



**HAL**  
open science

# Evaluation de méthodes d'inversion numérique de la transformée de Laplace-Carson pour l'homogénéisation en visco-élasticité linéaire

Amna Rekik, Renald Brenner

► **To cite this version:**

Amna Rekik, Renald Brenner. Evaluation de méthodes d'inversion numérique de la transformée de Laplace-Carson pour l'homogénéisation en visco-élasticité linéaire. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03362544

**HAL Id: hal-03362544**

**<https://hal.science/hal-03362544>**

Submitted on 1 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Evaluation de la méthode de collocation pour l'homogénéisation en viscoélasticité linéaire

A. Rekik<sup>1</sup>, R. Brenner<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, 31 chemin Joseph-Aiguier, 13402 Marseille Cedex 20

<sup>2</sup> Laboratoire des Propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux, Université Paris Nord, avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse

### Résumé :

*L'évaluation du comportement effectif de matériaux hétérogènes viscoélastiques linéaires peut se faire en utilisant le principe de correspondance et en effectuant une inversion du comportement homogénéisé symbolique obtenu. Différentes méthodes numériques ont été proposées pour effectuer cette inversion. La méthode de collocation, largement utilisée, dans ce cadre repose sur une discrétisation du spectre caractéristique en une somme de raies discrètes dont il faut déterminer les intensités et les positions en minimisant l'écart entre la fonction temporelle originale et son approximation. La méthode classique consiste à fixer les positions des raies et optimiser les intensités. On montre ici que l'optimisation conjointe des positions et des intensités (positives) conduit à un problème de minimisation sous contraintes. Dans le cas simple d'un matériau biphasé isotrope incompressible, cette méthode est confrontée à des solutions analytiques pour la fonction de relaxation effective ainsi qu'à la méthode de collocation classique. Dans le cas d'un spectre continu ou d'un spectre constitué d'un ensemble de raies discrètes, la méthode proposée présente une amélioration par rapport à la méthode classique. Pour les différents cas considérés (contraste entre les phases, fraction volumique de constituants), un faible nombre de points de collocation, même avec l'approche classique, conduit à un bon accord avec la solution analytique. Le gain croît avec l'intervalle de temps que l'on choisit pour la répartition des points de collocation plus particulièrement dans le cas d'un spectre constitué d'un ensemble de raies discrètes.*

### Abstract :

*The effective behaviour of linear viscoelastic heterogeneous material can be derived from the correspondence principle and the inversion of the obtained symbolic homogenized behavior. Various numerical methods were proposed to carry out this inversion. The collocation method, widely used, within this framework rests on a discretization of the characteristic spectrum in a sum of discrete lines for which it is necessary to determine the intensities and the positions by the minimization of the difference between the exact temporal function and its approximation. The classical method is based on a priori choice of the lines positions and on the optimization of their intensities. It is shown here that the combined optimization of the positions and the (positive) intensities lead to a minimization problem under constraints. In the simple case of an incompressible isotropic two-phase material, this method is confronted with the analytical solutions of the effective relaxation function and the classical collocation method. In the case of a continuous spectrum or a spectrum made up of a whole of discrete lines, the proposed method improves the predictions of the classical approach. For the various cases considered (ratio of the phases relaxation times, volume fraction of the components), a low number of the collocation points, even with the classical approach, lead to a good agreement with the analytical solution. The profit increases with the chosen interval time for the distribution of the collocation points especially for a spectrum made up of a whole of discrete lines.*

### Mots-clefs :

**homogénéisation ; viscoélasticité ; transformée de Laplace**

## 1 Contexte

Cette étude s'inscrit dans le cadre de la prévision du comportement global de matériaux hétérogènes dont les constituants sont viscoélastiques linéaires sans vieillissement. Suivant le principe de superposition de Boltzmann, la loi de comportement local s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t \mathbf{C}(t - \tau) d\boldsymbol{\varepsilon}(\tau) \quad \text{ou bien} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \int_0^t \mathbf{S}(t - \tau) d\boldsymbol{\sigma}(\tau), \quad (1)$$

avec  $\mathbf{C}(t)$  le tenseur des modules viscoélastiques (i.e fonction de *relaxation*) et  $\mathbf{S}(t)$  le tenseur des souplesses viscoélastiques (i.e fonction de *fluage*). Classiquement, l'évaluation du comportement effectif de ce type de matériaux repose sur trois étapes : (i) la transformation du problème viscoélastique en un problème élastique symbolique en utilisant le principe de correspondance, (ii) la détermination du comportement effectif symbolique à l'aide des outils d'homogénéisation linéaire classiques et (iii) l'inversion du comportement homogénéisé symbolique pour obtenir l'expression de la fonction de relaxation ou de fluage global du milieu hétérogène.

A l'exception de cas simples, pour lesquels il est possible d'effectuer analytiquement cette inversion en calculant l'intégrale de Bromwich (inversion de la transformée de Laplace), cette dernière étape doit être réalisée de manière approchée numériquement. La plupart des travaux effectués dans ce cadre repose sur un développement en série des fonctions temporelles recherchées. On peut notamment citer la méthode de collocation (Schapery, 1962) et une de ces extensions, la méthode multidata (Cost and Becker, 1970). D'un point de vue pratique, ces méthodes reposent sur un choix *a priori* de temps de relaxation (retard) et nécessitent la résolution d'un système linéaire pour déterminer les coefficients de la série approchant la fonction de relaxation (fluage). Néanmoins, elles n'imposent pas de conditions sur ces coefficients alors qu'une description physique des modules (souplesses) viscoélastiques nécessite des coefficients positifs. Différentes méthodes ont été proposées pour pallier cette difficulté (e.g., Emri and Tschoegl, 1995; Bradshaw and Brinson, 1997), mais elles se fondent toujours sur un choix préliminaire « adéquat » de temps de relaxation (fluage).

Le présent travail porte sur une évaluation de la méthode de collocation, utilisée en homogénéisation (Laws and McLaughlin, 1978), en considérant un cadre plus général pour approcher la fonction effective de relaxation ou de fluage. Pour cela, nous rappelons tout d'abord l'approximation des modules et souplesses viscoélastiques en séries de Dirichlet et nous présentons la démarche mise en oeuvre pour représenter « au mieux » la fonction originale. Pour évaluer cette méthode, nous considérons ensuite le cas d'un matériau biphasé isotrope incompressible pour lequel des expressions analytiques du comportement effectif existent. Ceci nous permet notamment de discuter les cas de spectres continus ou constitués de raies discrètes et leur conséquence sur la procédure mise en oeuvre.

## 2 Développement en séries de Dirichlet des propriétés viscoélastiques

### 2.1 Principe

En utilisant la thermodynamique des processus irréversibles, Biot (1954) a montré que dans le cas général le tenseur des souplesses viscoélastiques linéaires s'écrit

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}^e + \mathbf{S}^v t + \int_0^{+\infty} \mathbf{J}(\tau)(1 - e^{-t/\tau}) d\tau \quad (2)$$

avec  $\mathbf{J}(t)$  le spectre de fluage (ou de retard) du matériau. Le tenseur des souplesses élastiques  $\mathbf{S}^e$  et visqueuses  $\mathbf{S}^v$  caractérisent le comportement du matériau, respectivement, en  $t = 0$  et

$t = +\infty$ . Le tenseur des modules viscoélastiques s'écrit

$$\mathbf{C}(t) = \int_0^{+\infty} \mathbf{G}(\tau) e^{-t/\tau} d\tau \quad (3)$$

avec  $\mathbf{G}(t)$  le spectre de relaxation du matériau. Chaque spectre caractéristique, a priori inconnu, est approché par une somme de raies discrètes positionnées en  $n$  temps de relaxation ou de retard  $\tau_r$ . La fonction de relaxation  $\mathbf{C}(t)$  ainsi que la partie transitoire de la fonction de fluage  $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}(t) - \mathbf{S}^e - \mathbf{S}^v t$  sont donc approchées par

$$\mathbf{C}^*(t) = \sum_{r=1}^n \mathbf{G}_r e^{-t/\tau_r}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^*(t) = \sum_{r=1}^n \mathbf{J}_r (1 - e^{-t/\tau_r}). \quad (4)$$

$\mathbf{G}_r$  et  $\mathbf{J}_r$  sont les intensités respectives des fonctions  $\mathbf{C}^*(t)$  et  $\mathbf{S}^*(t)$ .

## 2.2 Mise en oeuvre

La détermination des coefficients et des temps de la série s'effectue en minimisant l'erreur quadratique  $E$  entre les fonctions exactes et approchées. Pour la fonction de relaxation, on a

$$E = \int_0^{\infty} [\mathbf{C}(t) - \mathbf{C}^*(t)]^2 dt \quad (5)$$

dont la minimisation ( $\partial E / \partial \mathbf{G}_r = 0$  et  $\partial E / \partial \tau_r = 0$ ) conduit à

$$\hat{\mathbf{C}}(p_r) = \hat{\mathbf{C}}^*(p_r) \text{ et } \left. \frac{d\hat{\mathbf{C}}(p)}{dp} \right|_{p_r} = \left. \frac{d\hat{\mathbf{C}}^*(p)}{dp} \right|_{p_r} \text{ avec } p_r = 1/\tau_r, \forall r = 1, \dots, n \quad (6)$$

où  $\hat{\cdot}$  indique la transformée de Laplace. Avec (4), on a donc

$$\hat{\mathbf{C}}^*(p_r) = \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i \frac{1}{p_i + p_r} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\hat{\mathbf{C}}^*(p)}{dp} \right|_{p_r} = - \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i \frac{1}{(p_i + p_r)^2} \quad (7)$$

Pour un nombre de termes fixés de la série de Dirichlet, la meilleure approximation de la fonction originale est donc obtenue lorsque les transformées de Laplace et leurs dérivées sont égales en  $n$  points  $p_r$ . D'un point de vue pratique, il est donc nécessaire de connaître la transformée de Laplace, ainsi que la dérivée de la transformée, de la fonction temporelle originale aux différents points de collocation. On peut noter que la méthode de collocation classique, reposant sur un choix préalable des points  $p_r$ , correspond à la première égalité qui définit un système linéaire permettant de déterminer les coefficients. Les deux égalités obtenues constituent un système non linéaire de  $2n$  équations (pour chaque composante du tenseur des modules viscoélastiques) à  $2n$  inconnues. Par ailleurs, il est nécessaire d'introduire des contraintes pour sa résolution :

- les coefficients  $\mathbf{G}_r$  doivent être positifs,
- les temps de collocation  $\tau_r$  doivent être compris dans un intervalle  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ ,
- la fonction de relaxation doit être égale au module élastique en  $t = 0$ .

Le système non linéaire peut s'écrire sous la forme d'un problème de minimisation sous contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{G}_r, \tau_r} \left[ \sum_{r=1}^n \left( \hat{\mathbf{C}}(p_r) - \hat{\mathbf{C}}^*(p_r) \right)^2 + \sum_{r=1}^n \left( \left. \frac{d\hat{\mathbf{C}}(p)}{dp} \right|_{p_r} - \left. \frac{d\hat{\mathbf{C}}^*(p)}{dp} \right|_{p_r} \right)^2 \right] \\ \text{avec } \mathbf{G}_r \geq 0, \tau_{\min} \leq \tau_r \leq \tau_{\max}, \sum_{r=1}^n \mathbf{G}_r - \mathbf{C}^e = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

De la même manière, on peut construire le problème de minimisation associé à la partie transitoire de la fonction de fluage  $\tilde{\mathbf{S}}$  qui prend la même forme sans la contrainte sur le comportement en  $t = 0$ . Nous nous limiterons ici à la fonction de relaxation. Pour résoudre le problème de minimisation, nous utilisons une implémentation de l'algorithme de Shor (Solvopt) qui permet d'envisager l'optimisation de fonctions non lisses (cas d'un problème sous contraintes par exemple).

### 3 Estimations analytiques du comportement effectif d'un composite biphasé

Afin d'évaluer la procédure numérique d'inversion proposée ci-dessus, nous considérons le comportement effectif d'un matériau biphasé isotrope incompressible dont les phases sont maxwelliennes. Le comportement local d'une phase ( $i$ ) s'écrit donc

$$\mathbf{S}_i(t) = (m_i^e + m_i^v t) \mathbf{K} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}(t) = 2\mu_i^e e^{-t/\tau_i} \mathbf{K} + \infty \mathbf{J} \quad \text{avec} \quad \tau_i = m_i^e/m_i^v, \quad 2\mu_i^e = 1/m_i^e. \quad (9)$$

$\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  sont les projecteurs isotropes respectivement sphérique et déviatorique,  $m_i^e$  et  $m_i^v$  représentent les souplesses élastiques et visqueuses,  $\mu_i^e$  le module de cisaillement élastique et  $\tau_i$  est le temps de relaxation caractéristique de la phase ( $i$ ). Le comportement effectif de ce matériau composite est donc entièrement défini par la fonction scalaire  $\tilde{\mu}(t)$ .

En utilisant la transformation de Laplace-Carson, la loi de comportement local (1) devient une loi élastique symbolique avec pour module de cisaillement  $\mu_i^*(p) = p/[2m_i^e(p + 1/\tau_i)]$ . Une estimation du module de cisaillement effectif symbolique peut donc être obtenue avec un schéma d'homogénéisation linéaire classique. L'expression temporelle du module de cisaillement est ensuite obtenue en effectuant l'inversion de Laplace-Carson du résultat symbolique.

Pour les estimations de Mori-Tanaka et du modèle autocohérent, l'expression analytique du module de cisaillement peut être obtenue. Suivant le modèle de Mori-Tanaka avec la phase 2 inclusionnaire, on a

$$\tilde{\mu}^{MT}(t) = \frac{b^e}{2a^v m_1^v (\tau_1 - \tau')} \left[ \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_1} \right) e^{(-t/\tau_1)} - \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'} \right) e^{(-t/\tau')} \right] \quad (10)$$

avec  $\tau' = \tau_1 \cdot (2c_1 + (5 - 2c_1) \frac{\tau_2}{m_1^e/m_2^v}) (2c_1 + (5 - 2c_1) \frac{\tau_1}{m_1^e/m_2^v})$ ,  $a_v = 5m_2^v - 2c_1(m_2^v - m_1^v)$ ,  $b^e = 5m_1^e + 3c_1(m_2^e - m_1^e)$  et  $c_i$  la fraction volumique de la phase ( $i$ ). Le spectre de relaxation suivant ce modèle est donc constitué de deux raies discrètes.

Pour le modèle autocohérent, Beurthey and Zaoui (2000) ont montré que le spectre de relaxation du module de cisaillement est constitué de deux raies discrètes et d'une partie continue bornée de la forme

$$G^{AC}(\tau) \propto \frac{\tau_1 \tau_2}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}} \frac{\sqrt{(\tau - \theta_1)(\theta_2 - \tau)}}{\tau(\tau - \tau_1)(\tau_2 - \tau)} \quad (11)$$

avec  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les bornes de l'intervalle. Pour l'expression explicite du module de cisaillement, on pourra se reporter à (Beurthey and Zaoui, 2000). L'expression intégrale du module de cisaillement a ici été évaluée numériquement.

La méthode d'inversion par collocation peut donc être confrontée à ces deux résultats analytiques qui diffèrent essentiellement par le fait que le modèle autocohérent implique un spectre de relaxation continu. Le comportement local étant isotrope incompressible, le système non linéaire (8) défini dans un cadre général (tensoriel) se réduit ici à un système pour une fonction de relaxation scalaire.

## 4 Résultats et discussion

La méthode de collocation « optimisée » est comparée à la méthode de collocation classique (choix préalable des temps de relaxation) ainsi qu'aux résultats exacts pour la fonction de relaxation suivant les modèles autocohérent (figures (a), (b)) et de Mori-Tanaka (figures (c),(d)). Pour les figures (a) et (c), les temps de relaxation  $\tau_r$  ( $r = 1, \dots, n$ ) caractéristiques de la méthode de collocation sont répartis sur un intervalle qualifié dans la suite de « minimal »  $[\tau_{min}, \tau_{max}] = [\min(\tau_i), \max(\tau_i)]$ ,  $\tau_i$  est le temps de relaxation caractéristique de la phase  $i$ . Les figures (c) et (d) correspondent à une collocation pour laquelle les temps de relaxation appartiennent à un intervalle plus « large » que l'intervalle « minimal ». Pour des temps de relaxation situés dans l'intervalle « minimal », les résultats montrent que pour un faible nombre de points ( $n \geq 3$ ), la méthode de collocation classique et « optimisée » conduit à un bon accord avec la solution analytique caractérisée soit par un spectre continu (figure (a)) ou un spectre discret (figure (c)). Pour des temps de relaxation répartis dans un intervalle « large », la méthode de collocation « optimisée » avec un faible nombre de points ( $n \geq 8$ ) améliore les résultats de la collocation classique. L'intérêt de la collocation « optimisée » s'accroît dans le cas d'une fonction de relaxation caractérisée par un spectre constitué de raies discrètes. Pour un intervalle « large » et avec un nombre de points élevé ( $n \geq 20$ ), la collocation classique conduit à des estimations en bon accord avec la solution exacte. Dans le cas contraire (faible nombre de points), la collocation classique peut fournir des estimations négatives (figure (d)).

## Références

- Beurthey, S., Zaoui, A., 2000. Structural morphology and relaxation spectra of viscoelastic heterogeneous materials. *Eur. J. Mech. A/Solids* 19, 1–16.
- Biot, M. A., 1954. Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena. *J. Appl. Phys.* 25 (11), 1385–1391.
- Bradshaw, R. D., Brinson, L. C., 1997. A sign control method for fitting and interconverting material functions for linearly viscoelastic solids. *Mech. Time Dep. Matls.* 1, 85–108.
- Cost, T. L., Becker, E. B., 1970. A multidata method of approximate laplace transform inversion. *Int. J. Num. Meth. Engng* 2, 207–219.
- Emri, I., Tschoegl, N. W., 1995. Determination of mechanical spectra from experimental responses. *Int. J. Solids Struct.* 32, 817–826.
- Laws, N., McLaughlin, R., 1978. Self-consistent estimates for the viscoelastic creep compliances of composite materials. *Proc. R. Soc. Lond.* A359, 251–273.
- Schapery, R. A., 1962. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. In : *Proc. U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. ASME 4th. Vol. 2.* pp. 1075–1085.

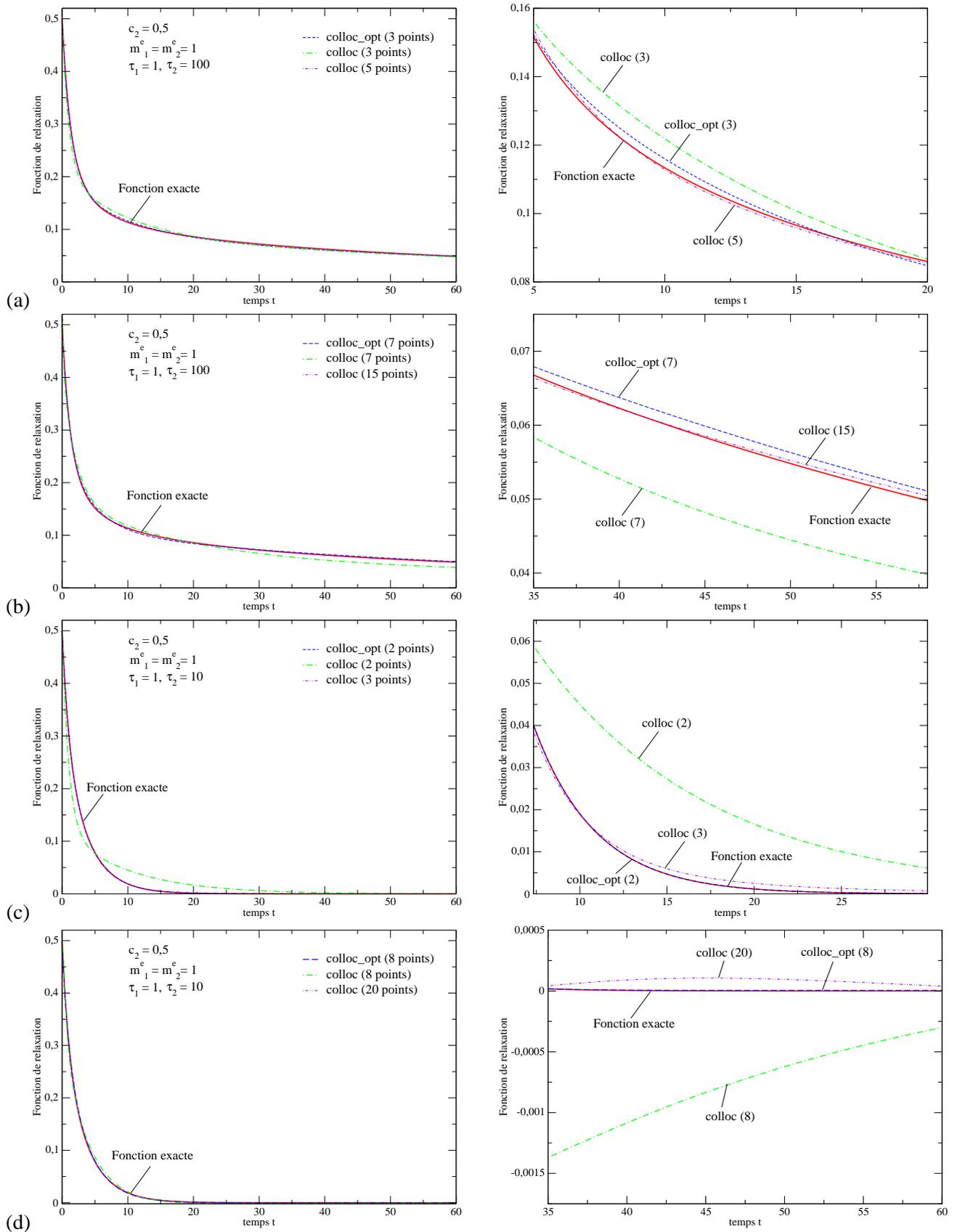


FIG. 1 – Evolutions temporelles du module de cisailment effectif d'un matériau biphasé incompressible isotrope dont les constituants sont visco-élastiques linéaires. Comparaison du calcul exacte et de l'inversion par collocation classique et « optimisée » pour le modèle autocohérent ((a), (b)) et le modèle de Mori-Tanaka ((c), (d)).