



**HAL**  
open science

# Calcul des contraintes pour un matériau granulaire ensilé : comparaison entre les approches discrètes et continus

Jamila Rahmoun, Jérôme Fortin, Olivier Millet

## ► To cite this version:

Jamila Rahmoun, Jérôme Fortin, Olivier Millet. Calcul des contraintes pour un matériau granulaire ensilé : comparaison entre les approches discrètes et continus. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03365693

**HAL Id: hal-03365693**

**<https://hal.science/hal-03365693v1>**

Submitted on 5 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Calcul des contraintes dans un matériau granulaire ensilé : comparaison entre les approches discrètes et continues

Jamila Rahmoun\*, Jérôme Fortin\*\* & Olivier Millet\*\*\*

\* Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR CNRS 8107, Université de Lille 1

\*\* Laboratoire des Technologies Innovantes EA 3899 UPJV - INSSET.

\*\*\* Laboratoire d'Etude des Phénomènes de Transfert Appliqués au Bâtiment, EA 2119 Université de La Rochelle  
jamila.rahmoun@univ-lille1.fr

## Résumé :

Nous proposons dans cette communication de développer une approche analytique, de type milieu continu, pour le calcul des contraintes dans un matériau ensilé. Cette approche, basée sur les équations d'équilibre bidimensionnelles des milieux continus couplées à un critère de Mohr-Coulomb et à une condition de glissement aux parois, a pour objectif d'améliorer la théorie de Janssen et les autres théories existantes du même type. Elle permet de calculer précisément les contraintes en tout point du silo, et ceci quels que soient les paramètres physiques intervenant (angles de frottement, cohésion, taille du silo...). Nous proposons ensuite de comparer les résultats obtenus par l'approche développée, avec ceux obtenus à partir de simulations numériques discrètes réalisées avec le code MULTICOR de type Dynamique des Contacts, ainsi que la théorie de Janssen pour les matériaux non cohésifs.

## Abstract :

We propose in this communication to develop an analytic approach, of continuous medium type, for the computation of the stresses in an ensiled material. This approach, based on the two dimensional equilibrium equations of the continuous media coupled with Mohr-Coulomb criterion and a slip condition at the walls of the silo, has for objective to improve the Janssen theory and the other existing ones of the same type. It enables to compute accurately the stresses in all the silo whatever the physical parameters involved (cohesion, friction angles, silo dimension...). We propose, next, to compare the results given by the developed approach, with the ones given by the discrete numerical simulations achieved with the MULTICOR software, which based on an approach of Dynamic Contacts type. A comparison with Janssen theory for non cohesive materials is performed.

## Mots-clefs :

**Milieux granulaires, Théorie de Janssen, Simulations par Éléments Discrets.**

## 1 Introduction

Un des problèmes importants dans la conception des silos est la prédiction de la distribution de contraintes s'exerçant sur les parois induite par le matériau granulaire stocké. Cette distribution dépend des paramètres du matériau granulaire et de l'écoulement lors du processus de remplissage et de vidange. La modélisation par une approche continue du matériau ensilé permet d'obtenir des modèles simples donnant accès à la valeur des contraintes aux parois [2]. La première partie de cette étude est consacrée au développement d'une approche de type milieu continu qui s'affranchit des limitations de la théorie de Janssen [2] et des approches existantes du même type [5] et permet de calculer les contraintes dans un matériau ensilé [3]. Cette approche permet également de représenter aussi bien qualitativement que quantitativement l'effet d'écrantage caractéristique des matériaux ensilés [4]. Dans une seconde partie, une modélisation du phénomène d'écrantage est effectuée à partir des simulations numériques discrètes réalisées avec le code MULTICOR de type dynamique des contacts [1]. Nous calculons les contraintes

moyennes s'exerçant au niveau des parois lors du remplissage d'un silo par un milieu granulaire polydisperse avec la méthode développée dans [7]. Les résultats des simulations numériques sont alors comparés à ceux obtenus avec l'approche continue développée ici et les états passifs et actifs de Janssen.

## 2 L'approche analytique proposée

Dans cette approche, on identifie le matériau granulaire à un milieu continu vérifiant les équations d'équilibre bidimensionnelles dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$  où les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  correspondent aux axes du silo:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho g \quad (2)$$

On suppose, de plus, que le critère de Mohr Coulomb est atteint aux parois latérales du silo. Ainsi, on a  $s^0 = (p^0 + H) \sin \phi$ , où  $p^0$  et  $s^0$  désignent respectivement le centre et le rayon du cercle de Mohr aux parois,  $\phi$  l'angle de frottement interne et  $\frac{H}{\tan \phi}$  la cohésion du matériau. Si on note  $\alpha = (\vec{x}, \vec{e}_I)$  l'angle entre l'axe  $\vec{x}$  correspondant à la direction horizontale et la direction principale des contraintes  $\vec{e}_I$ , les expressions des contraintes aux parois s'écrivent:

$$\begin{cases} \sigma_x^0 = p^0 + s^0 \cos 2\alpha^0 \\ \sigma_z^0 = p^0 - s^0 \cos 2\alpha^0 \\ \tau_{xz}^0 = s^0 \sin 2\alpha^0 \end{cases} \quad (3)$$

D'autre part, on considère que le matériau granulaire est dans un état de glissement aux parois<sup>1</sup>  $\tau_{xz}^0 = \mu_p \sigma_x^0$ , où  $\mu_p = \tan \phi_p$  est le coefficient de frottement aux parois. Enfin, on restreint notre analyse à un modèle linéaire en cisaillement, où la contrainte aux parois  $\tau_{xz}^0$  vérifie:

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{x}{x_0} \tau_{xz}^0(z) \quad (4)$$

En utilisant (4), l'équation d'équilibre (1) conduit à:

$$\sigma_x = \sigma_x^0(z) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right) x_0 \frac{\partial \tau_{xz}^0}{\partial z} \quad (5)$$

D'autre part, si on considère la condition limite de surface libre de charge en  $z = 0$ , l'équation d'équilibre (2) permet de montrer que  $\sigma_z = \sigma_z^0(z)$  vérifie l'équation d'équilibre de Janssen:

$$\frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z}(z) = \rho g - \frac{1}{x_0} \tau_{xz}^0(z) \quad (6)$$

Pour calculer les contraintes dans tout le silo, on utilise la condition de glissement aux parois ainsi que les relations du cercle de Mohr. On obtient la valeur de  $p^0$ :

$$p^0 = \frac{H \sin \phi (\mu_p \cos 2\alpha^0 - \sin 2\alpha^0)}{\sin \phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p (1 + \sin \phi \cos 2\alpha^0)}$$

1. A la différence de la théorie de Janssen qui suppose un état de glissement en tout point du silo.

et les expressions des contraintes aux parois:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^0 = -\frac{H \sin \phi \sin 2\alpha^0}{\sin \phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p(1 + \sin \phi \cos 2\alpha^0)} \\ \sigma_z^0 = \frac{H \sin \phi(2\mu_p \cos 2\alpha^0 - \sin 2\alpha^0)}{\sin \phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p(1 + \sin \phi \cos 2\alpha^0)} \\ \tau_{xz}^0 = -\frac{\mu_p H \sin \phi \sin 2\alpha^0}{\sin \phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p(1 + \sin \phi \cos 2\alpha^0)} \end{array} \right. \quad (7)$$

où  $\alpha^0$  désigne l'angle  $(\vec{x}, \vec{e}_I)$  au niveau des parois. En remplaçant ces expressions dans (6), on obtient l'équation différentielle suivante d'inconnue  $\alpha^0(z)$ :

$$(2\mu_p \sin 2\alpha^0 + \cos 2\alpha^0 - \sin \phi) \frac{d\alpha^0}{dz} = \frac{D}{2R_h} \left( D \frac{\xi}{2\mu_p \cos \phi} + \sin 2\alpha^0 \right) \quad (8)$$

où  $D = \sin \phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p(1 + \sin \phi \cos 2\alpha^0)$ .

Nous voyons apparaître le nombre sans dimension  $\xi = \frac{2\rho g R_h}{\mu H}$  qui caractérise le rapport entre les effets de la gravité et de la cohésion,  $R_h$  désignant le rayon hydraulique du silo [6]. Deux cas sont possibles. Si la solution  $\alpha^0(z)$  de l'équation (8) est telle que:

- $\alpha^0 < \frac{\pi}{4}$ , alors on adopte la notation classique  $\sigma_I = \sigma_X$  et  $\sigma_{II} = \sigma_Z$ , où la direction principale  $\vec{X}$  est la plus proche de  $\vec{x}$ . Dans ce cas on a  $\sigma_X > \sigma_Z$  et  $\sigma_x^0 > \sigma_z^0$  suivant la relation (3), où  $\sigma_X$  et  $\sigma_Z$  sont les contraintes principales aux parois dans les directions  $\vec{X}$  et  $\vec{Z}$  respectivement. Ceci correspond à l'état passif de la théorie de Janssen.

- $\alpha^0 > \frac{\pi}{4}$ , alors on adopte la notation  $\sigma_I = \sigma_Z$  et  $\sigma_{II} = \sigma_X$ . Dans ce cas on a  $\sigma_X < \sigma_Z$  et  $\sigma_x^0 < \sigma_z^0$  suivant la relation (3). Ceci correspond à l'état actif de la théorie de Janssen.

### 3 Résolution de l'équation différentielle

En premier lieu, on effectue le changement de variable  $u = \tan \alpha^0$  dans le cas  $\phi = \phi_p$ . En posant  $u_0 = \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi}$ , on obtient:

$$D = \sin \phi \sin 2\alpha^0 - \mu_p(1 + \sin \phi \cos 2\alpha^0) = \frac{-\mu(1 - \sin \phi)}{1 + u^2} (u - u_0)^2$$

et l'équation différentielle (8) se met sous la forme suivante:

$$\tilde{k} \frac{(u - u_1)(u - u_2)}{(u - u_0)^2(u - u_5)(u - u_6)} du = dz \quad (9)$$

où l'on a posé  $\tilde{k} = -\frac{2u_0^3 H}{\rho g}$  ainsi que:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_5 = \frac{2u_0}{\xi} \left[ 1 + \frac{\xi}{2} - \sqrt{1 + \xi} \right] \quad , \quad u_1 = \frac{2\mu + \sqrt{4\mu^2 + \cos^2 \phi}}{1 + \sin \phi} \\ u_6 = \frac{2u_0}{\xi} \left[ 1 + \frac{\xi}{2} + \sqrt{1 + \xi} \right] \quad , \quad u_2 = \frac{2\mu - \sqrt{4\mu^2 + \cos^2 \phi}}{1 + \sin \phi} \end{array} \right.$$

La décomposition en éléments simples de (9) conduit à :

$$\tilde{k} \left( \frac{A}{u - u_0} + \frac{B}{u - u_5} + \frac{C}{u - u_6} \right) du = dz \quad (10)$$

$$\text{avec } A = \frac{u_0 - u_2}{(u_0 - u_5)(u_0 - u_6)}, B = \frac{u_5 - u_2}{(u_5 - u_0)(u_5 - u_6)}, C = \frac{u_6 - u_2}{(u_6 - u_0)(u_6 - u_5)}$$

D'autre part, étant donné que  $\sigma_z(z) = \sigma_z^0(z)$ , la condition limite  $\sigma_z(z) = 0$  en  $z = 0$  (surface libre de contraintes) et l'équation (7) permettent de déterminer la valeur  $\alpha_l$  de  $\alpha^0$  en  $z = 0$ :

$$\alpha_l = \frac{1}{2} \arctan(2 \tan \phi)$$

et donc celle de  $u_l = \tan \alpha_l$ . En tenant compte de ces conditions limites, l'intégration de l'équation (10) conduit à :

$$q(u) - q(u_l) = z \quad (11)$$

où  $q(u)$  est définie par :

$$q(u) = \tilde{k} (A \ln |u - u_0| + B \ln |u - u_5| + C \ln |u - u_6|)$$

Compte tenu de l'existence de singularités de la fonction  $q(u)$ , un point sensible est de déterminer l'intervalle de résolution de l'équation (11) à  $z$  fixé. L'une des bornes de cet intervalle est nécessairement  $u_l$  (correspondant à  $z = 0$ ), et l'autre borne correspond à une singularité où la fonction tend vers  $+\infty$ . Une fois les valeurs de  $u(z)$  et de  $\alpha^0(z) = \arctan(u(z))$  déterminées numériquement pour une profondeur  $z$  donnée, on calcule les contraintes en tout point du matériau granulaire ensilé en utilisant d'abord (7), puis (4) et (5).

#### 4 Comparaison avec la théorie de Janssen pour les matériaux non cohésifs

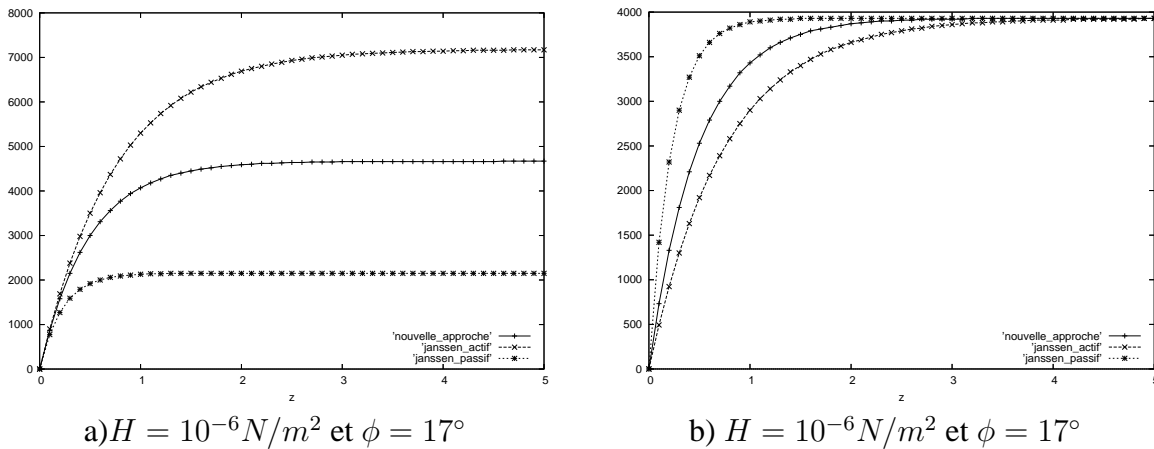


FIG. 1 – Variations des Contraintes verticales suivant  $z$  (en Pa) (fig. a) et des contraintes horizontales suivant  $z$  (en Pa) (fig. b)

On propose maintenant de comparer les résultats de notre approche avec ceux obtenus avec la théorie de Janssen. Les figures (1a) et (1b) représentent les variations des contraintes  $\sigma_x^0$  et  $\sigma_z^0$  obtenus par notre approche pour  $H = 10^{-6} \text{ N/m}^2$ , et par la théorie de Janssen dans le cas actif et passif. On remarque qu'avec notre approche, le matériau est toujours dans un état actif.

De plus, les contraintes  $\sigma_x^0$  et  $\sigma_z^0$  sont encadrées par les états actifs et passifs de Janssen. En particulier la contrainte aux parois  $\sigma_x^0$  est environ 15% supérieure à celle prédite par la théorie de Janssen dans le cas actif. Or, il est connu que dans ce cas, la théorie de Janssen sous-estime les contraintes horizontales aux parois.

## 5 Comparaison entre les approches discrètes et continues

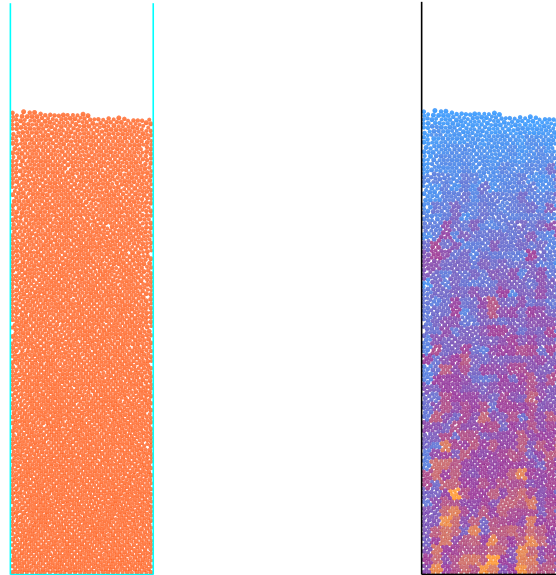


FIG. 2 – Silo rempli de particules soumises à la gravité (à gauche). Calcul des contraintes moyennes après la stabilisation de l'échantillon (à droite).

On propose d'effectuer une simulation numérique discrète de dépôt de particules sous l'effet de la gravité à l'intérieur d'un silo (figure (2)) avec le logiciel MULTICOR. L'objectif est de comparer les contraintes moyennes calculées par Eléments Discrets (avec MULTICOR) avec celles calculées par l'approche continue proposée en première partie.

L'échantillon est préparé en utilisant des particules de rayon compris entre 0.8 et 1cm. La masse volumique est égale à  $1190\text{kg}/\text{m}^3$ . A la fin du remplissage, on calcule les contraintes moyennes au niveau des parois du silo au sein du milieu granulaire. On compare ensuite les résultats obtenus à ceux donnés par l'approche continue développé ici et la théorie de Janssen. Nous proposons d'effectuer le calcul sur un échantillon de 4000 particules en utilisant comme taille de VER un ensemble d'une dizaine de particules. L'ensemble des résultats est représenté à la figure (3).

Il semble que les simulations numériques discrètes effectuées sur des échantillons de 4000 particules concordent assez bien avec les résultats obtenus à partir de l'approche analytique de type milieux continus développée ici. Les résultats obtenus par la simulation discrète sont intermédiaires entre les états passif et actif de la théorie de Janssen.

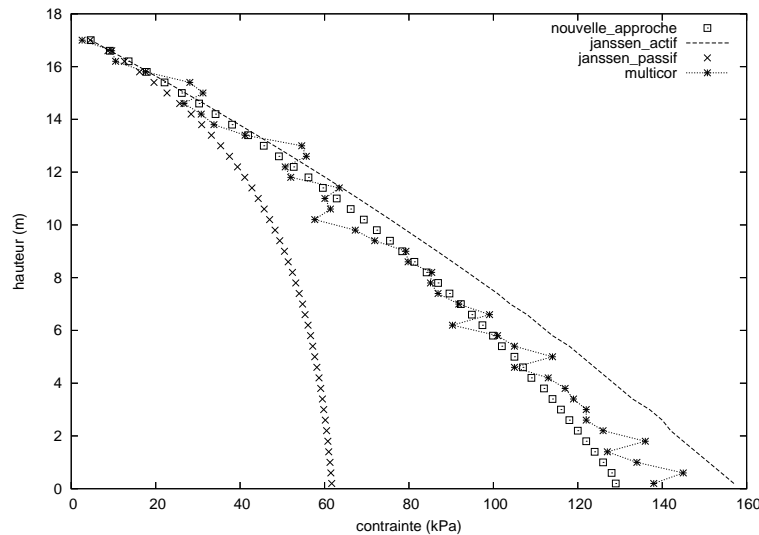


FIG. 3 – Calcul de la contrainte moyenne pour un échantillon de 4000 particules

## 6 Conclusions

L'approche de type milieu continu proposée améliore les approches existantes et en particulier la théorie de Janssen. Cette approche permet de calculer les contraintes en tout point du milieu granulaire ensilé, et ceci quels que soient les paramètres physiques intervenant (angle de frottement interne, angle de frottement aux parois, cohésion...). Des simulations numériques discrètes réalisées avec le logiciel MULTICOR montrent que les contraintes moyennes s'exerçant sur les parois du silo sont intermédiaires à celles prédites par la théorie de Janssen dans les cas actif et passif. Les résultats sont, au contraire, très proches des résultats obtenus à partir de la nouvelle approche de type milieu continu développée.

## Références

- [1] Fortin J., Millet O. et de Saxcé G., *Numerical Simulation of Granular Materials by an improved Discrete Element Method*, Int. J. for Num. Methods in Engineering, n°62, pp. 639-663, 2005.
- [2] Janssen H.A., *Versuche übergetreihedruck in silozellen*, Zeitschrift verein deutscher ingenieur, Vol 39, pp. 1045-1049, 1895.
- [3] Millet O., Rahmoun J. et de Saxcé G., *Analytic calculation of the stresses in an ensiled granular medium*, Comptes Rendus Mécanique, n°334, pp. 137-142, 2006.
- [4] Ovarlez G., Fond C. and Clément E., *Overshoot effect in the Janssen granular Column: A crucial test for granular mechanics*, Physical Revue E, Vol 67, 2003.
- [5] Ragneau E. and Aribert J.M., *Solutions analytiques à divers ordres d'approximation pour le calcul des actions dans les silos cylindriques en phase de remplissage*, Revue de construction métallique, n°1, 1992.
- [6] Rahmoun J., *Modélisation du comportement des matériaux granulaires par des approches discrètes et continues*, Thèse de Doctorat de l'université de Lille 1, 2006.
- [7] de Saxcé G., Fortin J., and Millet O., *About the Numerical Simulation of the Dynamics of Granular Media and the Definition of the Mean Stress Tensor*, Mechanics of Materials, (36) pp. 1175-1184, 2004.