



**HAL**  
open science

## Etude de la stabilité d'un fluide dans un cylindre en précession

Romain Lagrange, Patrice Meunier, Christophe Eloy, François Nadal

► **To cite this version:**

Romain Lagrange, Patrice Meunier, Christophe Eloy, François Nadal. Etude de la stabilité d'un fluide dans un cylindre en précession. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03362143

**HAL Id: hal-03362143**

**<https://hal.science/hal-03362143>**

Submitted on 1 Oct 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Etude de la stabilité d'un fluide dans un cylindre en précession

Romain Lagrange, Patrice Meunier, Christophe Eloy & François Nadal

CNRS, Université Aix-Marseille  
IRPHE  
49 rue F. Joliot-Curie, 13384 Marseille Cedex 13  
Romain.Lagrange@irphe.univ-mrs.fr

### Résumé :

*Dans ce papier nous présentons une analyse de stabilité linéaire basée sur un mécanisme de résonance triadique pour expliquer l'instabilité d'un fluide dans un cylindre en précession. Nous établissons une expression formelle du taux de croissance dans le cas où un mode de Kelvin forcé par la précession résonne avec deux modes de Kelvin libres. Cette expression est évaluée dans le cas particulier de modes de nombres d'onde azimutaux  $m = 1$  et  $m = 2$  lorsqu'on considère la première résonance des modes 1 et 3 de l'écoulement de base. Nous montrons alors qu'il existe des modes pour lesquels cette théorie prévoit une interaction constructive.*

### Abstract :

*In this paper, a linear stability analysis based on a triadic mechanism of resonance between Kelvin modes is presented to explain the precessional instability. A formal expression of the growth rate is established in the case where a Kelvin mode forced by precession is in resonance with two free Kelvin modes. This expression is evaluated in the particular case of modes with azimuthal wave number  $m = 1$  and  $m = 2$  when one considers the first resonance of first and third basic flow modes. We show there are modes for which this theory envisages a constructive interaction.*

### Mots-clefs :

### Modes de Kelvin ; résonance triadique

## 1 Introduction

L'étude de la précession d'un cylindre empli d'un fluide entre dans le cadre général des écoulements tournants. Ces derniers ont déjà fait l'objet de nombreuses recherches. Des expériences telles que celle menée par McEwan (1970) ont clairement montré qu'un fluide en précession engendre un écoulement de rotation solide auquel se superposent des ondes, appelées ondes inertielles ou encore modes de Kelvin. Ces ondes s'atténuent sont forcées à la fréquence de précession. Une analyse linéaire non visqueuse suffit pour prédire précisément leurs structures, leurs amplitudes ainsi que les conditions de résonance. La prise en compte des non-linéarités et des effets visqueux explique alors la saturation en amplitude et permet de connaître avec précision la structure de l'écoulement de base. Dans le cas de la précession on constate que celui-ci devient instable lorsque le nombre de Reynolds augmente. Cela conduit à un état très désordonné et possédant de petites structures par rapport à la taille du cylindre. L'apparition brutale de ce désordre, appelé phénomène de "resonant collapses" par McEwan (1970) ou encore "explosion" par Kobine (1996) et Manasseh (1996) est au centre de notre étude. Nous proposons un mécanisme de résonance triadique pour expliquer cette instabilité.

## 2 Position du problème

Nous considérons un cylindre de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  rempli entièrement d'un fluide. Ce cylindre est entraîné autour de son axe avec une vitesse angulaire  $\omega_1$ . Le dispositif est placé sur une table tournant à la vitesse angulaire  $\omega_2$ . L'axe de la table et celui du cylindre se coupent au centre de gravité de ce dernier et font un angle  $\alpha$ . Dans le référentiel du laboratoire le cylindre a donc un mouvement de précession. Dans la suite de l'étude nous nous plaçons dans le référentiel du cylindre et utilisons les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Nous notons  $\Omega = \omega_1 + \omega_2 \cos(\alpha)$  et nous adimensionnons les longueurs par  $R$ , le temps par  $\Omega^{-1}$  et les vitesses par  $\Omega R$ . Nous notons  $\omega = \frac{\omega_1}{\Omega}$  et  $\varepsilon$  l'amplitude du mode résonnant. Une analyse non linéaire visqueuse permet de connaître sa dépendance en fonction du nombre de Reynolds. Une analyse linéaire visqueuse permet d'établir la structure du mode de Kelvin résonnant  $\widehat{v}_b$  :

$$\widehat{v}_b = \frac{1}{2} \widehat{X}_b(r) e^{j(\omega t + \theta)} e^{jkz} - \frac{1}{2} \widehat{Y}_b(r) e^{j(\omega t + \theta)} e^{-jkz} + C.C \quad (1)$$

Avec :

$$\widehat{X}_b = \begin{pmatrix} U_b \\ V_b \\ W_b \\ p_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-j}{4-\omega^2} (\omega \delta J_1'(\delta r) + \frac{2}{r} J_1(\delta r)) \\ \frac{1}{4-\omega^2} (2\delta J_1'(\delta r) + \frac{\omega}{r} J_1(\delta r)) \\ \frac{-k}{\omega} J_1(\delta r) \\ J_1(\delta r) \end{pmatrix}, \widehat{Y}_b = \begin{pmatrix} U_b \\ V_b \\ -W_b \\ p_b \end{pmatrix} \quad (2)$$

$J_1$  est la fonction de Bessel de première espèce de paramètre 1.

Les nombres d'ondes  $k$  et  $\delta$  sont donnés par la relation de dispersion :

$$\omega \delta J_1'(\delta) + 2J_1(\delta) = 0 \quad (3)$$

la condition de résonance :

$$k = \frac{(2n+1)\pi R}{H}, n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

et la relation :

$$\delta^2 = \frac{(4-\omega^2)}{\omega^2} k^2 \quad (5)$$

## 3 Analyse linéaire non visqueuse de stabilité

Nous notons  $\widehat{u}$  le quadrivecteur perturbation de vitesse–perturbation de pression agissant sur l'écoulement de base  $\varepsilon \widehat{v}_b$ . Nous supposons que l'écoulement  $\widehat{v} = \varepsilon \widehat{v}_b + \widehat{u}$  vérifie l'équation d'Euler linéaire et l'équation de conservation de la masse. Sous forme matricielle cela s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{I} \widehat{u}) + \mathcal{M} \widehat{u} = \varepsilon \mathcal{N} \widehat{u} \quad (6)$$

Avec :

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 2 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\mathcal{N} = - \begin{pmatrix} \mathbf{v}_b \cdot \nabla + \frac{\partial v_{br}}{\partial r} & \frac{-2v_{b\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{br}}{\partial \theta} & \frac{\partial v_{br}}{\partial z} & 0 \\ \frac{v_{b\theta}}{r} + \frac{\partial v_{b\theta}}{\partial r} & \mathbf{v}_b \cdot \nabla + \frac{v_{br}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{b\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial v_{b\theta}}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial v_{bz}}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial v_{bz}}{\partial \theta} & \mathbf{v}_b \cdot \nabla + \frac{\partial v_{bz}}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

## 4 Résolution

Nous cherchons une solution de (6) sous la forme :

$$\begin{aligned} \widehat{u}(r, \theta, z, t) = & A_1 \left( \widehat{X}_1(r) e^{j(\omega_1 t + m_1 \theta)} e^{jk_1 z} - \widehat{Y}_1(r) e^{j(\omega_1 t + m_1 \theta)} e^{jk_1 z} \right) e^{\varepsilon \sigma t} \\ & + A_2 \left( \widehat{X}_2(r) e^{j(\omega_2 t + m_2 \theta)} e^{jk_2 z} + \widehat{Y}_2(r) e^{j(\omega_2 t + m_2 \theta)} e^{jk_2 z} \right) e^{\varepsilon \sigma t} \\ & + \varepsilon \widehat{u}_1(r, \theta, z, t) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (9)$$

avec  $\varepsilon \sigma \in \mathbb{C}$  taux de croissance de la perturbation,  $A_1$  et  $A_2$  réels. En injectant (9) dans (6) nous obtenons le problème d'ordre 0 en  $\varepsilon$  et le problème d'ordre 1 en  $\varepsilon$ .

### 4.1 Problème d'ordre 0 en $\varepsilon$

A l'ordre 0 en  $\varepsilon$  nous montrons que (9) est solution de (6) si et seulement si :

$$\widehat{X}_i(r) = \begin{pmatrix} U_i(r) \\ V_i(r) \\ W_i(r) \\ p_i(r) \end{pmatrix}, \quad \widehat{Y}_i(r) = \begin{pmatrix} U_i(r) \\ V_i(r) \\ -W_i(r) \\ p_i(r) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Avec :

$$\widehat{X}_i = \begin{pmatrix} \frac{-j}{4-\omega_i^2} \left( \omega_i \delta_i J_{|m_i|}'(\delta_i r) + \frac{2m_i}{r} J_{|m_i|}(\delta_i r) \right) \\ \frac{1}{4-\omega_i^2} \left( 2\delta_i J_{|m_i|}'(\delta_i r) + \frac{\omega_i m_i}{r} J_{|m_i|}(\delta_i r) \right) \\ \frac{-k_i}{\omega_i} J_{|m_i|}(\delta_i r) \\ J_{|m_i|}(\delta_i r) \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\omega_i \delta_i J_{|m_i|}'(\delta_i) + 2m_i J_{|m_i|}(\delta_i) = 0 \quad (12)$$

$$\delta_i^2 = \frac{(4 - \omega_i^2)}{\omega_i^2} k_i^2 \quad (13)$$

$k_1$  et  $k_2$  sont fixés par les conditions limites non visqueuses en  $z = \pm \frac{H}{2R}$  :

$$k_1 = \frac{(2n+1)\pi R}{H}, n \in \mathbb{N} \quad (14a)$$

$$k_2 = \frac{2n\pi R}{H}, n \in \mathbb{N} \quad (14b)$$

Un mode vérifiant (14a) est appelé mode de Kelvin libre impair.

Un mode vérifiant (14b) est appelé mode de Kelvin libre pair.

### 4.2 Problème d'ordre 1 en $\varepsilon$

Le problème d'ordre 1 nous permet d'établir une expression formelle du taux de croissance. Nous supposons que la perturbation d'ordre 1 est engendrée par le couplage (via le terme non linéaire de Navier Stokes) de l'écoulement de base et de deux solutions du problème d'ordre 0 vérifiant une condition dite de résonance triadique :

$$\begin{cases} |k_2 - k_1| = k \\ |m_2 - m_1| = 1 \\ |\omega_2 - \omega_1| = \omega \end{cases} \quad (15)$$

Par convention nous notons par l'indice 2 le mode ayant le plus grand nombre d'onde azimutal. Ainsi :  $|m_2 - m_1| = m_2 - m_1 = 1$ . Quatre cas se présentent :

$$\begin{array}{cccc} m_2 - m_1 = 1 & m_2 - m_1 = 1 & m_2 - m_1 = 1 & m_2 - m_1 = 1 \\ k_2 - k_1 = k & k_1 - k_2 = k & k_2 - k_1 = k & k_1 - k_2 = k \\ \omega_2 - \omega_1 = \omega & \omega_2 - \omega_1 = \omega & \omega_1 - \omega_2 = \omega & \omega_1 - \omega_2 = \omega \end{array} \quad (16)$$

Les deux derniers cas conduisent à un taux de croissance nul. Nous nous intéressons aux deux premiers cas.

La condition  $|k_2 - k_1| = k$ , le fait que  $k$  vérifie la condition de résonance (4) et le fait que  $k_1$  et  $k_2$  sont les nombres d'onde de modes de Kelvin libres imposent de choisir deux modes de parité différente.

Pour le premier cas de (16) on montre que  $\sigma$  doit vérifier :

$$\sigma^2 = \frac{\langle \widehat{X}_2 | \mathcal{N}_{m_1, k_1}^+ \widehat{X}_1 \rangle \langle \widehat{X}_1 | \mathcal{N}_{m_2, k_2}^+ * \widehat{X}_2 \rangle}{\langle \widehat{X}_1 | \mathcal{I} \widehat{X}_1 \rangle \langle \widehat{X}_2 | \mathcal{I} \widehat{X}_2 \rangle} \quad (17)$$

$\mathcal{N}_{m_1, k_1}^+$  est la matrice  $\mathcal{N}$  dans laquelle  $\mathbf{v}_b$  a été remplacé par  $\mathbf{X}_b$ , les dérivées par rapport à  $\theta$  par  $j m_1$  et celle par rapport à  $z$  par  $j k_1$ .

Dans le cas où nous effectuons les calculs en supposant  $k_1 - k_2 = k$  (deuxième cas de (16))  $\sigma$  doit vérifier :

$$\sigma^2 = \frac{\langle \widehat{X}_2 | \mathcal{N}_{m_1, k_1}^- \widehat{X}_1 \rangle \langle \widehat{X}_1 | \mathcal{N}_{m_2, k_2}^- * \widehat{X}_2 \rangle}{\langle \widehat{X}_1 | \mathcal{I} \widehat{X}_1 \rangle \langle \widehat{X}_2 | \mathcal{I} \widehat{X}_2 \rangle} \quad (18)$$

$\mathcal{N}_{m_1, k_1}^-$  est la matrice  $\mathcal{N}$  dans laquelle  $\mathbf{v}_b$  a été remplacé par  $-\mathbf{Y}_b$ , les dérivées par rapport à  $\theta$  par  $j m_1$  et celle par rapport à  $z$  par  $j k_1$ .

Les relations (17) et (18) sont les expressions formelles du carré du taux de croissance (au facteur  $\varepsilon^2$  près). On montre que  $\sigma^2$  est réel. Dans le cas où celui-ci est positif, l'écoulement est instable. Dans le cas contraire, l'écoulement est stable.

Quel que soit le cas considéré ( $k_2 - k_1 = k$  ou  $k_1 - k_2 = k$ ), le taux de croissance dépend uniquement du choix des deux modes de Kelvin libres :  $\varepsilon \sigma = \varepsilon \sigma(k_{1,2}, m_{1,2}, \omega_{1,2})$ .

Une méthode permettant de trouver ces modes consiste à chercher (pour  $m_2$  et  $m_1$  fixés tels que  $m_2 - m_1 = 1$ ) les points d'intersection des courbes  $\omega_2 - \omega = f(k_2)$ ,  $\omega_1 = f(k_1 \pm k)$  et  $k_{1,2} = \frac{n\pi R}{H}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . En fait, mis à part certains cas (résonance exacte), ces points n'existent pas.

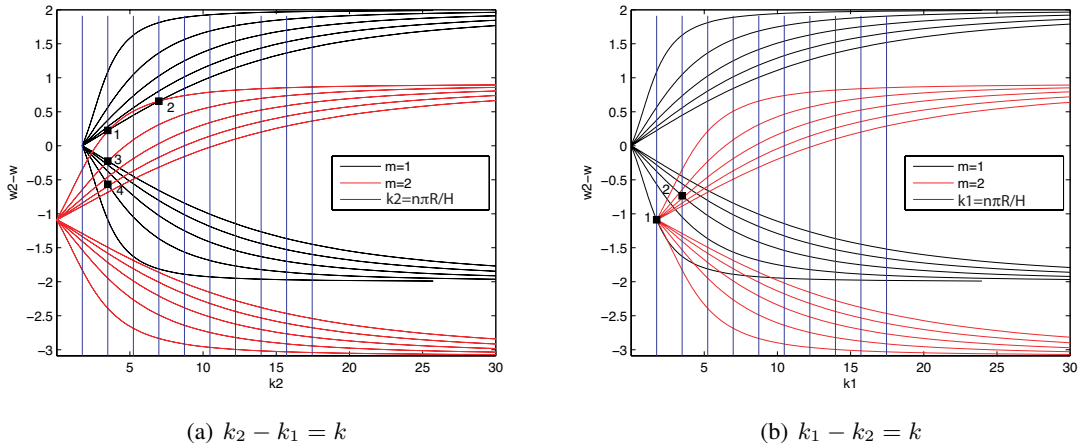


FIG. 1 – Première résonance mode 1.  $R = 1.5$  cm,  $H = 2.7$  cm. Les carrés représentent les couples (2 modes de Kelvin) pour lesquels le taux de croissance a été calculé.

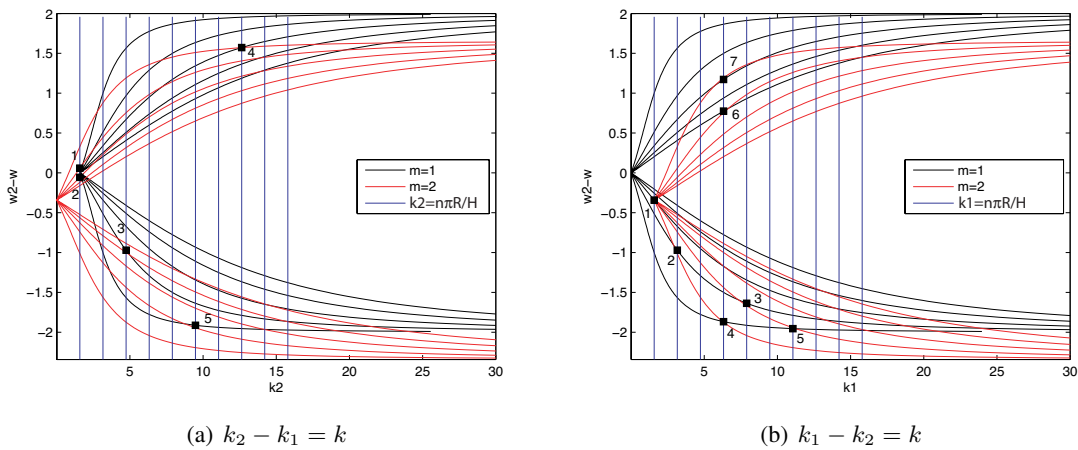


FIG. 2 – Première résonance mode 3.  $R = 4.595$  cm,  $H = 9.14$  cm

Nous considérons alors des modes de Kelvin libres de parité différente et tels que  $\omega_2 - \omega_1 = \omega + O(\varepsilon)$ . (c.f Figures 1 et 2)

Dans la partie suivante nous présentons les résultats numériques obtenus à partir des équations (17) et (18) pour les modes de Kelvin choisis. Les valeurs numériques pour  $\sigma$  ne tiennent donc pas compte du "detuning" sur  $\omega$  introduit.

## 5 Résultats

### 5.1 Première résonance mode 1, $R=1.5$ cm, $H=2.7$ cm

Dans le cas  $k_2 - k_1 = k$  les couples 1 et 3 sont les seuls conduisant à un taux de croissance positif, donc à une instabilité. Pour le couple 1 nous avons  $\omega_1 = 0.2253$ ,  $k_1 = \pi \frac{R}{H}$  et  $\omega_2 = 1.3025$ . Nous obtenons alors  $\sigma \approx 0.0540$ . Pour le couple 3 nous avons  $\omega_1 = -0.2253$ ,  $k_1 = \pi \frac{R}{H}$  et  $\omega_2 = 0.8589$ . Nous obtenons alors  $\sigma \approx 0.1801$ .

Dans le cas  $k_1 - k_2 = k$  le couple 1 (résonance exacte) est le seul conduisant à un taux de croissance positif. Pour ce couple nous avons  $\omega_1 = -1.0884$ ,  $k_1 = \pi \frac{R}{H}$  et  $\omega_2 = 0$ . Pour  $\delta_2$

troisième racine de  $J_2$ , nous obtenons alors  $\sigma \approx 0.0593$ .

## 5.2 Première résonance mode 3, R=4.595 cm, H=9.14 cm

Dans le cas  $k_2 - k_1 = k$  les couples 1, 2 et 4 sont les seuls conduisant à un taux de croissance positif. Pour le couple 1 nous avons  $\omega_1 = 0$ ,  $k_1 = 0$  et  $\omega_2 = 0.4005$ . Pour  $\delta_1$  quatrième racine de  $J_1$  nous obtenons alors  $\sigma \approx 0.6094$ . Pour le couple 2 nous avons les mêmes valeurs de  $\omega_1$  et  $k_1$  mais  $\omega_2 = 0.2859$ . Pour  $\delta_1$  septième racine de  $J_1$  nous obtenons alors  $\sigma \approx 0.3506$ . Pour le couple 4 nous avons  $\omega_1 = 1.5728$ ,  $k_1 = 7\pi\frac{R}{H}$  et  $\omega_2 = 1.9129$ . Nous obtenons alors  $\sigma \approx 0.0485$ .

Dans le cas  $k_1 - k_2 = k$  le couple 1 (résonance exacte) est le seul conduisant à un taux de croissance positif. Pour ce couple nous avons  $\omega_1 = -0.3409$ ,  $k_1 = \pi\frac{R}{H}$  et  $\omega_2 = 0$ . Pour  $\delta_2$  première racine de  $J_2$ , nous obtenons alors  $\sigma \approx 0.9466$ .

## 6 Conclusion

L'étude présentée dans ce papier établit une expression du taux de croissance de l'instabilité observée dans le cas d'un fluide dans un cylindre en précession. Nous avons montré par une analyse de stabilité linéaire qu'un mécanisme de résonance triadique entre certains modes de Kelvin conduisait à un taux de croissance positif, donc en théorie à une instabilité. Il faut cependant garder en mémoire que ces résultats ont été obtenus pour des modes  $m = 1$  et  $m = 2$ . Il convient donc de multiplier les valeurs numériques en jouant sur les nombres d'ondes azimutaux des modes choisis. Cependant, nous pouvons déjà noter que ces résultats prédisent qu'une interaction incluant un mode stationnaire peut conduire à une instabilité.

Bien évidemment la confirmation ou non de cette théorie sera apportée par l'expérience avec des mesures quantitatives par PIV. Celles-ci nous permettront également de réduire notre secteur d'étude en nous focalisant en priorité sur des nombres d'onde azimutaux privilégiés.

Enfin, bien que cela ne soit pas présenté dans ce papier, notons qu'il a été montré que la solution particulière de l'écoulement de base sous un forçage de type Coriolis est stable. Ce résultat découle d'une contradiction au niveau des équations de solvabilité permettant de déterminer  $\sigma$ . Cette contradiction est due aux conditions limites sur les parois supérieures et inférieures du cylindre. Elle ne se retrouve donc pas dans le cas d'un cylindre infini comme le traite entre autre Mahalov (1993).

## Références

- Kobine, J.J. 1996. Azimuthal flow associated with inertial wave resonance in a precessing cylinder *J. Fluid Mech.* **319** 387-406
- Mahalov, A. 1993. The instability of rotating fluid columns subjected to a weak external Coriolis force *Phys. Fluids A.* **5**(4) 891-900
- Manasseh, R. 1996. Nonlinear behaviour of contained inertia waves *J. Fluid Mech.* **315** 151-173
- McEwan, A.D. 1970. Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder *J. Fluid Mech.* **40**(3) 603-640