages consécutifs peut être décrite comme une avalanche. On a montré que la densité de probabilité de la taille d'avalanche normalisée par la taille moyenne d'une avalanche est une exponentielle décroissante indépendante du rapport d'ouverture. Seule la taille moyenne d'une avalanche dépend du rapport d'ouverture et elle diverge quand il s'approche d'un rapport d'ouverture critique. Cette transition vers l'écoulement permanent pour une valeur critique du rapport d'ouverture est analogue à la transition vers l'écoulement permanent sur un plan incliné quand l'angle maximum de stabilité est atteint. On a aussi montré qu'un modèle simple par un processus sans mémoire reproduit bien la statistique d'avalanche. Il est nécessaire de procéder à des simulations supplémentaires pour confirmer les tendances mises en évidence dans cet article. En particulier, la transition vers l'écoulement permanent mérite une étude plus approfondie, sur la base de statistiques plus détaillées.

## Références

- [1] da Cruz F., Emam S., Prochnow M., Roux J.-N., et Chevoir F. Rheophysics of dense granular materials : discrete simulation of plane shear flows. *Phys. Rev. E*, 72, 021309, Aug 2005.
- [2] GDR-MiDi . On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E*, 14, 341–365, 2004.
- [3] Daerr A. and Douady S. Sensitivity of granular surface flows to preparation. *Europhysics Letters*, 47(3), 324–330, 1999.
- [4] Staron L., Vilotte J.-P., et Radjai F. Preavalanche instabilities in a granular pile. *Phys. Rev. Lett.*, 89, 204302, 2002.
- [5] Liu A. J. and Nagel S. R. Jamming is not just cool anymore. *Nature*, 396, 21, 1998.
- [6] Cates M. E., Wittmer J. P., Bouchaud J.-P., and Claudin P. Jamming, force chains, and fragile matter. *Phys. Rev. Lett.*, 81(9), 1841–1844, 1998.
- [7] Zuriguel I., Garcimartín A., Maza D., Pagnaloni L. A., and Pastor J. M. Jamming during the discharge of granular matter from a silo. *Phys. Rev. E*, 71, 051303, May 2005.
- [8] Zuriguel I., Pagnaloni L. A., Garcimartín A., and Maza D. Jamming during the discharge of grains from a silo described as a percolating transition. *Phys. Rev. E*, 68, 030301, Sep 2003.
- [9] Jean M. and Moreau J. J. Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections. In *Proceedings of Contact Mechanics International Symposium*, pages 31–48, Lausanne, Switzerland, 1992. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.
- [10] Moreau J. Some numerical methods in multibody dynamics : Application to granular materials. *European Journal of Mechanics A/Solids*, supp.(4), 93–114, 1994.