



**HAL**  
open science

## Une approche par patches pour les non linéarités localisées en calcul de structures

Julien Pebrel, Pierre Gosselet, Christian Rey

► **To cite this version:**

Julien Pebrel, Pierre Gosselet, Christian Rey. Une approche par patches pour les non linéarités localisées en calcul de structures. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03362364

**HAL Id: hal-03362364**

**<https://hal.science/hal-03362364>**

Submitted on 1 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Approche multiéchelle par patches pour les non-linéarités localisées en calcul de structures

Julien Pebrel, Pierre Gosselet & Christian Rey

LMT-Cachan (ENS de Cachan/CNRS UMR8535/Paris 6 University)  
61, avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX, France  
pebrel@lmt.ens-cachan.fr

### Résumé :

*On présente une méthode de décomposition de domaine avec recouvrement pour la résolution de problèmes d'évolution non linéaire. La décomposition de domaine est introduite via une partition de l'unité appliquée à l'énergie, les conditions de couplage sont imposées par un Lagrangien augmenté sur l'espace de Sobolev  $H^1$ . Le problème non linéaire décomposé est alors condensé sur le recouvrement en introduisant un opérateur d'interface (analogue à l'opérateur de Steklov Poincaré des méthodes sans recouvrement). Le problème d'interface ainsi obtenu est résolu par un algorithme de Newton-Raphson. Des premiers résultats 1D sont présentés, des problèmes plus évolués seront exposés au congrès.*

### Abstract :

*We present here an overlapping domain decomposition method for nonlinear evolution problems. The decomposition is introduced via a partition of the unity applied to the energy. Coupling conditions are imposed by an Augmented Lagrangian on the Sobolev space  $H^1$ . The nonlinear problem is then condensed on the overlap using an interface operator (analogous to the Steklov Poincaré operator of non-overlapping methods). The interface problem is then solved by a Newton-Raphson algorithm. For now, 1D results are given, more evolved problems will be presented at the conference.*

### Mots-clefs :

**Décomposition de domaine ; Patches non linéaires ; Problèmes multimodèles**

## 1 Introduction

Les stratégies de calcul actuelles permettent de résoudre efficacement beaucoup de problèmes mécaniques mais sont encore mises en difficulté par un certain nombre de cas pathologiques souvent déterminants lors de l'étude de la tenue des structures. Par exemple, dans [Cresta et al (2007)] on voit comment l'apparition de micro-flambage dégrade sévèrement la convergence d'une stratégie de type Newton-Schur. Peu de méthodes prennent efficacement en compte la possibilité de non-linéarités localisées. Pourtant dans un grand nombre de cas, le domaine simulé garde un comportement globalement linéaire et les non-linéarités se concentrent dans un petit nombre de zones qu'on qualifiera de zones d'intérêt.

Le traitement classique des problèmes non linéaires se fait souvent par des algorithmes de type Newton (Newton-Raphson, Newton sécant, Newton modifié etc). Le principe de ces méthodes est de travailler sur une succession de problèmes linéaires, par exemple associés à l'opérateur tangent dans le cas de Newton-Raphson. Ces problèmes linéaires sont ensuite résolus par une méthode de décomposition de domaine [Gosselet, Rey (2007)]. L'opérateur calculé est global (i.e. relatif au domaine complet), la convergence de l'algorithme est donc liée à la non-linéarité la plus forte de l'ensemble de la structure. En conséquence, la présence à un endroit d'un phénomène violent va pénaliser l'ensemble de la convergence. Une première difficulté de

ce type de calcul est donc que la convergence des stratégies de calcul non linéaire actuelles est souvent gouvernée par les phénomènes locaux.

La seconde difficulté est mieux maîtrisée aujourd'hui : il s'agit du problème du maillage. Une bonne résolution implique une finesse de maillage importante dans certaines zones et un temps de calcul raisonnable impose un maillage grossier dans les zones où des phénomènes moins violents se déroulent. De nombreux progrès ont été faits par les maillages actuels mais le compromis entre ces deux critères est toujours difficile à réaliser et demande souvent une expertise humaine importante. De plus, pour les problèmes d'évolution non linéaire, le suivi de la non-linéarité se traduit souvent par un remaillage de la structure.

Les objectifs principaux de la stratégie de calcul que nous développons sont donc de pouvoir découpler autant que possible les zones d'intérêt non linéaires et maillées finement du reste de la structure évoluant linéairement. L'idée principale (soumise dans [Cresta et al (2007)] dans un cas sans recouvrement) de la stratégie est de ramener les itérations non linéaires d'une échelle globale (celle de la structure) vers une échelle plus locale (celle du sous-domaine qui peut être adaptée à celle de la non-linéarité). Pour cela, la sous-structuration et la condensation du problème sont réalisées au niveau non linéaire, avant l'application d'un algorithme de Newton-Raphson.

La technique de décomposition de domaine retenue, présentée dans la section 3, est inspirée des approches Arlequin [Ben Dhia (1998)], [Rateau (2003)] : la décomposition est introduite via une partition de l'unité appliquée à l'énergie, permettant ainsi de découpler naturellement les maillages. Le découplage des non-linéarités, exposé dans la section 4, est effectué en condensant le problème non linéaire sur l'interface à l'aide d'un opérateur non linéaire de Steklov-Poincaré. Le problème ainsi obtenu est alors résolu par une approche de Newton-Raphson, faisant apparaître un problème d'interface tangent et un ensemble de problèmes non linéaires indépendants par sous-domaines.

La stratégie peut être interprétée comme une application de patches locaux non linéaires (chacun associé à un sous-domaine) couplés via leur zone de recouvrement au reste de la structure (représentée également par un sous-domaine). A terme, on pourra envisager, à partir de la détection de l'apparition d'une non-linéarité, de coller sur la zone concernée un modèle suffisamment riche associé à un maillage suffisamment fin, et ainsi capter des informations locales exactes et déterminer leur répercussion sur l'ensemble du domaine sans intervention majeure sur la structure globale du problème.

## 2 Problème de référence

On considère le problème de minimisation suivant, correspondant à la recherche de l'état d'équilibre du domaine  $\Omega$  caractérisé par la densité d'énergie de déformation  $e(\underline{v})$ , soumis à un chargement volumique  $\underline{g}$ , à un chargement extérieur  $\underline{f}$  sur une partie  $\partial_f\Omega$  de son bord  $\partial\Omega$  et à un déplacement imposé  $\underline{w}$  sur la partie complémentaire de  $\partial_f\Omega$  notée  $\partial_u\Omega$  :

$$\text{chercher } \underline{u} \in \mathcal{U} \text{ tel que : } E(\underline{u}) = \min_{\underline{c} \in \mathcal{U}} E(\underline{c}) \text{ avec } E(\underline{u}) = \int_{\Omega} (e(\underline{u}) - \underline{g} \cdot \underline{u}) \, d\Omega - \int_{\partial_f\Omega} \underline{f} \cdot \underline{u} \, d\Gamma$$

Le minimum étant recherché sur l'espace  $\mathcal{U}$  des champs cinématiquement admissibles. On associe à cet espace affine son espace vectoriel  $\mathcal{U}^0$  :

$$\mathcal{U} = \left\{ \underline{u} \in \left( H^1(\Omega) \right)^3, \text{ t.q. } \underline{u} = \underline{w} \text{ sur } \partial_u\Omega \right\}$$

La formulation variationnelle de ce problème, chercher  $\underline{u} \in \mathcal{U}$  tel que  $\nabla_{\underline{u}} E(\underline{u}) \cdot \delta \underline{u} = 0 \quad \forall \delta \underline{u} \in \mathcal{U}_0$ , ne conduit pas dans le cas général où  $e$  n'est pas quadratique, à un problème linéaire. On

résout alors le système par un algorithme de Newton-Raphson, en calculant l'opérateur tangent. La suite de problèmes linéaires associés peut alors être résolue par une méthode de décomposition de domaine sans recouvrement [Gosselet, Rey (2007)]. On propose dans la suite une stratégie basée sur une technique de décomposition de domaine avec recouvrement mieux adaptée au caractère local de certaines non-linéarités.

### 3 Décomposition de domaine avec recouvrement

Dans le cas sans recouvrement on introduit souvent la décomposition de domaine du point de vue géométrique : on utilise la linéarité de l'intégrale par rapport à son domaine d'intégration pour séparer l'énergie totale en contributions locales, puis on utilise les conditions de régularité du problème initial pour en déduire les conditions de raccord à imposer sur l'interface. Cette démarche est équivalente à l'introduction dans l'énergie des fonctions indicatrices des sous-domaines. Partant de cette observation on peut imaginer construire une décomposition à partir de ce qui est parfois considéré comme une généralisation des fonctions indicatrices : les partitions de l'unité. Afin d'introduire la décomposition de domaine on va donc utiliser une partition de l'unité appliquée à l'énergie globale. Les fonctions de la partition de l'unité sont notées  $(\phi_i)_{1..n}$ , le support de  $\phi_i$  est noté  $\Omega_i$ . Ces fonctions vérifient par définition  $\sum_{i=1}^n \phi_i = 1$ , on injecte cette égalité dans la définition de l'énergie et on obtient :

$$E(\underline{u}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\Omega_i} \phi_i \cdot (e(\underline{u}) - \underline{g} \cdot \underline{u}) \, d\Omega - \int_{\partial_f \Omega_i} \phi_i \cdot \underline{f} \cdot \underline{u} \, d\Gamma \right\} = \sum_{i=1}^n E_{\phi_i}(\underline{u}) \quad (1)$$

L'écriture des conditions de raccord nécessite l'introduction d'un certain nombre de notations. Ainsi on note  $\Psi_{ij} = \Omega_i \cap \Omega_j$  l'interface entre les sous-domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ ,  $\Psi_i = \cup_j \Psi_{ij}$  l'interface totale d'un sous-domaine, union de toutes ses interfaces avec les autres sous-domaines et  $\Psi = \cup_i \Psi_i$  l'interface complète, union des interfaces de tous les sous-domaines.

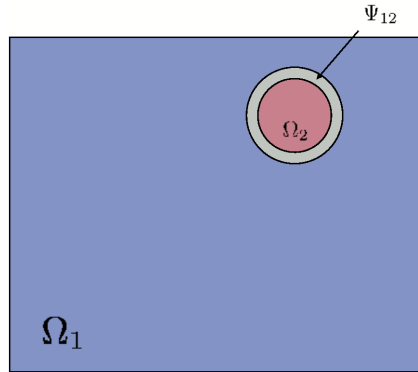


FIG. 1 – Structure  $\Omega_1$ , patch  $\Omega_2$  et recouvrement  $\Psi_{12}$

On introduit un certain nombre d'espaces fonctionnels pour décrire les champs utilisés. On note ainsi  $\mathcal{U}_i$  l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissible du sous-domaine  $\Omega_i$ . L'espace des champs de déplacements de l'interface  $\Psi_i$  est noté  $\mathcal{W}_i$ . Les espaces vectoriels associés sont indicés avec un exposant <sup>0</sup>. Miniser (1) par rapport au champ global  $\underline{u}$  est alors équivalent au problème de minimum sous contraintes sur la famille de champ  $(\underline{u}_i)$  suivant :

$$\min_{\substack{(\underline{u}_i) \in \times \mathcal{U}_i \\ \underline{u}_i = \underline{u}_j \text{ sur } \Psi}} \sum_{i=1}^n E_{\phi_i}(\underline{u}_i) \quad (2)$$

On a ramené le problème initial d'une minimisation sur l'énergie globale à une minimisation sur les énergies locales, sous la contrainte de continuité des champs de déplacement aux interfaces. On introduit alors un déplacement d'interface unique sur  $\Psi$  auquel les champs locaux doivent être égaux [Brezzi, Marini (1993)]. Le raccord est imposé au sens du produit scalaire  $H^1$  modifié pour assurer un "bon" comportement de la stratégie quand le recouvrement tend vers un recouvrement surfacique. On choisit également d'augmenter la contrainte afin d'introduire un aspect mixte dans la stratégie. On verra dans la suite qu'un bon choix de l'opérateur d'augmentation permet d'améliorer les performances de la méthode. On a maintenant affaire à un problème de point selle sur le Lagrangien augmenté :

$$\mathcal{L}^a((\underline{u}_i), \underline{v}, (\underline{\lambda}_i)) = \inf_{\underline{c}} \inf_{\underline{d}} \sup_{\underline{\mu}} \mathcal{L}^a(\underline{c}, \underline{d}, \underline{\mu}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}^a((\underline{u}_i), \underline{v}, (\underline{\lambda}_i)) = \sum_i \mathcal{L}_{\phi_i}^a(\underline{u}_i, \underline{v}, \underline{\lambda}_i) \quad (3)$$

où la contribution de chaque sous-domaine au Lagrangien augmenté s'écrit :

$$\mathcal{L}_{\phi_i}^a(\underline{u}_i, \underline{v}, \underline{\lambda}_i) = E_{\phi}(\underline{u}_i) + \langle \underline{\lambda}_i, \underline{u}_i - \underline{v} \rangle + \frac{1}{2} \|\underline{u}_i - \underline{v}\|^2$$

Avec  $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_{H^1(\Psi)} = \int_{\Psi} \underline{u} \cdot \underline{v} + \nabla \underline{u} : \nabla \underline{v} \, d\Omega$  et  $\langle \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \rangle_{H^1(\Psi)}$  un produit scalaire pondéré (par des opérateurs) équivalent au produit scalaire précédent. On notera  $\|\cdot\|_{H^1(\Psi)}$  la norme associée. Il s'agit donc de trouver  $((\underline{u}_i), \underline{v}, (\underline{\lambda}_i))$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_{\underline{u}_i} E_{\phi_i} \cdot \delta \underline{u}_i + \langle \underline{\lambda}_i, \delta \underline{u}_i \rangle + \langle \langle \underline{u}_i - \underline{v}, \delta \underline{u}_i \rangle \rangle = 0 & \forall \delta \underline{u}_i \in \mathcal{U}_i^0 \\ \sum_i (\langle \underline{\lambda}_i, \delta \underline{v} \rangle + \langle \langle \underline{u}_i - \underline{v}, \delta \underline{v} \rangle \rangle) = 0 & \forall \delta \underline{v} \in \mathcal{W}^0 \\ \langle \underline{u}_i - \underline{v}, \delta \underline{\lambda}_i \rangle = 0 & \forall \delta \underline{\lambda}_i \in \mathcal{W}_i^0 \end{array} \right. \quad (4)$$

## 4 Stratégie de calcul

### 4.1 Condensation non linéaire

Le principe de la condensation est d'écrire un problème équivalent au problème 4 mais posé seulement sur des grandeurs d'interface. L'élimination des équations à l'intérieur des sous-domaines se fait en utilisant le fait que les champs sont solutions du problème initial et vérifient en particulier l'équilibre global. De manière analogue au cas non recouvrant on introduit l'opérateur  $\mathbb{S}_i$  -dit de Steklov Poincaré dans le cas non recouvrant- qui au déplacement d'interface associe l'effort résultant. Dans le cas non recouvrant  $\mathbb{S}_i$  opère de  $H^1(\Psi_i)$  vers son dual  $H^{-1}(\Psi_i)$ .

$$\mathbb{S}_i : H^1(\Psi_i) \longrightarrow H^{-1}(\Psi_i) \\ \underline{v}|_{\Psi_i} \longmapsto \underline{\lambda}_i \quad (5)$$

Après discrétisation et introduction de l'opérateur discret  $P_{i,h}$  de restriction de l'interface  $\Psi$  sur l'interface d'un sous-domaine  $\Psi_i$ , le problème condensé s'écrit dans le cadre de maillages conformes :

$$\sum_i P_{i,h}^T \left( \mathbb{S}_{i,h} \left( P_{i,h} \cdot \underline{v}_{,h} \right) + \mathbb{A}_{i,h} \cdot P_{i,h} \cdot \underline{v}_{,h} \right) = \sum_i \left( P_{i,h}^T P_{i,h} \right) \cdot \underline{b}_{,h} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{S}_h(\underline{v}_{,h}) + \mathbb{A}_h \cdot \underline{v}_{,h} = \underline{b}_{,h} \quad (6)$$

Où  $\mathbb{A}_h$  est l'opérateur symétrique défini positif associé à l'augmentation.

## 4.2 Résolution du problème condensé

On propose de résoudre le problème non linéaire d'interface par une approche classique de Newton-Raphson. On va donc résoudre une succession de systèmes linéaires portant sur l'opérateur tangent. On commence donc par introduire l'opérateur d'interface tangent, noté  $DS_h$ , une itération du solveur de Newton Raphson s'écrit alors :

$$(DS_h^n + \mathbb{A}_h) \cdot \delta \underline{v}_h^n = \mathbb{S}_h^n(\underline{v}_h^n) + \mathbb{A}_h \cdot \underline{v}_h^n - \underline{b}_h \quad \text{et} \quad \underline{v}_h^{n+1} = \underline{v}_h^n + \delta \underline{v}_h^n \quad (7)$$

La résolution de ce problème tangent peut se décomposer en deux sous-problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Problèmes locaux, non linéaires} & \underline{w}_h^n = \mathbb{S}_h^n(\underline{v}_h^n) + \mathbb{A}_h \cdot \underline{v}_h^n - \underline{b}_h \\ \text{Problème global, linéaire} & (DS_h^n + \mathbb{A}_h) \cdot \delta \underline{v}_h^n = \underline{w}_h^n \end{array} \right. \quad (8)$$

Le premier problème (dit « relocalisation non linéaire ») correspond à l'évaluation du résidu d'interface non linéaire. D'après la définition de  $\mathbb{S}$  (somme de contributions locales), il nécessite la résolution de problèmes non linéaires indépendants par sous-domaines. Seule l'évaluation finale du résidu global nécessite des communications interdomaines. Le calcul du second terme correspond à la résolution d'un problème tangent d'interface. La résolution de ce problème est effectuée en utilisant un solveur de Krylov comme pour les méthodes de décomposition de domaine non recouvrantes classiques [Gosselet, Rey (2007)]. Une itération d'un solveur de Krylov nécessite le calcul de produit opérateur-vecteur, opération qui dans le cadre de l'opérateur  $DS$  correspond à la résolution de problèmes linéaires indépendants par sous-domaine et à l'assemblage d'un vecteur d'interface. La stratégie proposée est donc fortement parallélisable.

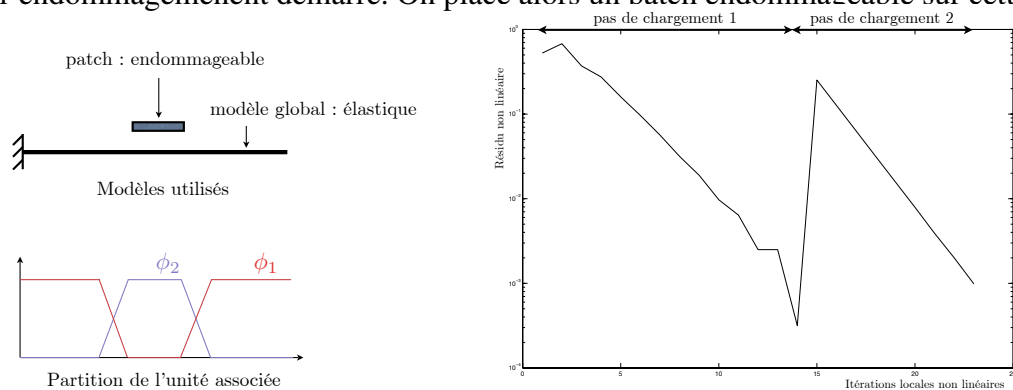
## 4.3 Choix de l'opérateur d'augmentation

L'utilisation d'une stratégie mixte soulève un certain nombre de questions et en particulier le choix de l'opérateur d'augmentation. Certains résultats sur le choix de cet opérateur sont classiques, notamment dans le cas sans recouvrement, on peut en particulier caractériser l'opérateur optimal. Pour un sous-domaine  $\Omega_i$  l'opérateur d'augmentation optimal  $\mathbb{A}_i^{opt}$  est l'opérateur de Steklov Poincaré du complémentaire de  $\Omega_i$  condensé sur  $\Psi_i$ . Dans le cadre de notre stratégie, deux points sont à noter sur le choix  $\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_i^{opt}$  :

- lors de l'étape de relocalisation non linéaire, ce choix permet d'éviter l'apparition d'instabilités autres que celles du problème initial (donc dues aux schémas numériques choisis) : dans Cresta et al (2007) une approche primale (*ie* une augmentation trop rigide) conduit à l'apparition de flambage local parasite.
- l'utilisation de solveurs Krylov pour résoudre le problème tangent permet d'avoir accès facilement à une bonne approximation de cet opérateur par des techniques de réutilisation des sous-espaces de Krylov.

## 5 Premiers résultats

Un des cas académiques de simulation comportant des non-linéarités localisées est la réponse d'une poutre endommageable à un chargement de traction. La simulation débute avec un modèle élastique, quand la force thermodynamique  $Y$  atteint la force thermodynamique d'initiation  $Y_0$  l'endommagement démarre. On place alors un patch endommageable sur cette zone.



(a) Problème résolu et partition de l'unité associée (b) Convergence des problèmes locaux non linéaires

## 6 Conclusions

On a présenté dans cet article une stratégie permettant de gérer les non-linéarités localisées. Le principe de la méthode est d'utiliser des patches associés à des modèles non linéaires et à des maillages plus fins dans les zones où les non-linéarités apparaissent. Les patches sont liés aux sous structures par un raccord de type Lagrangien augmenté sur une interface volumique. On propose un schéma de résolution itératif permettant de limiter autant que possible le traitement de la non-linéarité au niveau du patch, seules quelques itérations globales sont alors nécessaires.

La méthode permet une grande flexibilité, les patches étant ajoutés au besoin, et une quasi non intrusivité, le patch ne modifiant en effet pas la structure il constitue une entité à part couplée à la structure par le schéma de résolution proposé. Les premiers résultats sur un cas académique sont encourageants. L'implantation dans le code de calcul Zebulon afin de pouvoir résoudre des problèmes mécaniques plus complexes est en cours.

## Références

- Cresta, P., Allix, O., Rey, C., Guinard, S., 2007, Comparison of multiscale nonlinear strategies for post-buckling analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **196**, 1436-1446.
- Gosselet, P., Rey, C., 2007, Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics, *Archives of Computational Methods in Engineering*, **13**, 515-572.
- Ben Dhia, H., 1998, Problèmes mécaniques multiéchelles : la méthode Arlequin, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série IIb, Paris*, **326**, 899-904.
- Rateau, G., 2003, Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles. Applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées, *Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris*
- Brezzi, F., Marini, L., 1993, A three-field domain decomposition method, dans *Proceedings of the sixth international conference on domain decomposition methods, Como-Italy, 27-34*.