



HAL
open science

Calibration de modèles réduits POD pour le contrôle d'écoulements décollés

Julien Favier, Laurent Cordier, Azeddine Kourta

► **To cite this version:**

Julien Favier, Laurent Cordier, Azeddine Kourta. Calibration de modèles réduits POD pour le contrôle d'écoulements décollés. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03362377

HAL Id: hal-03362377

<https://hal.science/hal-03362377>

Submitted on 1 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Calibration de modèles réduits POD pour le contrôle d'écoulements décollés

Julien Favier⁽¹⁾, Laurent Cordier⁽²⁾ & Azeddine Kourta⁽³⁾

⁽¹⁾ DICAT, Università di Genova, 1 via Montallegro, 16145 Genova, Italie

⁽²⁾ Laboratoire d'Études Aérodynamiques, CNRS UMR 6609, 43, rue de l'Aérodrome, 86036 Poitiers cedex

⁽³⁾ Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, Allée du professeur Camille Soula, 31400 Toulouse
Julien.Favier@unige.it

Résumé :

L'objectif de ce travail est de construire par POD (« Proper Orthogonal Decomposition ») des modèles d'ordre réduit permettant de reproduire de manière fiable la dynamique spatio-temporelle d'un écoulement décollé. L'intérêt croissant pour ces modèles réduits de dynamique s'explique par leur utilisation potentielle dans la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes de grande taille, rencontrés en contrôle d'écoulements. La démarche générale consiste à remplacer le modèle détaillé de l'écoulement (les équations de Navier-Stokes), par un modèle approché, plus rapide à résoudre et contenant les caractéristiques essentielles de la dynamique. La POD, optimale au sens de la reconstruction énergétique, permet d'approximer cette dynamique dans un sous-espace généré par un petit nombre de modes. Différentes méthodes de calibration sont ici développées afin d'améliorer la prédiction du modèle réduit. Essentiellement, ces méthodes consistent à ajouter aux équations du modèle des termes supplémentaires calculés comme solutions d'un problème de minimisation sous contraintes.

Abstract :

The objective of this work is to construct, using POD (Proper Orthogonal Decomposition), reduced-order models able to accurately reproduce the spatio-temporal dynamics of separated flows. The growing interest concerning these models comes from their potential use in the resolution of large scale constrained optimization problems, in the context of flow control. The general approach consists in substituting the detailed model of Navier-Stokes equations for an approximated model, cheaper to compute and capturing the essential features of the dynamics. POD, which is the optimal decomposition in terms of energy, allows to approximate the flow dynamics in a subspace spanned by a few number of modes. Different calibration methods are developed here in order to improve the accuracy of this approximation. The idea is to determine auxiliary parameters in the equations of the model, computed by resolving appropriate constrained minimization problems.

Mots-clefs :

modèles réduits POD ; calibration ; contrôle d'écoulements

1 Introduction

Dans le but de supprimer ou retarder le décollement de couche limite, il est fondamental de déterminer des lois de contrôle optimales, afin de construire des actionneurs appropriés, et ayant le meilleur rendement énergétique. La résolution d'un tel problème d'optimisation est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle représentative du décollement (vorticité par exemple) par rapport à certains paramètres de contrôle (débit ou fréquence d'un actionneur de soufflage par exemple), sous les contraintes des équations de Navier-Stokes. La difficulté majeure de cette approche réside dans la procédure itérative utilisée généralement pour résoudre le problème de contrôle optimal. En effet, les équations de la dynamique (Navier-Stokes) doivent alors être résolues un grand nombre de fois, ce qui s'accompagne *in fine* de coûts numériques prohibitifs. Dans le but de contourner ce problème, la modélisation de dimension réduite constitue un outil puissant permettant une approximation de la dynamique d'un écoulement, sur un espace de

faible dimension, ce qui réduit considérablement les temps de calculs et les stockages mémoires nécessaires à la mise en œuvre de telles méthodes.

Dans cette optique de compression d'informations, la POD permet d'extraire une base de l'écoulement optimale au sens de la reconstruction énergétique. La projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur un nombre fini de modes POD permet alors d'obtenir un système d'équations différentielles ordinaires en temps : le modèle d'ordre réduit POD. La résolution de ce système d'équations donne l'évolution temporelle de la dynamique de l'écoulement restreinte au sous-espace POD, et ce modèle peut alors être utilisé en remplacement des équations de Navier-Stokes dans le cadre de la résolution d'un problème d'optimisation.

En raison de la troncature réalisée dans l'espace des modes, ce modèle réduit de dynamique peut ne pas être suffisamment précis. En effet, les modes POD peu énergétiques d'ordre élevé, qui ont été négligés dans la construction du modèle, jouent un rôle dans la dissipation effectuée aux petites échelles. Afin de corriger ce manque de dissipation inhérent à l'approche POD-Galerkin, des méthodes de calibration sont développées. Essentiellement, des termes de différentes natures (constants, linéaires ou visqueux) sont ajoutés au système afin d'améliorer la qualité de l'approximation de la dynamique de référence. Ces termes sont calculés soit par moindres carrés, soit en résolvant un problème d'optimisation contraint visant à minimiser l'écart entre la dynamique calculée par le modèle et la dynamique de référence, sous réserve que les termes de calibration vérifient les équations du modèle d'ordre réduit POD.

La construction du modèle ainsi que la présentation des différentes méthodes de calibration sont tout d'abord testées sur une dynamique d'écoulement relativement classique : l'écoulement derrière un cylindre circulaire à $Re = 200$, simulé par DNS (code Icare, IMFT). La méthodologie de construction d'un modèle calibré POD d'ordre réduit est ensuite appliquée au cas d'un écoulement décroché autour d'un profil NACA012 à $Re = 5000$, simulé par DNS (code commercial Fluent). Ces deux configurations seront respectivement qualifiées de *cylindre-DNS* et *profil-DNS*.

2 Obtention du modèle POD

Partant d'un jeu de N_t champs spatio-temporels mesurés ou simulés numériquement (vitesse, pression,...), la méthode des snapshots (Bergmann, 2004) permet de déterminer une base POD représentative de ces grandeurs. La vitesse, par exemple, s'exprime au moyen de cette décomposition comme un produit de fonctions propres spatiales $\Phi_i(\mathbf{x})$ et temporelles $a_i(t)$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_m(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_t} a_i(t) \Phi_i(\mathbf{x}), \quad (1)$$

où \mathbf{u}_m représente la vitesse moyennée sur le temps et où $\mathbf{x} \in \Omega$ est la variable d'espace.

Le modèle est ensuite obtenu par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur le sous-espace généré par un faible nombre N_{gal} de modes POD. $(\cdot, \cdot)_\Omega$ étant un produit scalaire de l'espace Ω dans \mathcal{L}^2 , la projection de Galerkin s'écrit :

$$\left(\Phi_i, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{u} \right)_\Omega = \left(\Phi_i, -\vec{\nabla} p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \right)_\Omega. \quad (2)$$

En introduisant la décomposition (1) dans la projection (2), on obtient, après quelques manipulations algébriques, le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \frac{da_i}{dt} = C_i + \sum_{j=1}^{N_{gal}} L_{ij} a_j + \sum_{j=1}^{N_{gal}} \sum_{k=1}^{N_{gal}} Q_{ijk} a_j a_k + \left(\Phi_i, -\vec{\nabla} p \right)_{\Omega}, \\ a_i(0) = \left(\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x}), \Phi_i(\mathbf{x}) \right)_{\Omega}. \end{cases} \quad (3)$$

Les coefficients constants C_i , linéaires L_{ij} , et quadratiques Q_{ijk} dépendent explicitement de Φ , \mathbf{u}_m et de R_e . Selon l'approche classique POD-Galerkin, ces coefficients sont calculés une fois pour toute au début de la procédure. Le système d'équations du modèle POD d'ordre réduit est alors intégré en temps par un schéma Runge-Kutta d'ordre 4, ce qui donne l'évolution temporelle des coefficients $a_i(t)$ prédite par le modèle. Afin de tester la qualité de l'approximation réalisée, les coefficients $a_i(t)$ sont comparés avec les coefficients temporels POD $\hat{a}_i(t)$ directement extraits à partir du jeu de snapshots de référence.

Comme dans la majorité des travaux de la littérature, le terme de pression $\left(\Phi_i, -\vec{\nabla} p \right)_{\Omega}$ est ici simplement négligé. Si les solutions du système (3) sont calculées conformément à l'approche présentée ci-dessus, l'approximation n'est pas parfaite dans le cas *cylindre-DNS*. En effet, comme l'illustre la figure 1, les maxima de référence ont tendance à être surestimés (ce qui est lié au manque de dissipation du modèle) et un léger déphasage en temps apparaît. Globalement, les erreurs d'approximation sont plus marquées sur les coefficients d'ordre élevé.

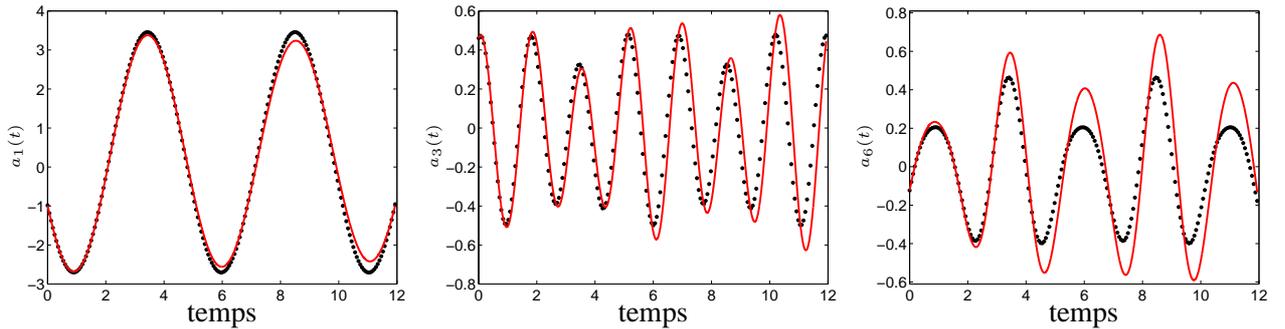


FIG. 1 – Comparaison des coefficients temporels calculés par le modèle réduit sans calibration aux coefficients temporels POD. Cas *cylindre-DNS*. — dynamique temporelle prédite par le modèle réduit POD, ... dynamique temporelle de référence.

Afin d'améliorer l'approximation du modèle, différentes méthodes de calibration sont alors introduites dans le paragraphe suivant, et testées sur le cas *cylindre-DNS*. Une application est ensuite effectuée sur la configuration *profil-DNS*.

3 Procédures de calibration

Le principe est l'ajout de termes supplémentaires dans le système (3). Il est ainsi possible d'ajouter des termes linéaires (Galletti *et al.*, 2004), des termes constants et linéaires (Buffoni *et al.*, 2006), ou des viscosités tourbillonnaires sur chaque mode (Bergmann, 2004). Le paragraphe suivant présente des méthodes de calcul de ces différents termes.

Procédure de moindres carrés

Cette première méthode correspond à une minimisation par moindres carrés de l'écart entre les coefficients temporels a_i calculés par le modèle, et les coefficients temporels POD \hat{a}_i déter-

minés aux instants t_k à partir du jeu de snapshots de référence ($\hat{a}_i(t_k) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_k), \Phi_i) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x})$).
Ce problème peut se ramener à la minimisation de la fonctionnelle \mathcal{I} suivante :

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{N_{gal}} \sum_{s=1}^{N_t} [\hat{a}_i(t_s) - \hat{a}_i(t_s)]^2.$$

Soit C_{ij} un terme linéaire de calibration (par exemple), une expression analytique est alors déduite par annulation de la dérivée $\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial C_{ij}}$. Une simple résolution d'un système linéaire matriciel permet alors le calcul des termes de calibration. La calibration du modèle par des termes linéaires par exemple (Fig. 2), permet de corriger les surestimations des maxima et les déphasages temporelles observés sur la figure 1.

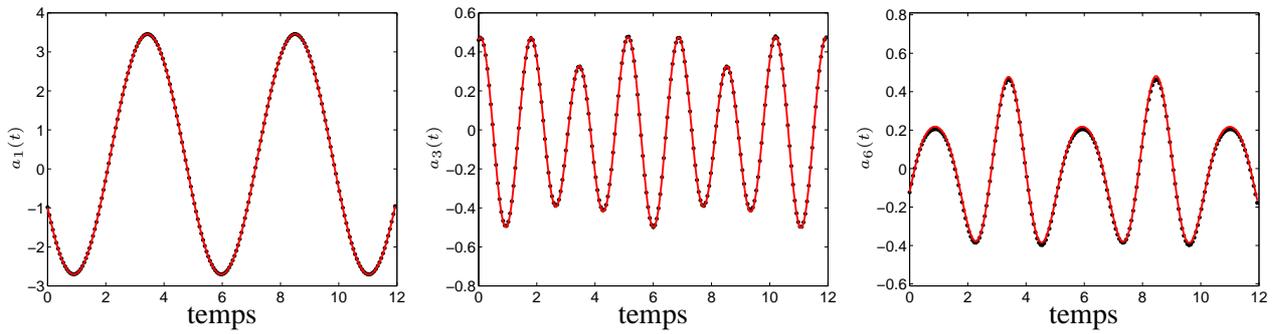


FIG. 2 – Comparaison des coefficients temporels calculés par le modèle réduit calibré aux coefficients temporels POD. Cas *cylindre-DNS*. — dynamique temporelle prédite par le modèle réduit POD, ... dynamique temporelle de référence.

Afin de comparer l'efficacité des différentes formes de termes de calibration, l'erreur d'approximation \mathcal{E}_i est introduite selon la définition suivante : $\mathcal{E}_i = \frac{1}{N_t} \sqrt{\sum_{s=1}^{N_t} (a_i(t_s) - \hat{a}_i(t_s))^2}$. La figure 3 présente les erreurs d'approximation associées aux différentes formes de termes de calibration. Les meilleurs résultats sont obtenus dans le cas où la calibration est effectuée par ajout de termes constants et linéaires. En effet, par rapport à l'ajout d'une viscosité sur chaque mode, les termes linéaires C_{ij} prennent en compte les interactions intermodales par l'intermédiaire des termes non diagonaux. A partir de maintenant, les méthodes de calibration seront basées sur l'introduction de termes constants et linéaires.

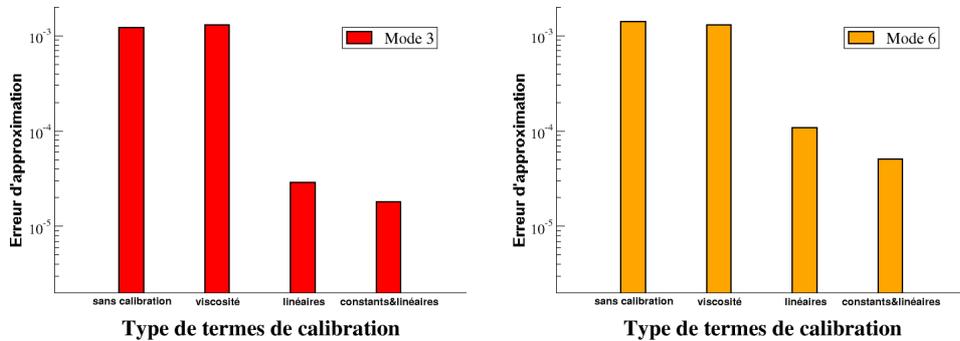


FIG. 3 – Variation de l'erreur d'approximation selon la forme des termes de calibration utilisés dans le cas *cylindre-DNS*.

Procédure d'optimisation sous contraintes

Bien que la précédente méthode fournisse des résultats très bons dans le cas *cylindre-DNS*, il peut être nécessaire, dans le cas de configurations d'écoulements plus complexes, de faire appel à une méthode mathématiquement plus rigoureuse (optimisation sous contraintes). Soit T l'instant de fin de la simulation, le principe consiste à déterminer les termes de calibration C_{ij} qui minimisent la fonctionnelle \mathcal{J} suivante :

$$\mathcal{J}(a_i, C_{ij}) = \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{gal}} [a_i(t) - \hat{a}_i(t)]^2 dt,$$

sous les contraintes des équations (3). Par rapport à la méthode précédente, en plus de reconstruire l'information provenant des observations (\hat{a}_i), on impose aussi de respecter les équations du mouvement, ce qui en fait une méthode plus complète. La résolution de ce problème est effectuée par la méthode des multiplicateurs de Lagrange où les contraintes sont imposées dans la définition d'une nouvelle fonctionnelle \mathcal{L} , par l'intermédiaire de variables adjointes ξ :

$$\mathcal{L}(a_i, C_{ij}, \xi) = \mathcal{J}(a_i, C_{ij}) - \sum_{k=1}^{N_{gal}} \int_0^T \xi_k(t) \mathcal{N}_k(a_i, C_{ij}) dt.$$

Dans cette expression, les contraintes $\mathcal{N}_k(a_i, C_{ij}) = 0$ correspondent à l'équation k du modèle calibré (3). En considérant que chaque variable de \mathcal{L} est indépendante des autres, le système optimal est déterminé en annulant la dérivée de \mathcal{L} par rapport à ξ , a_i et C_{ij} . $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = 0$ donne, par construction de la fonctionnelle, les équations d'état $\mathcal{N}_k(a_i, C_{ij}) = 0$. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_i} = 0$ donne les équations adjointes et on obtient finalement la condition d'optimalité par $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{ij}} = 0$.

Comme il est fait mention dans l'introduction, la résolution du système constitué de ces trois équations est souvent extrêmement lourde numériquement. Cependant, dans ce cas, les équations d'état et adjointes étant restreintes au sous-espace réduit POD, leur résolution est peu coûteuse, allégeant ainsi la procédure globale en termes de temps de calcul.

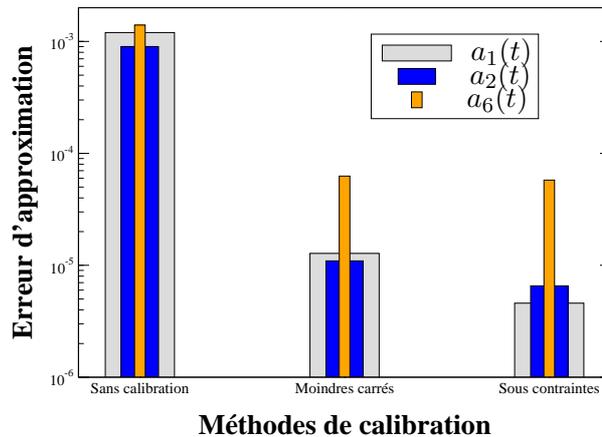


FIG. 4 – Comparaison des erreurs d'approximation obtenues par les différentes méthodes de calibration pour le cas *cylindre-DNS*.

La figure 4 compare différentes méthodes de calibration de termes constants et linéaires. La méthode d'optimisation sous contraintes permet d'obtenir des résultats meilleurs que la procédure par moindres carrés, la différence se faisant essentiellement sur les premiers modes. La

calibration la plus efficace est donc effectuée par ajout de termes constants et linéaires, calculés en résolvant le problème d'optimisation sous contraintes présenté ci-dessus. Cette méthode est appliquée dans le paragraphe suivant au cas d'un écoulement décollé autour d'un profil d'aile.

4 Application et discussion

Ce jeu de snapshots (Fig. 5) simulé par DNS correspond à une configuration décrochée autour d'un profil NACA012 ($R_e = 5000$ et un angle d'attaque de 16°). Le modèle est construit selon l'approche POD-Galerkin et calibré par ajout de termes constants et linéaires, calculés en résolvant un problème de minimisation contraint. Comme l'illustre la figure 6 représentant l'approximation des coefficients $a_5(t)$ et $a_7(t)$, le modèle non calibré se révèle plus instable que le cas *cylindre-DNS*, et tend à diverger aux temps longs. La calibration permet par contre de corriger les erreurs d'approximation et l'on obtient finalement un modèle capable de reconstruire correctement la dynamique temporelle de référence.

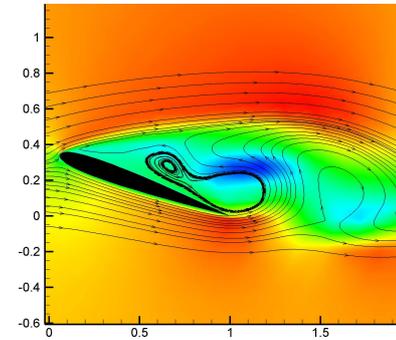


FIG. 5 – Snapshot du cas *profil-DNS*.

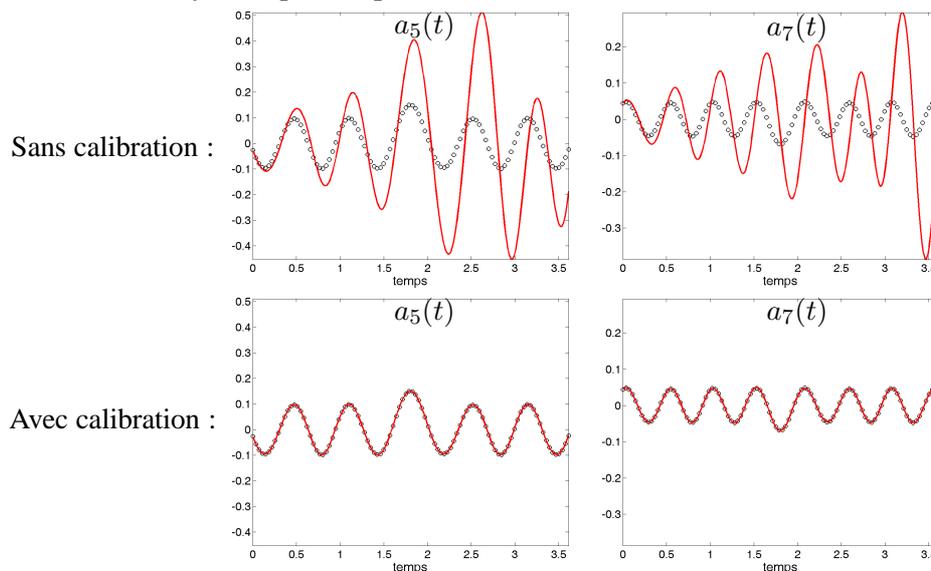


FIG. 6 – Comparaison des coefficients temporels calculés par le modèle réduit avec et sans calibration aux coefficients temporels POD. Cas *profil-DNS*. — dynamique temporelle prédite par le modèle réduit POD, \cdots dynamique temporelle de référence.

Avec ces techniques de calibration, des modèles POD d'ordre réduit peuvent donc reproduire de manière fiable la dynamique d'un écoulement décollé. Ces résultats encourageants permettent d'envisager le calcul de lois de contrôle optimales à partir de ces modèles. Cet aspect constitue la perspective directe de ce travail.

Références

- Bergmann, M. 2004 Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal. Application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire. Thèse de doctorat. *INPL*
- Buffoni, M., Camarri, S., Iollo, A. et Salvetti, M.V. 2006 Low-dimensional modelling of a confined three-dimensional wake flow. *J. Fluid Mech.* **569** 141-150
- Galletti, B., Bruneau, C.-H., Zanetti, L. et Iollo, A. 2004 Low-order modelling of laminar flow regimes past a confined square cylinder. *J. Fluid Mech.* **503** 161-170