



**HAL**  
open science

# Simulation numérique de faisceaux acoustiques bornés : méthode de calcul rapide par intégration dans le plan complexe

Philippe Gagnol, Catherine Potel, Nacera Bedrici-Frai

► **To cite this version:**

Philippe Gagnol, Catherine Potel, Nacera Bedrici-Frai. Simulation numérique de faisceaux acoustiques bornés : méthode de calcul rapide par intégration dans le plan complexe. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03378628

**HAL Id: hal-03378628**

**<https://hal.science/hal-03378628>**

Submitted on 14 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Simulation numérique de faisceaux acoustiques bornés : méthode de calcul rapide par intégration dans le plan complexe

Ph. GATIGNOL<sup>a</sup>, C. POTEL<sup>b,c</sup>, N. BEDRICI<sup>b,c</sup>

a. Laboratoire Roberval, UMR CNRS 6253, Université de Technologie de Compiègne, BP 20 529, 60205 COMPIEGNE Cedex, France. E-mail : Philippe.Gatignol@utc.fr

b. Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, UMR CNRS 6613, Avenue Olivier Messiaen, 72 085 LE MANS, France. E-mail : Catherine.Potel@univ-lemans.fr

c. Fédération Acoustique du Nord-Ouest, (FANO) FR CNRS 3110, France

## Résumé :

La simulation des procédés ultrasonores de contrôle non destructif passe par la prise en compte des faisceaux acoustiques, par exemple par superposition d'ondes planes, ce qui conduit au calcul d'intégrales de Fourier spatiales pour déterminer les champs dans les divers milieux. On montre ici les nombreux avantages d'une méthode d'intégration en variable complexe (rapidité, précision, élimination de singularités, voire du phénomène d'aliasing) comparativement à des techniques telles la FFT.

## Abstract :

The simulation of ultrasonic non destructive testing needs to take into account bounded acoustic beams, via a superposition of plane waves for instance. This leads to the calculation of spatial Fourier integrals in order to determine the fields in each medium. This paper aims at showing the numerous advantages of an integration method using complex variables (fastness, accuracy, cancellation of singularities or even aliasing phenomenon) compared with integration techniques like FFT algorithm.

**Mots clefs :** faisceaux acoustiques, CND, plan complexe, ultrasons

## 1 Représentation de Fourier d'un faisceau acoustique monochromatique en géométrie bidimensionnelle (rappel)

La décomposition d'un champ acoustique en ondes planes monochromatiques, est une méthode classique pour modéliser le rayonnement d'un émetteur plan [1-4]. Cette méthode s'avère fructueuse lorsque le faisceau émis interagit avec des structures multicouches planes. Elle fait intervenir des transformées de Fourier spatiales. Pour un milieu de propagation fluide 0 (vitesse de propagation  $c_0$ , masse volumique  $\rho_0$ ) occupant le demi-espace  $z \geq 0$  (figure 1), on suppose connue la donnée d'émission sur le plan émetteur  $z = 0$  (déplacement normal ou vitesse normale  $\hat{w}_0$ ), soit à partir de résultats expérimentaux, soit sur la base d'une expression analytique telle que

$$\hat{w}_0(x;t) = \hat{W}_0(x) \exp(-i\omega t) = W_0 \exp\left(-x^2/a^2\right) \exp(-i\omega t) \quad (1)$$

dans le cas d'un faisceau gaussien généré dans le fluide 0 par un émetteur de diamètre  $2a$  (le "chapeau" désignant une quantité pouvant prendre des valeurs complexes.) Un autre type de donnée d'émission fréquemment utilisé est le "créneau", pour lequel l'émetteur vibre en mode piston :  $\hat{W}_0(x)$  est alors constant sur le segment  $-a \leq x \leq a$  et nul à l'extérieur.

La recherche du champ rayonné dans l'espace  $z \geq 0$  va se faire au moyen d'une superposition continue d'ondes planes ou évanescentes, de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0 = \omega/c_0 \mathbf{n} = k_x \mathbf{e}_x + \hat{k}_z \mathbf{e}_z$ , où  $\omega$  est la pulsation des ondes,  $\mathbf{n}$  est le vecteur direction de propagation de l'onde et où  $B = (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$  est la base orthonormée

associée au repère  $R = (O, x, z)$  de l'émetteur, voir figure 1. L'amplitude  $\hat{A}(k_x)$  de chacune de ces ondes est une fonction à déterminer de la composante  $k_x$  du vecteur d'onde. Pour tout point  $M(x, z)$  du demi-espace  $z \geq 0$ , la pression acoustique complexe  $\hat{p}(x, z; t) = \hat{P}(x, z) \exp(-i \omega t)$  s'écrira sous la forme d'une intégrale de Fourier (variable d'intégration  $k_x$ , au facteur  $\exp(-i \omega t)$  près), telle que [4] :

$$\hat{P}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}(k_x) \exp[i(k_x x + \hat{k}_z z)] dk_x . \quad (2)$$

La composante  $\hat{k}_z$  du vecteur d'onde est réelle ou imaginaire. Elle dépend de  $k_x$  par l'intermédiaire de la relation de dispersion

$$k_x^2 + \hat{k}_z^2 = \|\mathbf{k}_0\|^2 = k_0^2 = (\omega/c_0)^2 . \quad (3)$$

Le choix de la détermination de cette fonction  $\hat{k}_z(k_x)$  est une question primordiale.

Ce choix étant fait (voir §2), l'amplitude complexe  $\hat{A}(k_x)$  est ensuite déterminée à partir de la donnée d'émission, telle que (1) par exemple, (voir § 3).

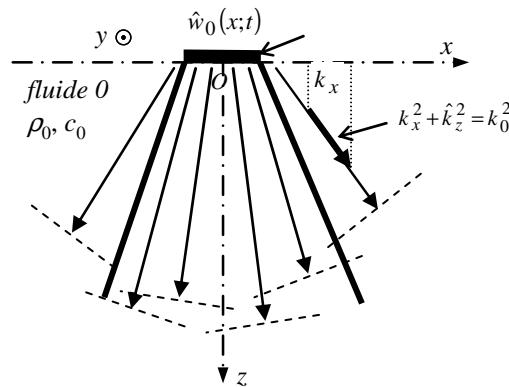


FIG. 1 – Schéma de principe de la décomposition en onde planes d'un faisceau acoustique borné créé par un émetteur dans un milieu fluide.

## 2 Choix des ondes planes constitutives du faisceau

L'unicité de la solution (2) de l'équation de propagation des ondes dans le milieu fluide 0 est assurée par la prescription de son comportement lorsque  $z \rightarrow +\infty$  (condition de rayonnement ou de décroissance à l'infini). Cette prescription se fait sur chacune des ondes planes ou évanescentes constitutives, par un choix convenable de la valeur de  $\hat{k}_z$  issue de la relation de dispersion (3) :

- pour  $|k_x| \leq k_0$ ,  $\hat{k}_z$  est réel. L'onde constitutive est une onde plane progressive. Celle-ci se propage vers les  $z > 0$  si l'on choisit la détermination réelle positive pour  $\hat{k}_z$ . (4-a)

- pour  $|k_x| > k_0$ ,  $\hat{k}_z$  est imaginaire pur. L'onde constitutive est évanescente dans la direction  $Oz$ . Elle décroît exponentiellement vers les  $z > 0$  si l'on choisit la détermination à valeur imaginaire positive. (4-b)

La technique de calcul des intégrales de Fourier spatiales utilisée au §5, sur la base du théorème intégral de Cauchy, suppose que la variable d'intégration  $k_x$  prend elle-même des valeurs complexes  $\hat{k}_x$ . Il convient donc de préciser la fonction  $\hat{k}_z(\hat{k}_x)$  dans le plan complexe de  $\hat{k}_x$ . Les conditions (4) sur  $\hat{k}_z$  guident le choix de la branche à retenir pour cette fonction. Cette branche, dite branche principale, correspond à la condition

$$\Re(\hat{k}_z) > 0 , \quad (5)$$

où  $\Re(\hat{X})$  et  $\Im(\hat{X})$  désignent respectivement les parties réelle et imaginaire de  $\hat{X}$ . Le domaine de validité de cette branche est limité aux deux coupures de l'axe réel :  $-\infty < k_x < -k_0$  et  $k_0 < k_x < +\infty$  sur lesquelles  $\Re(\hat{k}_z) = 0$  (figure 2).

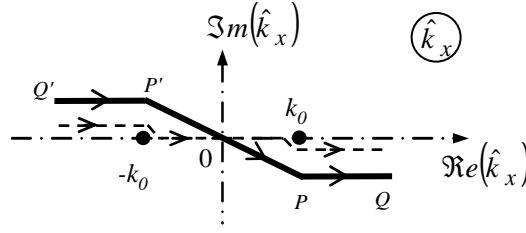


FIG. 2 – Trajets d'intégration dans le plan complexe de  $\hat{k}_x$ .

Sur le feuillet correspondant à cette branche principale, le comportement à l'infini de la fonction  $\hat{k}_z$  est le suivant :

$$\text{- dans le demi-plan } \Im(\hat{k}_x) > 0, \hat{k}_z \approx -i\hat{k}_x, \quad (6\text{-a})$$

$$\text{- dans le demi-plan } \Im(\hat{k}_x) < 0, \hat{k}_z \approx i\hat{k}_x. \quad (6\text{-b})$$

Compte tenu des conditions (4) imposées à la solution  $\hat{k}_z$  de l'équation de dispersion (3), sur ce feuillet, le trajet d'intégration réel en  $k_x$  de la transformée de Fourier (2), constitué de l'ensemble de l'axe réel, doit être précisé comme suit lorsque la branche principale  $\hat{k}_z(\hat{k}_x)$  est introduite dans l'intégrale (2) :

$$\text{- bord supérieur de la coupure } -\infty < k_x < -k_0 \quad (\Im(\hat{k}_z) > 0), \quad (7\text{-a})$$

$$\text{- segment } -k_0 < k_x < k_0 \quad (\Re(\hat{k}_z) > 0), \quad (7\text{-b})$$

$$\text{- bord inférieur de la coupure } k_0 < k_x < +\infty \quad (\Im(\hat{k}_z) > 0), \quad (7\text{-c})$$

ce qui correspond au trajet pointillé sur la figure 2.

### 3 Détermination de l'amplitude $\hat{A}(k_x)$

En utilisant l'équation d'Euler [5]

$$\rho_0 \partial \hat{\mathbf{V}} / \partial t + \nabla \hat{p} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

où  $\hat{\mathbf{V}}$  est le vecteur vitesse particulière, la vitesse particulière  $\hat{w}$  dans le fluide, selon la direction  $Oz$ , peut s'exprimer en fonction de la pression acoustique par

$$\hat{w}(x, z; t) = \hat{W}(x, z) \exp(-i\omega t) = [1 / (i\rho_0 \omega)] \partial \hat{p}(x, z; t) / \partial z, \quad (9)$$

ce qui, en utilisant l'Eq. (2), conduit à

$$\hat{W}(x, z) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{k}_z \hat{A}(k_x) \exp[i(k_x x + \hat{k}_z z)] dk_x \quad (10\text{-a})$$

En supposant que la vitesse normale de la face avant de l'émetteur et la vitesse particulière normale dans le fluide en  $z = 0$  sont égales, on obtient

$$\hat{W}(x, z = 0) = \frac{1}{\rho_0 \omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{k}_z \hat{A}(k_x) \exp(i k_x x) dk_x = \hat{W}_0(x), \quad (10\text{-b})$$

où  $\hat{W}_0(x)$  est une fonction connue telle que donnée par (1) par exemple.

L'amplitude  $\hat{A}(k_x)$  de chaque onde constitutive peut alors être calculée par transformée de Fourier inverse :

$$\hat{A}(k_x) = \frac{\rho_0 \omega}{2\pi \hat{k}_z} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{W}_0(x) \exp(-ik_x x) dx \quad (11)$$

Par suite, puisque les amplitudes  $\hat{A}(k_x)$  sont désormais connues, le champ de pression  $\hat{P}(x, z)$  dans le fluide 0 peut alors être calculé, pour tout  $z \geq 0$ , en utilisant l'intégrale de Fourier (2) prise sur l'axe réel, selon le trajet précisé au §2.

#### 4 Trajet d'intégration réel

L'intégrale de Fourier (2) (de même que l'intégrale (11), dans le cas où une inversion de Fourier analytique n'est pas possible) peut être classiquement calculée par transformée de Fourier discrète. Cette technique permet l'utilisation de l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT), mais elle exige que le paramètre  $k_x$  soit réel. Elle est en outre contraignante dans la mesure où elle impose une association stricte entre les points d'échantillonnage de la variable d'intégration et les points de l'espace physique où les valeurs du champ sont calculées, points qui devront se trouver en nombre égal aux points d'intégration et équi-répartis sur une parallèle à la ligne émettrice.

Les langages de programmation matriciels actuels permettent par contre de calculer très rapidement les intégrales de la forme (2) par une simple méthode des trapèzes. La contrainte sur les points de calcul est évitée. De plus, comme on le verra au §5, le trajet d'intégration en  $k_x$  peut être modifié dans le plan de la variable complexe  $\hat{k}_x$ .

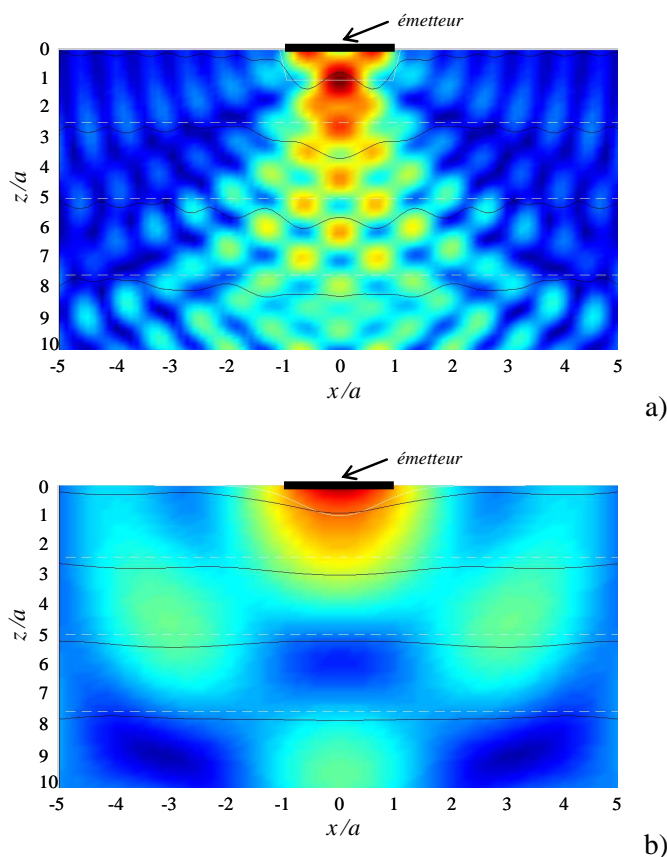


FIG. 3 – Cartographies du champ de pression dans un fluide avec quatre coupes à  $z = 0$ ,  $z = 2.5 a$ ,  $z = 5 a$  et  $z = 7.5 a$ , par usage d'un trajet d'intégration réel (50 points d'échantillonnage pour  $k_x$ ) pour le calcul de l'intégrale de Fourier (2). a) Mode piston,  $k_0 a = 5$ ,  $-11 \leq k_x a \leq 11$ . b) Mode Gaussien,  $k_0 a = 1$ ,  $-4 \leq k_x a \leq 4$ .

Les figures 3 présentent dans le plan  $(O, x, z)$  des cartographies du champ de pression acoustique généré par un émetteur, en faisant usage d'un chemin d'intégration réel pour calculer les intégrales de Fourier quand la

vitesse normale  $\hat{w}_0$  est un créneau [mode piston, voir Fig. 3-a)] ou une Gaussienne (Fig. 3-b). Pour l'échantillonnage choisi pour  $k_x$  (seulement 50 points), les champs ne sont pas bien calculés et présentent beaucoup d'irrégularités. Il faut au moins 500 points pour obtenir une meilleure résolution, et ce pour chaque point  $M(x, z)$  de l'espace physique. En effet, les points  $k_x = \pm k_0$  de l'axe réel, pour lesquels  $\hat{k}_z = 0$ , sont des singularités (intégrables) pour les intégrales de Fourier ; les valeurs de discrétisation en  $k_x$  doivent donc éviter ces points et il faut un nombre de points important pour obtenir une valeur approchée convenable de l'intégrale au voisinage de ces singularités.

## 5 Trajet d'intégration complexe

Au lieu d'utiliser un trajet d'intégration réel en  $k_x$ , il est également possible de choisir un trajet complexe, en faisant appel au théorème intégral de Cauchy qui autorise la déformation d'un contour d'intégration fermé sous réserve de rester dans le même domaine d'holomorphie de la fonction à intégrer. L'intégrale (2) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\hat{P}(x, z)}{\rho_0 c_0 W_0} = k_0 a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{G}(k_x)}{\hat{k}_z} \exp[i(k_x x + \hat{k}_z z)] dk_x, \quad (12)$$

avec 
$$\hat{G}(k_x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(k_x a)}{k_x a} \text{ pour un mode piston d'amplitude constante } W_0, \quad (13\text{-a})$$

et 
$$\hat{G}(k_x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{k_x a}{2}\right)^2\right] \text{ pour un mode gaussien [voir Eq. (1)]}. \quad (13\text{-b})$$

L'étude du comportement à l'infini de la fonction  $\hat{G}(k_x)$  et de l'exponentielle de propagation permet de déduire la déformation possible du contour à l'infini. D'après les théorèmes classiques d'analyse dans le plan complexe [6], dans le cas d'un faisceau en mode piston [Eq. (13-a)], le contour déformé doit s'éloigner à l'infini parallèlement à l'axe réel, au-dessus de cet axes dans la région  $\Re(\hat{k}_x) < 0$  et au-dessous dans la région  $\Re(\hat{k}_x) > 0$ . Dans le cas du faisceau gaussien [Eq. (13-b)], il suffit d'imposer au contour de s'éloigner à l'infini dans un angle  $|\Im(\hat{k}_x)| < |\Re(\hat{k}_x)|$ , le cas échéant en traversant l'une ou l'autre des coupures, en changeant alors la détermination de  $\hat{k}_z$ . Dans les deux cas, un trajet d'intégration à trois segments tel que celui tracé sur la figure 2 peut convenir, avec des points de troncature  $Q'$  et  $Q$  à définir. Pratiquement, on pourra choisir les points de connexion  $P'$  et  $P$  de telle sorte que les intégrales sur les segments  $Q'P'$  et  $PQ$  soient négligeables. L'étude de la précision du calcul numérique porte alors sur la position des extrémités  $P'$  et  $P$  du segment unique d'intégration et sur le nombre de points de discrétisation (équi-répartis) sur ce segment. Les figures 4 présentent ainsi dans le plan  $(O, x, z)$  des cartographies du champ de pression acoustique, dans les mêmes conditions que celles des figures 3 (y compris au niveau du nombre de points d'échantillonnage), mais en faisant usage d'un tel chemin d'intégration complexe.

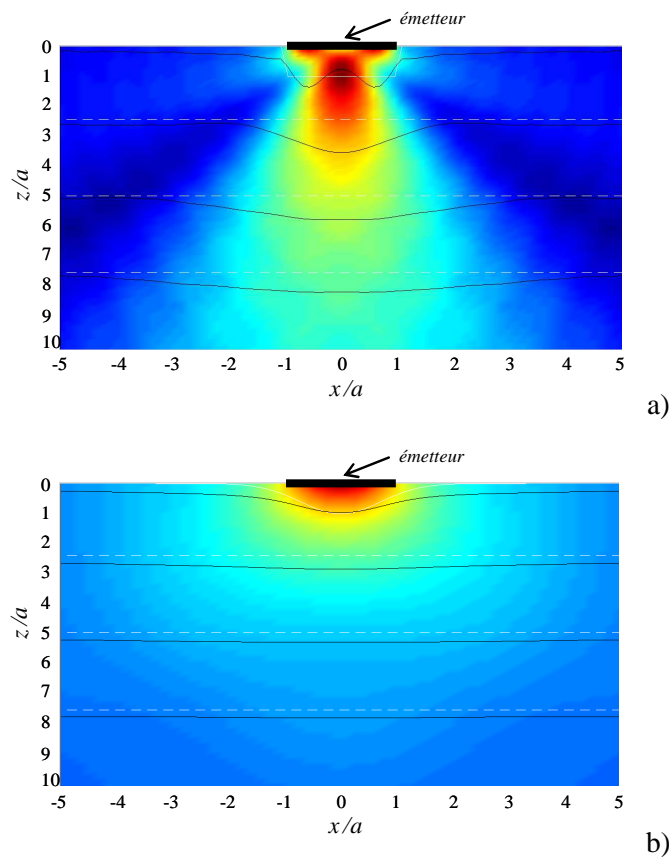


FIG. 4 – Cartographies du champ de pression dans un fluide avec quatre coupes à  $z = 0$ ,  $z = 2.5 a$ ,  $z = 5 a$  et  $z = 7.5 a$ , par usage d'un trajet d'intégration complexe (50 points d'échantillonnage pour  $k_x$ ) pour le calcul de l'intégrale de Fourier (2). a) Mode piston,  $k_0 a = 5$ ,  $\hat{k}_x a$  compris entre  $-11 + 0.4 i$  et  $11 - 0.4 i$ .  
b) Mode Gaussien,  $\hat{k}_x a$  compris entre  $-4 + 0.4 i$  et  $4 - 0.4 i$ .

Utiliser un tel trajet d'intégration améliore considérablement la précision du calcul de l'intégrale (2), comme le montre la comparaison entre les figures 3 et 4, sans devoir augmenter le nombre de points d'échantillonnage en  $k_x$ . Cette technique d'intégration complexe, rapide et précise, est intéressante lorsque le nombre de points de calcul dans l'espace physique devient grand, par exemple pour l'établissement de cartographies telles que celles de la figure 4, ou quand plusieurs milieux sont impliqués lorsque le faisceau émis interagit avec une structure multicouche fluide ou solide.

## References

- [1] Goodman J.W., Introduction to Fourier Optics, MacGraw Hill, New York, 1981.
- [2] Pott J., Harris J.G., "Scattering of an acoustic Gaussian beam from a fluid-solid interface", J. Acoust. Soc. Am., 76 (6), 1829-1837, 1984
- [3] Orofino D., Pedersen, "Efficient angular spectrum decomposition of acoustic source-part I: theory", IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control., 40, 238-249, 1993
- [4] Rousseau M., Gatignol Ph., "Theory of the acoustic bounded beam", in Acoustic Interactions with submerged elastic structures, Part I, 207-241, edited by A. Guran, J. Ripoché, F. Ziegler, Series on stability, vibration and control of systems Series B, 5, 1996
- [5] Bruneau M., Manuel d'Acoustique Fondamentale, Hermès, 1998.
- [6] Cartan H., Théorie élémentaire des fonctions analytiques, Hermann, 1961.