



HAL
open science

Couplage de méthodes hybrides acoustiques pour la prévision du bruit de jet par Simulation des Grandes Echelles

Guillaume Bodard, Christophe Bailly

► **To cite this version:**

Guillaume Bodard, Christophe Bailly. Couplage de méthodes hybrides acoustiques pour la prévision du bruit de jet par Simulation des Grandes Echelles. CFM 2009 - 19ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2009, Marseille, France. hal-03378273

HAL Id: hal-03378273

<https://hal.science/hal-03378273>

Submitted on 14 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Couplage de méthodes hybrides acoustiques pour la prévision du bruit de jet par Simulation des Grandes Echelles

G. BODARD^a, C. BAILLY^b

a. SNECMA, Rond-Point René Ravaut, 77550 MOISSY-CRAMAYEL

b. Ecole Centrale de Lyon, LMFA, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 ECULLY

Résumé :

Une méthode hybride de prévision de bruit de jet à partir d'une Simulation des Grandes Echelles est développée et appliquée à deux jets subsoniques. Elle couple la méthode d'extrapolation des ondes acoustiques de Ffowcs-Williams&Hawkings pour les basses fréquences et le modèle du bruit de la turbulence fine de Tam&Auriault au-delà. Les champs aérodynamiques sont en accord avec les expériences, malgré une surestimation du mélange entraînant une légère surévaluation des niveaux acoustiques.

Abstract :

The two components of subsonic jet noise are investigated by Large Eddy Simulation with an hybrid prediction method. It combines the Ffowcs-Williams&Hawkings Wave Extrapolation Method for low frequencies whereas the fine scale turbulence noise theory of Tam&Auriault provides the higher frequency part. Flow field analysis of two subsonic jets shows a good agreement with experimental results. Acoustics levels are also correctly predicted with the hybrid method, even if mixing overestimation leads to higher noise levels.

Mots clefs : bruit de jet, Simulation des Grandes Echelles, méthode hybride

1 Introduction

Le bruit de jet, même s'il a été considérablement réduit depuis les années 50, reste une source dominante du bruit des moteurs d'avion, notamment au décollage. Ainsi, de nombreux efforts sont entrepris afin de disposer de méthodes fiables de prévision de cette source.

De nombreux modèles de prévision ont été développés à partir de l'analogie acoustique proposée par Lighthill [1]. Ces modèles sont pour la plupart appliqués à des calculs RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*), résolvant les équations de Navier-Stokes moyennées, pour obtenir les niveaux acoustiques en champ lointain. Plus récemment, Tam&Auriault [2] ont développé un modèle différent de prévision du bruit de la turbulence fine, sur la base d'une analogie à la théorie cinétique des gaz. Il fournit des résultats très satisfaisants perpendiculairement à l'axe pour toute une gamme de jets circulaires.

Depuis une dizaine d'années, des simulations instationnaires sont employées : en particulier, la Simulation des Grandes Echelles (SGE), qui consiste à résoudre les structures turbulentes de taille supérieure à la taille de maille et à modéliser les plus petites. Pour obtenir les niveaux acoustiques en champ lointain, des méthodes hybrides sont souvent utilisées pour s'affranchir d'un calcul compressible direct jusqu'aux microphones. Bogey *et al.* [3] utilisent par exemple les équations d'Euler linéarisées pour résoudre la propagation acoustique. D'autres auteurs comme Uzun [4], Shur *et al.* [5] ou Huet *et al.* [6] emploient des méthodes d'extrapolation, comme les analogies de Kirchhoff [7] ou de Ffowcs-Williams&Hawkings [8]. Les niveaux acoustiques sont ainsi obtenus à partir des grandeurs instantanées stockées sur une surface englobant les sources du jet.

Comme identifié expérimentalement par Tam *et al.* [9, 10] et confirmé numériquement par Bogey *et al.* [11], le bruit des jets subsoniques peut être décomposé en deux contributions. La première est le bruit des grandes structures turbulentes, dominant pour les angles en aval du jet et à signature basse fréquence. Le second est le bruit de mélange, lié au rayonnement plutôt isotrope et large bande des couches de cisaillement. Celui-ci n'est pas très directif et domine perpendiculairement à l'axe du jet.

L'objectif de la présente étude est de mettre en place un modèle de prévision capable d'évaluer chacune de ces contributions. Pour cela, le calcul du champ aérodynamique est effectué par SGE. La méthode d'extrapolation des ondes de Ffowcs-Williams&Hawkings (FWH) est ensuite employée pour évaluer le bruit en basses fréquences, tandis que le modèle de Tam&Auriault permet d'évaluer les niveaux en hautes fréquences à partir d'un champ moyen reconstruit de manière à prendre en compte la partie liée aux petites échelles turbulentes. Un filtrage est enfin réalisé afin de supprimer la contribution basses fréquences du bruit de mélange, déjà évaluée par la méthode d'extrapolation des ondes.

2 Description du modèle acoustique

L'idée de la méthodologie de couplage est de modéliser chacune des contributions acoustiques par les modèles décrits précédemment. En notant S_{BF} et S_{HF} les contributions basses et hautes fréquences de la densité spectrale de puissance acoustique, la densité spectrale de puissance acoustique S vérifie simplement

$$S(\mathbf{x}, \omega) = S_{BF}(\mathbf{x}, \omega) + S_{HF}(\mathbf{x}, \omega)$$

2.1 Evaluation de la partie basses fréquences S_{BF}

Afin de bien différencier les grandeurs résolues et filtrées par la SGE, nous introduisons les décompositions suivantes

$$\begin{aligned} p &= \bar{p} + p^> \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho^> \\ u_i &= \tilde{u}_i + u_i^> \end{aligned}$$

avec \bar{p} , $\bar{\rho}$ et \tilde{u}_i les grandeurs résolues et $p^>$, $\rho^>$ et $u_i^>$ les résidus du filtrage, non calculés. La composante de la vitesse \tilde{u}_i provient de la décomposition de Favre, qui fournit la relation $\tilde{u}_i = \overline{\rho u_i} / \bar{\rho}$. A noter que les quantités \bar{f} et \tilde{f} ne correspondent en aucun cas à des grandeurs moyennes. En effet, on peut réaliser la décomposition suivante pour la vitesse : $\tilde{u}_i = \langle \tilde{u}_i \rangle + \tilde{u}_i''$ avec $\tilde{u}_i'' \neq 0$.

La méthode FWH, appliquée à une surface poreuse immobile et englobant toutes les sources acoustiques, permet alors d'obtenir la densité spectrale de puissance en basses fréquences S_{BF} à partir du signal de pression acoustique p'_{FWH} vérifiant

$$\begin{aligned} 4\pi p'_{FWH}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\bar{\rho} \tilde{u}_n}{r} \right]_{\tau^*} d\Sigma + \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\frac{r_i \tilde{P}_{ij} n_j + \bar{\rho} \tilde{u}_i r_i \tilde{u}_n}{r^2} \right]_{\tau^*} d\Sigma \\ &+ \iint_{\Sigma} \left[\frac{r_i \tilde{P}_{ij} n_j + \bar{\rho} \tilde{u}_i r_i \tilde{u}_n}{r^3} \right]_{\tau^*} d\Sigma \end{aligned} \quad (1)$$

avec $\tilde{P}_{ij} = (\bar{p} - p_0) \delta_{ij} - \tilde{\tau}_{ij}$ le tenseur des déformations, $r = |r_i|$ la distance source-observateur et n_i le vecteur normal à la surface. Cette technique permet ainsi d'évaluer la majeure partie du bruit des grandes structures turbulentes, ainsi que la partie basses fréquences du bruit de mélange.

2.2 Evaluation de la partie hautes fréquences S_{HF}

Comme précisé précédemment, les grandes structures turbulentes rayonnent en basses fréquences. Ainsi, le modèle choisi pour évaluer les fréquences supérieures est basé sur une évaluation du bruit de mélange : le modèle du bruit de la turbulence fine de Tam&Auriault. La densité spectrale de puissance acoustique a alors pour expression

$$S_{TAM}(\mathbf{x}, \omega) = 4\pi \left(\frac{\pi}{\ln 2} \right)^{3/2} \iiint \frac{\hat{q}_s^2 l_s^3}{c^2 \tau_s} |p_a(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}, \omega)|^2 \frac{\exp\{-\omega^2 l_s^2 / 4\bar{u}^2 \ln 2\}}{\left[1 + \omega^2 \tau_s^2 (1 - \bar{u} \cos \theta / a_\infty)^2 \right]} d\mathbf{x}_2 \quad (2)$$

avec \bar{u} la vitesse de convection, $\tau_s = c_\tau k_t / \epsilon$ et $l_s = c_l k_t^{3/2} / \epsilon$ les échelles turbulentes de temps et de longueur et $\hat{q}_s^2 / c^2 = A^2 (2/3 \bar{\rho} k_t)^2$ l'intensité des sources.

Ce modèle est habituellement appliqué à partir de calculs RANS, et l'idée consiste ici à reconstruire l'énergie cinétique turbulente k_t et le taux de dissipation ϵ à partir du champ moyen de la SGE, en tenant compte de l'énergie qui a été filtrée par la simulation. Concernant k_t , on peut donc identifier deux contributions. La première est l'énergie cinétique obtenue à partir des tensions de Reynolds calculées et correspond à l'énergie cinétique turbulente résolue k_{SGE} . La seconde est l'énergie cinétique turbulente sous-maille k_{sgs} , qui n'est pas résolue par le calcul et qui correspond à l'énergie des petites structures turbulentes, de tailles inférieures à la taille locale de maille. Celle-ci peut être reconstruite par un modèle analogue au modèle de Smagorinsky [12]. Ainsi, l'énergie cinétique k_t vérifie $k_t = k_{SGE} + k_{sgs}$ avec

$$k_{SGE} = \frac{\langle \tilde{u}_i'' \tilde{u}_i'' \rangle}{2} = \frac{\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_i \rangle - \langle \tilde{u}_i \rangle^2}{2} \quad (3)$$

$$k_{sgs} = 2C_I \Delta^2 \langle \tilde{s}_{ij} \rangle \langle \tilde{s}_{ij} \rangle \quad \text{où} \quad \langle \tilde{s}_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle \tilde{u}_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \rangle}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

Afin d'obtenir une expression du taux de dissipation turbulente ϵ , associé aux petites structures non résolues, deux relations liant la tension de Reynolds axiale permettent d'exprimer celui-ci à partir de l'énergie cinétique turbulente et du gradient radial de vitesse axiale

$$\epsilon = c_\epsilon k_t \frac{d \langle \tilde{u}_1 \rangle}{dr} \quad (5)$$

Les grandeurs turbulentes reconstruites nous permettent alors d'évaluer les échelles de temps et de longueur ainsi que l'intensité de la source élémentaire, et par conséquent la densité spectrale de puissance acoustique associée selon (2).

Ce modèle nous fournit les niveaux acoustiques associés au bruit de la turbulence fine. Cependant, en basses fréquences, cette contribution est déjà prise en compte par le modèle FWH avec un raffinement suffisant du maillage. Il est donc indispensable de filtrer la partie basses fréquences afin de ne pas évaluer deux fois les mêmes sources. Pour cela, dans chaque cellule du maillage, une taille moyenne de maille est calculée à partir des tailles de mailles jusqu'à la surface. Cette taille moyenne de maille permet d'évaluer une longueur d'onde critique λ_c au-delà de laquelle les ondes sont résolues par la SGE jusqu'à la surface acoustique sans dissipation. Ainsi, la contribution acoustique évaluée par le modèle de Tam&Auriault n'est prise en compte que si la longueur d'onde considérée λ est inférieure à λ_c , celle-ci étant déjà évaluée par la méthode FWH le cas échéant.

3 Simulation des Grandes Echelles de jets subsoniques

Deux jets circulaires avec un nombre de Mach $M = 0.9$ ont été calculés par SGE compressible, l'un isotherme (*jet1*) et l'autre chaud (*jet2*). Les caractéristiques de ces calculs sont résumées en table 1. La tuyère associée est celle qui a été utilisée dans le programme européen JEAN (*Jet Exhaust Aerodynamics & Noise*) et qui a déjà fait l'objet de plusieurs simulations du même type, notamment par Andersson [13], Huet [6] et Bogey [14].

	M	T_j/T_0	Q_m [kg/s]
jet1	0.9	1	0.725
jet2	0.9	2	0.403

TABLE 1 – Caractéristiques des jets étudiés

3.1 Méthode numérique

Les SGE ont été effectuées à l'aide du code de calcul CEDRE [15] développé par l'ONERA. Le maillage réalisé compte environ 3 millions de cellules, réparties dans un domaine de calcul étendu jusqu'à $75D$ en aval, $40D$ en radial et $15D$ en amont, D étant le diamètre de la tuyère à l'éjection. Le maillage est raffiné au sens acoustique sur une plus petite zone, débutant à l'éjection et allant jusqu'à $25D$ axialement et de 2 à $4D$ radialement. Cette zone permet la résolution de la propagation des ondes pour un nombre de Strouhal inférieur à $St_{lim} = 0.5$. L'utilisation d'un domaine étendu est justifiée, afin de dissiper les ondes acoustiques en dehors de la zone raffinée avant que les fronts d'ondes n'atteignent les frontières du domaine et soient réfléchis. Le raffinement en paroi est quant à lui défini afin de résoudre avec 20 points une couche limite dont l'épaisseur de quantité de mouvement δ_θ vérifie $\delta_\theta/D = 0.05$.

Après avoir installé l'écoulement dans le domaine, les grandeurs instantanées ont été stockées sur les surfaces acoustiques pendant 60ms, soit un temps adimensionné $T = 360D/U_j$. Le pas de temps Δt de la simulation durant la phase de stockage a été choisi afin de satisfaire au critère $CFL < 1$ pour toutes les mailles, soit $\Delta t = 0.35\mu s$. Chaque calcul a été réalisé en 72 heures sur 64 processeurs et 256 domaines, sur le supercalculateur PLATINE du CCRT.

3.2 Profils de vitesse

Comme dans la plupart des simulations du même type, la sous-discrétisation de la couche de mélange conduit à une surestimation des échelles turbulentes dans cette zone et ainsi réduit la longueur du cône potentiel, défini par la zone où $U > 0.95U_j$. En effet, les valeurs numériques obtenues pour les jets froid et chaud sont respectivement $L_c = 5D$ et $3.9D$, contre $7.1D$ et $5.5D$ expérimentalement. Cependant, les profils adimensionnés sont très comparables aux profils issus des mesures, comme le montre la figure 1.

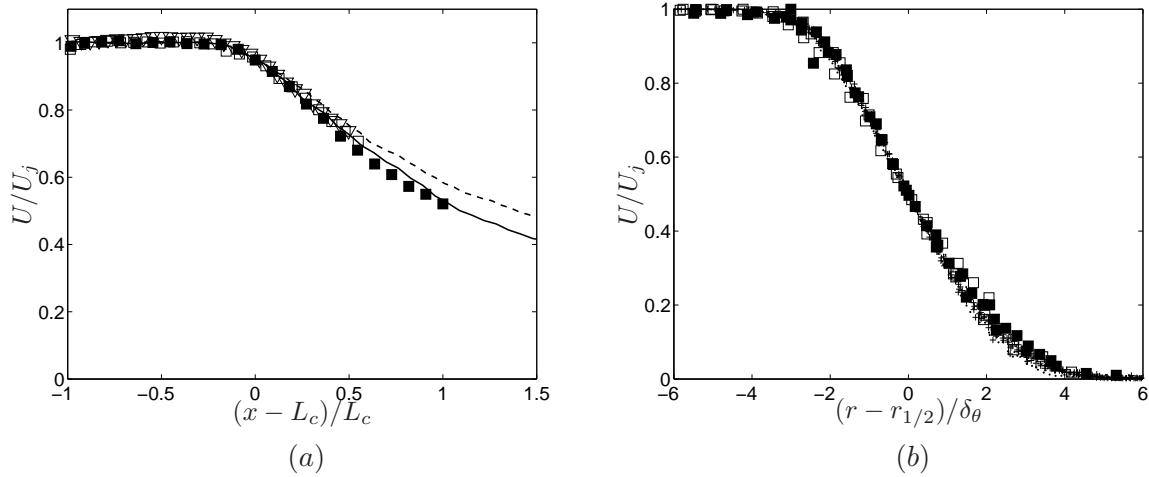


FIGURE 1 – Profils adimensionnés de vitesse axiale. (a) Evolution sur l’axe en fonction de la distance adimensionnée $(x - L_c)/L_c$. SGE : - - - jet1, — jet2, PIV[16] : ∇ jet1, LDV[17] : \square jet1, \blacksquare jet2. (b) Profils radiaux. Entre $x/D = 1$ et 4 pour le calcul (\cdot jet1, $+$ jet2) et en $x/D = 1, 2.5$ et 5 pour les mesures LDV (\square jet1, \blacksquare jet2)

Les différences d’évolution de vitesse sur l’axe entre les jets froid et chaud sont assez bien reproduites par le calcul, et la figure 2 confirme cette observation. Les niveaux turbulents u_{rms}/U_j sont légèrement surestimés mais le comportement est analogue aux résultats expérimentaux. La tension de Reynolds radiale v_{rms}/U_j est quant à elle bien estimée au delà du cône potentiel, mais les écarts entre les deux calculs sont sensiblement plus faibles que ceux relevés expérimentalement.

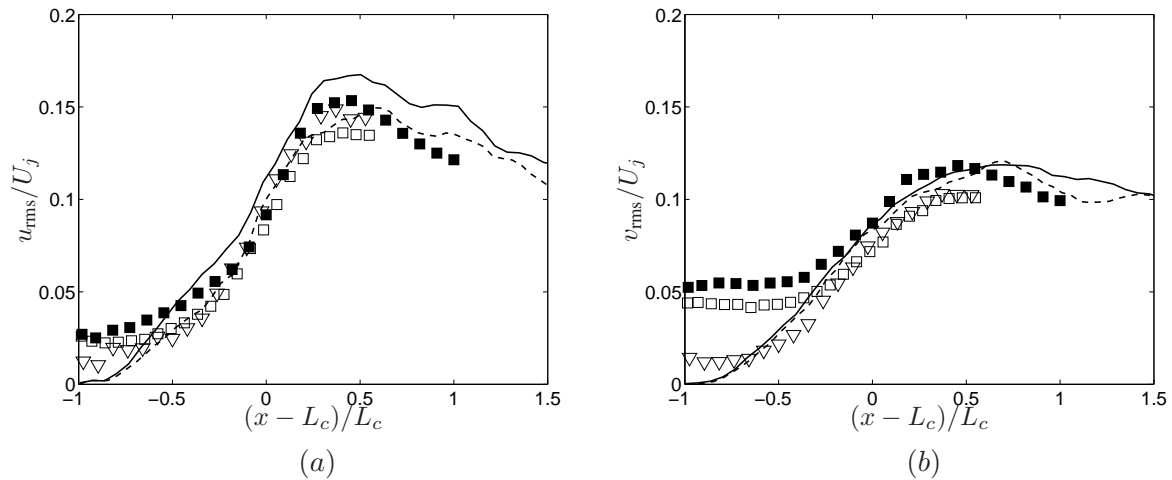


FIGURE 2 – Profils adimensionnés des tensions de Reynolds u_{rms} (a) et v_{rms} (b). Evolution sur l’axe en fonction de la distance adimensionnée $(x - L_c)/L_c$. SGE : - - - jet1, — jet2, PIV[16] : ∇ jet1, LDV[17] : \square jet1, \blacksquare jet2.

3.3 Corrélations et échelles intégrales

Les champs instantanés ont été stockés sur un plan longitudinal au cours du calcul afin d’estimer les corrélations spatio-temporelles de vitesse. Ainsi, les corrélations sur l’axe et dans la couche de mélange ont été calculées jusqu’à $x = 10D$. Celles-ci permettent d’évaluer la vitesse de convection des grosses structures turbulentes ainsi que les échelles intégrales de la turbulence.

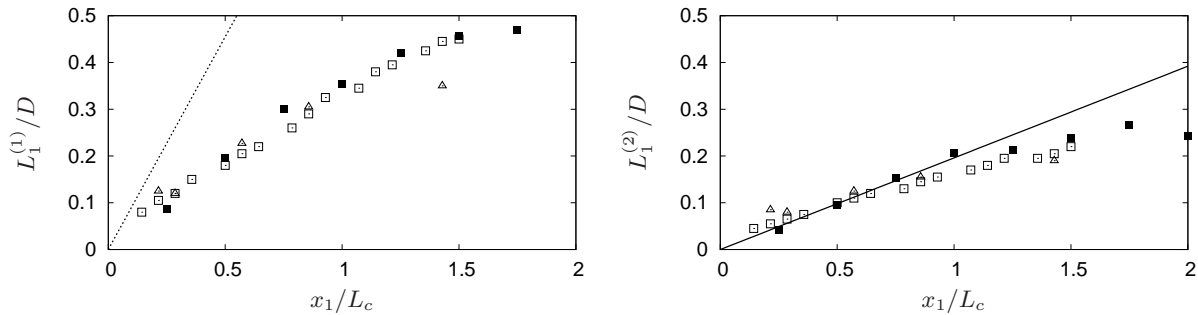


FIGURE 3 – Evolution axiale des échelles intégrales $L_1^{(1)}/D$ et $L_1^{(2)}/D$ dans la couche de mélange ($x_2 = 0.5D$) pour le jet1. ■ SGE, □ Fleury [16], △ Pokora [18], ··· Davies *et al.*[19] ($L_1^{(1)} = 0.13x_1$), — Liepmann *et al.*[20] ($L_1^{(2)} = 0.028x_1$)

On note $L_i^{(j)}$ l'échelle intégrale de la composante i de la vitesse fluctuante suivant la direction j . La figure 3 présente l'évolution axiale dans la couche de mélange des échelles $L_1^{(1)}$ et $L_1^{(2)}$. L'évolution des échelles intégrales, rapportée à la longueur du cône potentiel, est en bon accord avec les mesures expérimentales obtenues notamment par Fleury *et al.* [16].

4 Résultats acoustiques

Les niveaux acoustiques ont été calculés sur un arc de microphones à $30D$ pour les deux jets simulés. La figure 4 met en évidence chacune des contributions calculées et les compare aux mesures expérimentales. On constate que les niveaux acoustiques, représentés en tiers d'octave figure 4 (a), sont surestimés de l'ordre de 3 à 4dB en basses fréquences pour les deux simulations effectuées, tandis que les niveaux en hautes fréquences sont assez représentatifs. Cette surestimation est liée au mélange trop rapide observé dans les calculs, du fait d'un raffinement insuffisant de la couche de mélange. Ceci a pour effet de surévaluer l'intensité turbulente dans cette zone et par conséquent de générer des ondes acoustiques d'intensité supérieure. Le comportement en directivité (figure 4 (b)) est cependant satisfaisant, les tendances observées expérimentalement pour les deux jets étant également mises en évidence par calcul.

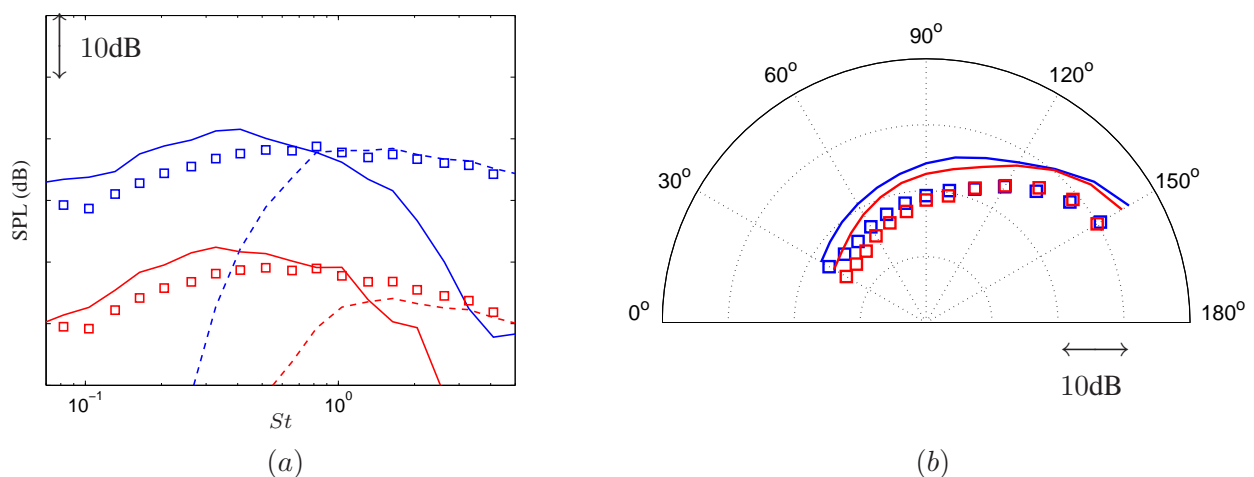


FIGURE 4 – Niveaux acoustiques à $r = 30D$ pour les deux SGE (jet1 et jet2). (a) Spectres acoustiques en tiers d'octave pour $\theta = 120^\circ$. □ mesures, — SPL_{BF} , - - - SPL_{HF} . Les niveaux du jet2 sont représentés avec décalage vertical de $-20dB$. (b) Niveaux acoustiques intégrés en fréquences (OASPL). □ mesures, — méthode hybride.

5 Conclusion

Une méthode de prédiction acoustique a été développée. Cette méthode, combinant les modèles proposés par Ffowcs-Williams&Hawkings et Tam&Auriault, permet une évaluation large bande des niveaux en champ lointain. Deux jets subsoniques ont été calculés par Simulations des Grandes Echelles. Les champs aérodynamiques ont été analysés et les tendances observées sont satisfaisantes, malgré la surestimation du mélange dans la zone de cisaillement. En effet, rapportées à la longueur du cône potentiel, les évolutions des vitesses et échelles intégrales turbulentes sont très proches des mesures expérimentales.

D'un point de vue acoustique, la méthode FWH a été implémentée et s'avère adaptée pour la prévision en basses fréquences, même si les niveaux sont surévalués à cause du raffinement insuffisant du maillage. D'autre part, le modèle du bruit de la turbulence fine de Tam&Auriault a été adapté aux calculs de type SGE, et un filtrage fréquentiel a été mis en oeuvre afin d'éliminer la contribution basses fréquences déjà évaluée. Les prédictions acoustiques obtenues pour les deux jets sont satisfaisantes.

Afin d'évaluer cette méthode sur des géométries plus industrielles, une tuyère confluente a été simulée et les premiers résultats sont encourageants. D'autres tuyères seront également prochainement calculées, afin d'évaluer les capacités de la méthode à prédire les effets acoustiques introduits par la géométrie, par exemple l'ajout de chevrons ou de microjets.

Références

- [1] Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically - I. General theory. In Proc. Roy. Soc. London, volume 211 of *Ser. A*, pages 564–587, 1952.
- [2] Tam C. K. W. and Auriault L. Jet mixing noise from fine-scale turbulence. *AIAA J.*, 37(2), 145–153, 1999.
- [3] Bogey C., Barré S., and Bailly C. Direct computation of the noise generated by subsonic jets originating from a straight pipe nozzle. *International Journal of Aeroacoustics*, 7(1), 1–22, 2008.
- [4] Uzun A., Blaisdell G., and Lyrintzis A. Coupling of integral acoustics methods with LES for jet noise prediction. *AIAA Paper*, (2004-0517), 2004.
- [5] Shur M., Spalart P., and Strelets M. Noise prediction for increasingly complex jets - Part II : Applications. *International Journal of Aeroacoustics*, 4(3), 247–266, 2005.
- [6] Huet M., Vuillot F., and Rahier G. Numerical study of the influence of temperature and micro-jets on subsonic jet noise. Number 2008-3029, Vancouver, Canada, 5-7 may 2008. 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.
- [7] Kirchhoff G. R. Towards a theory of light rays. *Annalen der Physik und Chemie*, 18, 663–695, 1883.
- [8] Ffowcs-Williams J. E. and Hawkings D. L. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. In *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, number 1151 in *Ser. A*, pages 321–342, 1969.
- [9] Tam C. K. W. and Pastouchenko N. N. On the two sources of supersonic jet noise. Number 2003-3163, Hilton head, South Carolina, USA, 12-13 may 2003. 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference.
- [10] Tam C. K. W., Viswanathan K., Ahuja K. K., and Panda J. The sources of jet noise : Experimental evidence. Number 2007-3641. 13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2007.
- [11] Bogey C. and Bailly C. Computation of a high reynolds number jet and its radiated noise using large-eddy simulation based on explicit filtering. *Computers and Fluids*, 35, 1344–1358, 2006.
- [12] Smagorinsky J. S. General circulation experiments with the primitive equations : I. the basic experiment. *Mon. Weath Rev.*, 91, 99–163, 1963.
- [13] Andersson N., Eriksson L., and Davidson L. Large-eddy simulation of subsonic turbulent jets and their radiated sound. *AIAA J.*, 43(9), 1899–1912, 2005.
- [14] Bogey C. and Bailly C. Calcul du bruit d'un jet subsonique à nombre de Reynolds élevé par Simulation des Grandes Echelles. Nice, France, 1-5 septembre 2003. 16ème Congrès Français de Mécanique.
- [15] Lupoglazoff N., Rahier G., and Vuillot F. Application of the CEDRE unstructured flow solver to jet noise computations. ONERA France, 1-6 july 2005. European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS).
- [16] Fleury V., Bailly C., Juvé D., Michard M., and Jondeau E. Space-time correlations in two subsonic jets using dual-PIV measurements. *AIAA J.*, 46(10), 2498–2509, 2008.
- [17] Jordan P. and Gervais Y. Final results from single-point measurements. Technical Report deliverable 3.4, European project Jet Exhaust Aerodynamics and Noise, 2003.
- [18] Pokora C. D. and McGuirk J. J. Spatio-temporal turbulence correlations using high-speed PIV in an axisymmetric jet. Number 2008-3028. 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2008.
- [19] Davies P. O. A. L., Fisher M. J., and Barratt M. J. The Characteristics of the Turbulence in the Mixing Region of a Round Jet. *J. Fluid Mech.*, 15, 337–367, 1963.
- [20] Liepmann H. W. and Laufer J. Investigation of free turbulent mixing. Technical note 1257, NACA, 1947.