



HAL
open science

Un modèle d'endommagement à potentiel non convexe

Marc François

► **To cite this version:**

Marc François. Un modèle d'endommagement à potentiel non convexe. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-03362099

HAL Id: hal-03362099

<https://hal.science/hal-03362099>

Submitted on 1 Oct 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un modèle d'endommagement à potentiel non convexe

Marc François

LMT-Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan CEDEX

Résumé :

Cette communication s'intéresse à l'effet d'une élasticité dépendante du confinement en mécanique de l'endommagement. Ce couplage introduit une énergie libre cubique et donc un potentiel non convexe qui induit la co-existence de deux phases en post-pic. Deux mécanismes de dissipation sont obtenus, l'un est classique, relatif à l'évolution du dommage, et l'autre est associé à la variation de fraction volumique relative de ces deux phases. Cette étude est combinée avec une nouvelle surface seuil pour les matériaux quasi-fragiles. Le modèle prédit la grande dilatance observée aux états ultimes pour ces matériaux, des boucles d'hystérésis en compression (pour un niveau de dommage constant) et des angles de localisation différents en traction et en compression.

Abstract :

This paper studies the effect of confinement-dependent elasticity in damage mechanics. This coupling leads to a third order free energy and non convex potential that involves the existence of two-phase states in the post-peak domain of the compression curve. Two dissipative mechanisms are obtained, one linked to the damage evolution and the other to the evolution of the relative volume fraction of the two phases. This study is combined with a new smooth yield surface for quasi-brittle materials. The model allow to describe the large dilatancy observed at ultimate states of such materials, hysteresis dissipative loops in compression (at a constant damage value) and different shear band angles in tension and compression.

Mots-clefs :

mécanique de l'endommagement, potentiels non convexes

1 Introduction

Les modèles d'endommagement d'approche macroscopique ont l'avantage d'une relative simplicité un d'un coût de calcul modéré. Beaucoup de développements ont été faits autour de la dissipation, afin de décrire le comportement post-pic, mais beaucoup moins au niveau de l'état, décrit en général par une élasticité isotrope ou non, altérée par des termes d'endommagement. L'idée de base est d'introduire un couplage entre les parties hydrostatiques et déviatoriques au niveau de l'état, comme diverses expériences sur des matériaux granulaires (envisagé comme l'état ultime $d = 1$ du matériau) en font état : Azzouz (1995). Ceci entraîne un potentiel non convexe, domaine largement exploré par Puglisi (2005).

2 État

La contrainte $\underline{\sigma}$ et la déformation $\underline{\varepsilon}$ sont décomposées en leurs parties hydrostatiques et déviatoriques $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^h + \underline{\sigma}^d$, $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^h + \underline{\varepsilon}^d$. Cette décomposition, dite de Kelvin, est pertinente pour l'élasticité isotrope que ce modèle utilise. Les variables d'état retenues sont la déformation $\underline{\varepsilon}$ et l'endommagement scalaire d . Par rapport aux modèles traditionnels, le potentiel d'état (énergie libre de Gibbs) introduit un couplage ente les parties hydrostatiques et déviatoriques *via* la constante φ . Par raison de simplicité, et suivant une approche de Ladevèze (1993), l'endommagement ne porte ici que sur la partie déviatorique. Une déformation hydrostatique négative

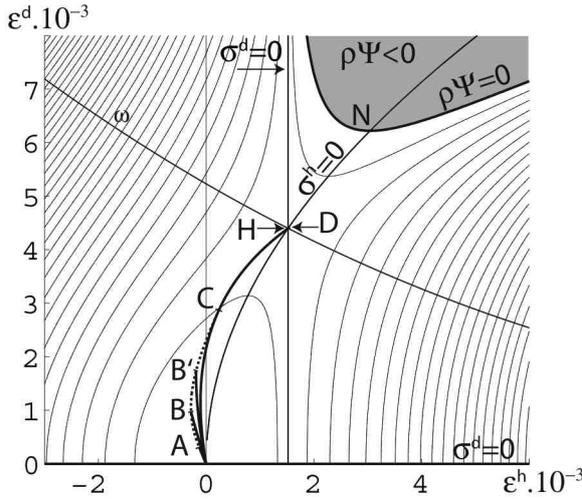


FIG. 1 – Iso-valeurs de l'énergie libre dans le plan de Drucker-Prager pour $d=0.588$

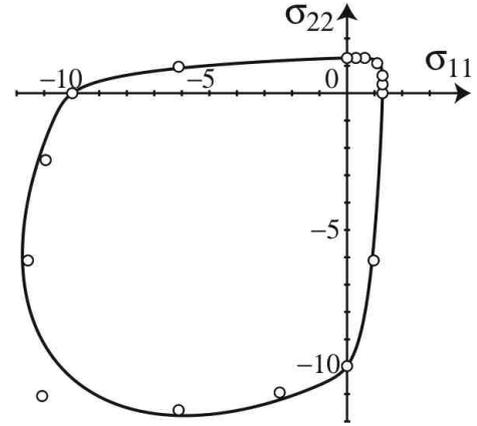


FIG. 2 – Surface seuil initiale obtenue (ligne) et essais de Kupfer (cercles)

(une compaction) a pour effet (si l'endommagement est non nul), d'augmenter le module de cisaillement apparent ; on peut penser à la compaction d'un matériau granulaire qui, comme dans un matelas coquille, augmente les surfaces de contact et renforce l'élasticité du matériau.

$$2\rho\Psi(\underline{\varepsilon}, d) = 3K\underline{\varepsilon}^h : \underline{\varepsilon}^h + 2\mu \left(1 - d(1 + 2\varphi\varepsilon^h)\right) \underline{\varepsilon}^d : \underline{\varepsilon}^d \quad (1)$$

Contrainte $\underline{\sigma}$ et force thermodynamique associée à l'endommagement Y sont obtenues par dérivation du potentiel d'état par rapport aux variables d'état. Nous avons alors :

$$\underline{\sigma}^h = 3K\underline{\varepsilon}^h - \frac{2}{\sqrt{3}}\mu\varphi d(\varepsilon^d)^2 \underline{I} \quad (2)$$

$$\underline{\sigma}^d = 2\mu \left(1 - d(1 + 2\varphi\varepsilon^h)\right) \underline{\varepsilon}^d \quad (3)$$

$$Y = -\frac{d\rho\Psi}{dd} = \mu(1 + 2\varphi\varepsilon^h)(\varepsilon^d)^2 \quad (4)$$

On constate qu'une déformation déviatorique induit une contrainte de confinement pour une transformation isochore, ou, inversement, une dilatance pour une transformation isobare. La force Y peut devenir négative ; dans ce cas, l'expression de la dissipation intrinsèque $\dot{q}_i^d = Y\dot{d}$ interdit l'évolution de l'endommagement. S'en suit une limite, en plus de la surface seuil introduite plus loin, associée à la positivité de Y s'exprimant comme $\varepsilon^h < -1/2\varphi \Rightarrow \dot{d} = 0$. Avec les constantes retenues, ce confinement « de blocage » a lieu pour $\varepsilon^h < -3.84 \cdot 10^{-3}$, en dehors des limites du calcul ingénieur pour des structures en béton. Un effet de blocage de ce type est cependant identifié par Burlion (1997), cependant pour des déformations plus élevées. L'équation 3 fait apparaître que les déviateurs demeurent toujours colinéaires. On peut alors réduire l'espace des tenseurs du second ordre à deux dimensions : l'axe hydrostatique de base \underline{I} et la direction normée du déviateur $\underline{D} = \underline{\varepsilon}^d / \|\underline{\varepsilon}^d\|$ et utiliser les notations scalaires $(\varepsilon^h, \varepsilon^d, \sigma^h, \sigma^d)$ en lieu et place des tenseur $(\underline{\varepsilon}^h, \underline{\varepsilon}^d, \underline{\sigma}^h, \underline{\sigma}^d)$. La figure 1 montre l'aspect non convexe de ce potentiel. Une analyse des équation 2 et 3 montre un domaine (interdit) où l'énergie libre est négative. Le modèle n'y est plus prédictif ; ce domaine correspond à une dépression hydrostatique couplée à un cisaillement. Le point H est un point selle où la contrainte est nulle. Au delà de la courbe ω , définie comme la ligne de courant passant par H, est un domaine instable car le retour naturel vers l'équilibre (minimisation de l'énergie libre) se fait vers le domaine interdit. La ligne

$\sigma^d = 0$, d'équation $\varepsilon_0^h = (1-d)/(2\varphi d)$ sépare le domaine où le module de cisaillement apparent est positif (à gauche) et négatif (à droite). La ligne $\sigma^h = 0$, d'équation $\varepsilon^d = \sqrt{3K\varepsilon^h}/(2\mu\varphi d)$ définit, entre elle-même et l'axe $\sigma^h = 0$, le domaine où le module de compressibilité apparent est négatif. Ces modules négatifs sont impossibles avec une élasticité classique et existent dans certaines approches micromécaniques François (2005).

3 Seuil et dissipation

Desmorat *et al.* (2006) montre que les surfaces seuil actuellement utilisées en Génie Civil pour les bétons sont peu prédictives. La formulation suivante fait intervenir, par son membre gauche, un terme de type Von Mises prédominant en compression et, par son membre droit, la norme d'une exponentielle de tenseur qui se comporte de manière assez similaire à un critère de Rankine adapté au cas de traction. L'ensemble est de classe C^∞ et bien prédictif (figure 2) des essais de références de Kupfer *et al.* (1969). Les constantes σ_y et σ_0 gèrent les limites en traction et compression et les fonctions $g(d)$ et $h(d)$ sont les fonctions d'écrouissage ; leur valeur en 0 est 1. Les équations d'évolution sont simplement obtenues par les conditions classiques $f = 0$ et $df = 0$. La positivité de la dissipation a déjà été assurée.

$$f(\underline{\sigma}, d) = \frac{\|\underline{\sigma}^d\|}{g(d)} + \frac{\sigma_0}{h(d)} \left(\left\| \exp\left(\frac{\underline{\sigma}}{\sigma_0}\right) \right\| - \sqrt{3} \right) - \sigma_y \quad (5)$$

4 Cas de la compression

La symétrie isotrope transverse de la sollicitation permet de définir $-\tilde{\nu}\varepsilon$ comme déformation transverse relative à la déformation axiale ε . Les équations (2, 3) permettent d'obtenir la relation $\sigma - \varepsilon$ définie par les équations suivantes, qui accepte en général deux solutions :

$$\sigma = 3K(1 - 2\tilde{\nu})\varepsilon - \frac{4\mu\varphi d}{\sqrt{3}}(1 + \tilde{\nu})^2\varepsilon^2 \quad (6)$$

$$0 = \tilde{\nu}^2 \frac{12\mu\varphi d}{\sqrt{3}}\varepsilon + \tilde{\nu} \left[2\mu(1 - d) + 6K + \frac{12\mu\varphi d\varepsilon}{\sqrt{3}} \right] + 2\mu(1 - d) - 3K \quad (7)$$

La figure 3 illustre les résultats obtenus pour les constantes suivantes : $K = 18,3$ GPa, $\mu = 13,8$ GPa, $\sigma_y = 8$ MPa, $\sigma_0 = 0,45$ MPa, $\varphi = 130$. Le trajet OA est élastique linéaire, avec $d = 0$. De A à C, l'endommagement croît, et l'élasticité non linéaire est (faiblement) présente dans les retours à zéro. Au delà de C, l'étude des conditions de localisation selon le critère d'Hadamard et Rice montre que l'on peut avoir localisation, c'est à dire, pour nous, coexistence de deux phases : la courbe en trait fort est la courbe d'élasticité pour $d = d(C)$, elle permet deux solutions en déformation pour une même contrainte. La courbe Δ est le lieu des minimums d'énergie libre (pour une contrainte donnée) ; elle représente les états d'équilibre.

Les transformations au delà du pic sont déterminées en (re)-considérant le principe du maximum de dissipation : le bilan d'énergie (transformation adiabatique) peut être réécrit sous la forme :

$$\Delta q_i = \Delta w_e - (\rho\Psi^f - \rho\Psi^i) \quad (8)$$

Maximiser la dissipation Δq_i revient à minimiser l'énergie libre à l'état final $\rho\Psi^f$ (retour sur Δ) et à maximiser le travail reçu Δw_e qui n'est autre que l'aire sous la courbe $\sigma - \varepsilon$. Ces considérations suffisent à mettre en valeur des trajets dissipatifs et des boucles d'hystérésis dont beaucoup sont obtenus sans que l'endommagement ne varie. La figure 4 illustre le cas du

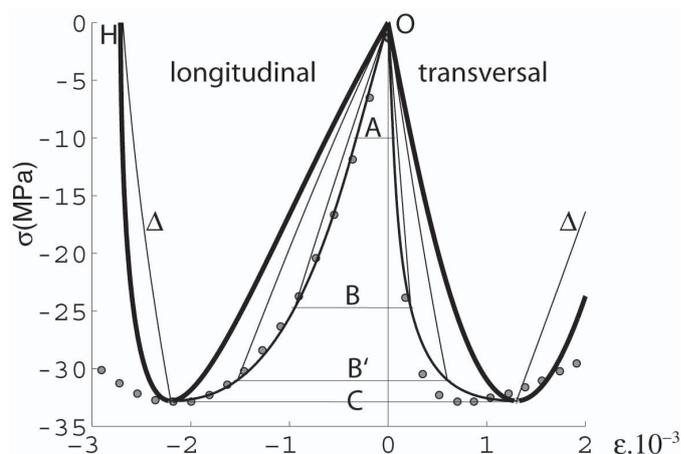


FIG. 3 – Compression : modèle (lignes) et essais de Kupfer (cercles)

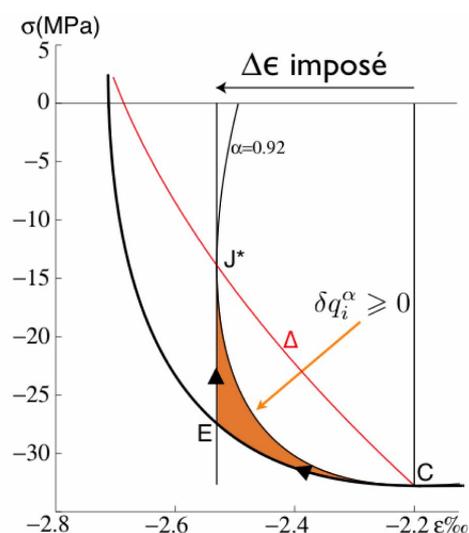


FIG. 4 – Chargement en post-pic

chargement en post-pic en imposant ε de $\varepsilon(C)$ à $\varepsilon(E)$: l'aire grisée correspondant à la dissipation est maximisée par le trajet CEJ*, et le retour EJ* se fait de façon spontanée.

5 Conclusions

Ce travail est encore exploratoire et ce modèle ne prétend ni être parfaitement prédictif ni utilisable tel quel dans un code EF. Néanmoins, il permet de décrire convenablement les effets de dilatance et de dissipation lors des cyclages en post-pic et ce dernier point est crucial pour les simulations de structures soumises à des chargements sismiques. Divers points, comme les effets d'instabilités au delà de la courbe ω , sont encore à éclaircir.

Références

- Azzouz, F. 1995 Modélisation du comportement thermo-hydro-mécanique d'un sable de fondrière. *Thèse de doctorat, LMT-Cachan.*
- Burlion, N. 1997 Compaction des bétons : éléments de modélisation et caractérisation expérimentale. *Thèse de doctorat, LMT Cachan.*
- Desmorat, R., Ragueneau, F., Gatingt, F. 2006 Role of equivalent strains on the multiaxial response of an anisotropic damage model. *In Proceedings of European Solid Mechanics Conference ESMC 2006.* Budapest, Hongrie.
- François, M. 2005 Structured deformation of damaged continua with cohesive-frictional sliding rough fractures. *Eur. J. of Mech. A/Solids.* **24** 644-660.
- Kupfer, H., Hilsdorf, K., Rusch, J. 1993 Behavior of concrete under biaxial stresses. *ACI Journal.* **66** (52) 656-666.
- Ladevèze, P. 1993 On anisotropic damage theory. *In proceedings of the CNRS international colloquium No 351.* pp. 355-363.
- Puglisi, G., Truskinovski, L. 2005 Thermodynamics of rate-independent plasticity. *J. of Mech. and Phys. of Solids.* **53** 655-679.